Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

Факультет: «Фундаментальные науки»
Кафедра «Физика»

Герасимов Р.Ю.
Селиванов А.В.

Лабораторная работа М-113

Изучение колебаний связанных маятников

Методическое руководство

Москва, 2024

Изучение колебаний связанных маятников

1. Цель лабораторной работы

Изучение гармонических (нормальных) колебаний связанной системыдвух маятников. Изучение биений как результата сложения нормальных колебанийсвязанной системы двух маятников.

2. Экспериментальное оборудование, приборы и принадлежности

Лабораторная установка показана на рис. 1.

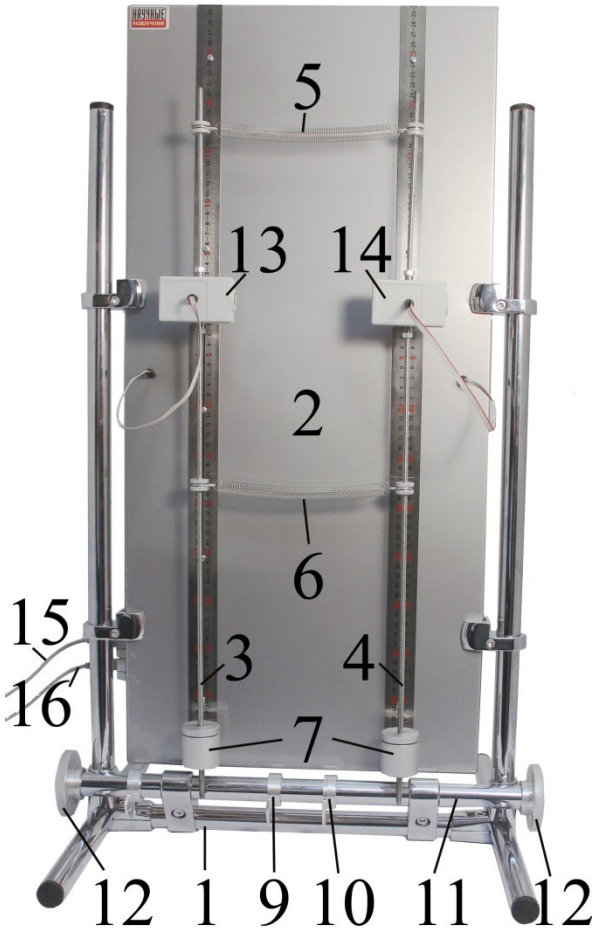


Рис. 1

На основании 1 установлен вертикальный стенд 2с системой подвеса маятников 3 и 4, которые соединены пружинами 5, 6. Пружины закрепляются на фиксаторах, которые свободно перемещаются по резьбе верхних и нижних стержней маятников. Частота свободных колебаний маятников регулируется перемещением грузов 7. Начальные условия колебания маятников задаются с помощью секторов, размещенных на штанге стартового устройства 11.Сектора 9, 10 служат для запуска антифазных колебаний. Секторастартового устройства приводится в движение поворотом штанги

одной из рукояток 12. На маятниках укреплены датчики угловой скорости 13, 14.Передача данных в компьютер осуществляется с помощью двух USB-кабелей 15 и 16.

К приборам и принадлежностям относится компьютер с программным обеспечением для регистрации и обработки данных.

3. Теоретическая часть

3.1. Связанная колебательная система.

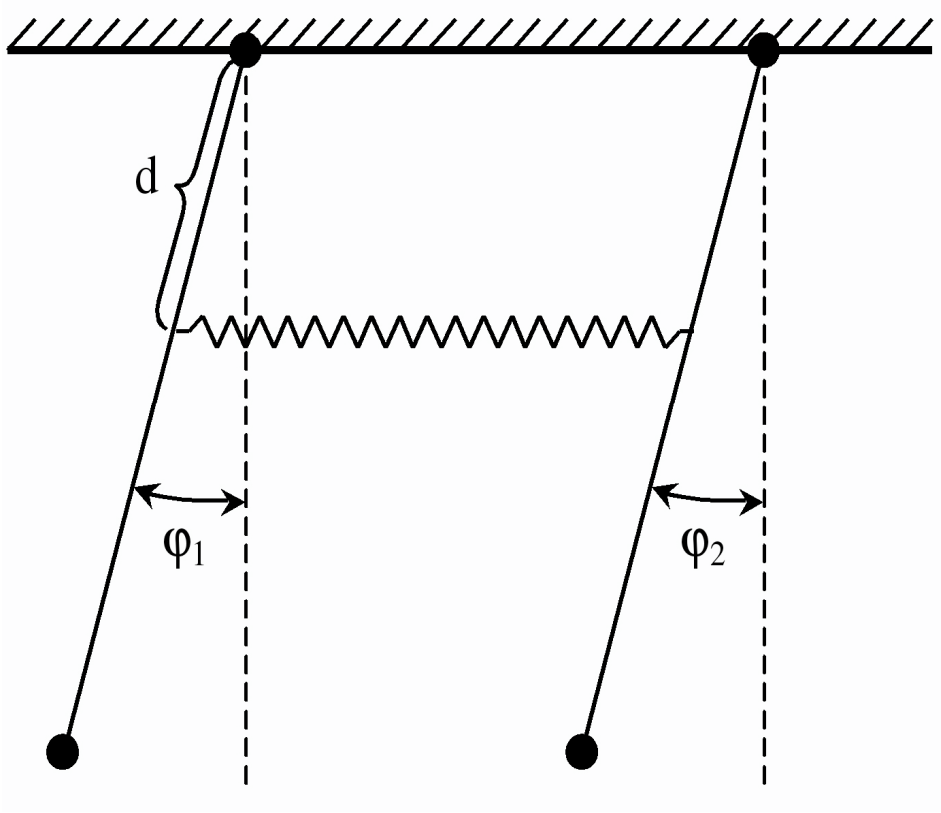


Рис. 2.

Связанная колебательная система – это совокупность двух или нескольких маятников (**парциальных систем**), каким-либо образом связанных между собой. В качестве примера рассмотрим систему, изображенную на рис. 2. Она состоит из двух математических маятников массой m и длиной l, связанных невесомой пружиной с коэффициентом жесткости k. При движении маятников в одной вертикальной плоскости состояние такой системы полностью описывается двумя независимыми параметрами - углами φ_1 и φ_2 отклонения маятников от вертикали, т.е. система имеет две степени свободы.

Уравнение движения для каждого маятника можно получить из общего уравнения динамики вращательного движения вокруг неподвижной оси:

$$J\ddot{\varphi} = M, \tag{1}$$

где ***J***– момент инерции тела относительно оси вращения; ***M*** – момент действующих на тело сил относительно той же оси.

Применительно к каждому маятнику уравнение (1) для малых колебаний имеет вид:

$$\begin{aligned} ml^2\ddot{\varphi}_1 + mgl\,\varphi_1 &= kd^2(\varphi_2 - \varphi_1), \\ ml^2\ddot{\varphi}_2 + mgl\varphi_2 &= kd^2(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь учтено, что при малых φ_1 и φ_2 удлинение пружины равно $d(\varphi_1 - \varphi_2)$ и, следовательно, момент ***M*** упругой силы равен $kd^2(\varphi_1 - \varphi_2)$, поскольку плечо этой силы равно ***d***. Предполагается, что момент сил трения, действующих на маятники, много меньше ***M*** и затуханием можно пренебречь.

Общее решение системы (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + B\cos(\omega_2 t + \alpha_2), \\ \varphi_2 &= A\cos(\omega_1 t + \alpha_1) - B\cos(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \tag{3}$$

где постоянные ***A***, ***B***, α_1 и α_2 определяются из начальных условий, а частоты ω_1, ω_2 даются формулами:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{kd^2}{ml^2}}. \tag{4}$$

Из соотношений (3) следует, что в общем случае каждый маятник осуществляет сложное колебание, которое не является гармоническим, поскольку складывается из двух независимых колебаний с частотами ω_1 и ω_2.

Нормальныеколебания

Специальным подбором начальных условий можно добиться возбуждения колебаний системы только с одной частотой. Такие колебания, при которых оба маятника колеблются с одной и той же частотой, называются нормальными колебаниями. Частоты таких колебаний называются нормальными частотами. Число нормальных колебаний равно числу степеней свободы системы.

В рассматриваемом случае двух связанных маятников нормальные колебания могут быть возбуждены следующими двумя способами.

Синфазные колебания – это колебания маятников, происходящие в одной фазе с меньшей из нормальных частот ω_1.Они описываются выражениями (3) при$B = 0$, что соответствует начальным условиям

$$t = 0,\ \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0,\ \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 . \qquad (5)$$

Это означает, что в начальный момент времени оба маятника отклонены на один и тот же угол и имеют одинаковые скорости (например, нулевые). Роль связи при таких колебаниях исчезает.

Антифазные колебания– это колебания маятников, происходящие в противофазе с большей из нормальных частот ω_2. Они описываются соотношениями (3) при $A = 0$, что приводит к начальным условиям

$$t = 0,\ \varphi_1 = -\varphi_2,\ \dot{\varphi}_1 = -\dot{\varphi}_2 . \qquad (6)$$

Отсюда следует, что в начальный момент времени маятники отклоняются на противоположный угол и имеют противоположные угловые скорости.

В общем случае произвольных начальных условий будут одновременно совершаться оба нормальных колебания. При этом возникают биения – периодическое возрастание и убывание амплитуды колебаний каждого из маятников.

Биения удобно наблюдать при начальных условиях

$$t = 0,\ \varphi_1 = \varphi_0,\ \varphi_2 = 0,\ \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0. \qquad (7)$$

При этом постоянные системы (3) имеют значения

$$A = B = \frac{\varphi_0}{2},\quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0 . \qquad (8)$$

После подстановки выражений (8) в уравнения (3) получим

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right), \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right). \end{aligned} \qquad (9)$$

Предположим, что связь между маятниками является слабой, т.е. $\omega_2 - \omega_1 << \omega_1$, а значит, как следует из соотношений (4),

$$kd^2 << mgl . \qquad (10)$$

Из уравнений (9) вытекает, что в этом случае движение маятников можно считать колебаниями, происходящими с частотой $\omega = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}$, и амплитудами, медленно меняющимися во времени. Период этих медленных изменений амплитуд определяется выражением

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \tag{11}$$

и называется периодом биений. При этом фазы колебаний маятников отличаются на $\frac{\pi}{2}$. Уменьшение амплитуды одного из маятников приводит к увеличению амплитуды второго. Общая энергия системы (без учета потерь) остается постоянной, но «перекачивается» от одного маятника к другому.

Отметим, что если связанная система состоит из трех парциальных систем, например, трех математических маятников, соединенных пружинами, она обладает тремя системами свободы и тремя нормальными частотами. Если же число парциальных систем равноn, то связанная система обладает n степенями свободы и имеет n нормальных частот.

3.2. Явление резонанса.

Для получения незатухающих (вынужденных) колебаний на систему воздействуют периодической внешней силой. Тогда всякий раз, когда частота внешнего воздействия ωстановится равной нормальной частоте ω_1 или ω_2 наступает резонанс. Резонанс – явление резкого возрастания амплитуды колебаний при приближении частоты внешнего воздействия к собственной (нормальной) частоте колебательной системы.

Когда частота внешнего воздействия равна одной из мод, оба маятника движутся так, как если бы их колебания принадлежали этой моде (при свободных колебаниях). Так, при $\omega=\omega_1$ будем наблюдать синфазные колебания (моду 1), а при $\omega=\omega_2$- антифазные колебания (моду 2). Таким образом, резонансная кривая системы двух связанных маятников имеет два максимума.

4. Порядок проведения лабораторной работы

Маятники, применяемые в лабораторной установке, не являются математическими. Кроме того, по технологическим причинам конструкция маятников предполагает наличие двух пружин, расположенных по разные стороны от осей вращения. Указанные обстоятельства, безусловно, влияют на абсолютные значения нормальных частот и частоту биений, однако соотношения между нормальными частотами, частотой быстрого движения

маятников при наблюдении биений и частотой биений сохраняются такими же, как это было получено для идеализированной системы.

Подготовка к выполнению работы

1. С помощью соединительных кабелей подключите датчики угловой скоростик USB-портам компьютера. Запустите программу «Практикум по общей физике» и в разделе «Механика» выберите сценарий «Изучение колебаний связанных маятников» (кнопка )

Определение частоты собственных колебаниймаятнков

2. Снимите верхнюю и нижнюю пружины с маятников и установите все 4 фиксатора пружин на одинаковом и максимальном расстоянииот центров подвеса маятников. Максимальное расстояние определяется, естественно, длиной верхних стержней маятников.
3. Убедитесь, чтовсе рабочие кромки секторов стартового устройства находятся на одинаковом расстоянии от равновесных положений соответствующих маятников и рассчитайте угол начального отклонения маятников от вертикали.
4. Поверните стартовое устройство так, чтобы рабочие кромки секторов приняли горизонтальное положение и заведите за них концы стержней маятников.
5. Запустите измерения, нажав кнопку  в главном меню программы, и отпустите маятники, резко повернув штангу стартового устройства примерно на четверть оборота. На экране начнут регистрироваться зависимости угловой скорости обоих маятников от времени.
6. Через 30 – 40с остановите измерения (кнопка ) и определите период колебаний каждого маятника. Для этого необходимо с помощью маркеров измерить время, за которое совершается 10 – 15 колебаний. Рекомендуется исключить из рассмотрения первые несколько колебаний, поскольку в их записи присутствуют посторонние колебания, возникшие при работе стартового устройства.
7. Рекомендуется следующий алгоритм работы с маркерами. Сдвиньте кривую (Ctrl + левая клавиша мыши) на экране так, чтобы график занимал весь экран. Увеличьте масштаб области графика, в которой кривая первый раз (в рамках экрана) пересекает нулевую линию (Alt+левая клавиша мыши), до такой степени, чтобы последовательные точки графика (отдаленные друг от друга на 0.005с) были легко видны на графике. Установите желтый маркер (щелчок левой клавиши мыши) в точку, ордината которой наиболее близка к нулю (ордината точки установки желтого маркера показывается под графиком слева и в первой строке таблицы над графиком). В ту же точку установите зеленый маркер

(щелчок правой клавиши мыши), именно он будет определять начало измеряемого интервала времени.

8. После этого верните масштаб графика к исходному (двойной щелчок левой кнопки мыши по полю графика).Отсчитайте целое число периодов и проделайте аналогичные действия с масштабированием графика около соответствующей точки пересечения графика с нулевой линией в правой части экрана. Установите желтый маркер в точку с ординатой, наиболее близкой к нулю. Нажмите символ «+» в правом верхнем углу графика, при этом интервал времени между зеленым и желтым маркерами будет записан в таблицу.
9. В следующий столбец таблицы введите с клавиатуры количество периодов колебаний заключенных между маркерами. После этого в таблице появятся значения периода и частоты колебаний. В последний столбец таблицы внесите комментарий (например, «свободные колебания, маятник 1, верхний график»).
10. Аналогичным образом, проведя измерения и обработав их в таблице, определите период колебаний второго маятника. Если периоды колебаний отличаются более чем на 0.001с, сделайте их более близкими. Для этого определите, к какому маятнику относится каждый из графиков, исоответствующим образом измените положение груза на стержнеодного из маятников.

Определение частоты синфазных колебаний

11. Соедините маятники пружинами, проверьте, что все фиксаторы пружин одинаково удалены от осей маятников. Поскольку фиксаторы пружин находятся на наибольшем удалении от осей маятников, в данном случае реализуется максимальная связь между маятниками (плечи сил упругости имеют наибольшее значение).
12. Установите маятникив стартовое устройство так, как это показано на рис.3.
13. Запустите измерения, нажав кнопку  в главном меню программы. На вопрос «Очистить таблицу накопленных данных?» следует ответить «Нет». Отпустите маятники, резко повернув штангу 11 одной из ручек 12. На экране начнет регистрироваться зависимость угловой скорости обоих маятников от времени. Сигналы датчиков будут представлять собой синусоиды с медленно убывающей амплитудой. Остановите измерения, нажав кнопку  через 40 – 50с после начала измерений.
14. Определите частоту синфазных колебаний системы, используя описанную в п.7,8,9 методику. Полученные данные вносите в ту же таблицу с соответствующим комментарием. Результаты, получаемые по записям колебаний каждого маятника должны совпадать в рамках точности измерений (0.001с для периода колебаний), поскольку речь идет о движении единой колебательной системы.



Рис. 3.

15. Переставляя желтый маркер по одной из осциллограммв рамках одного периода колебаний, следите за перемещением желтого маркера по другой осциллограмме. Маркеры на обоих графиках перемещаются синхронно, поэтому Вы можете сделать вывод о синфазности колебаний наблюдаемых в эксперименте. Для большей наглядности масштаб графиков можно увеличить вдоль оси OX.

<u>Определение частоты антифазных колебаний</u>

16. Установите маятники в стартовое устройство так, чтобы они отклонились в разные стороны от положения равновесия (рис. 4).



Рис. 4.

17. Определите период и частоту антифазных колебаний системы так, как это было описано в п.13-14. Кроме того, убедитесь в том, что колебания действительно антифазные (аналогично п.15).

Изучение биений как результата сложения нормальных колебаний

18. Закрепите один из маятников в стартовом устройстве, а второй оставьте в положении равновесия, в котором в силу малой жесткости пружин стержень маятника почти не отклоняетсяот вертикали.
19. Запустите измерения, нажав кнопку  в главном меню программы. На вопрос «Очистить таблицу накопленных данных?» ответьте «Нет».
20. Отпустите маятник, резко повернув стартовое устройство. На экране появится зависимость угловой скорости обоих маятников от времени. Сигналы датчиков будут представлять собой синусоиды с пульсирующей амплитудой (рис. 5, ось X сжата в 3 раза по сравнению с экспериментом).

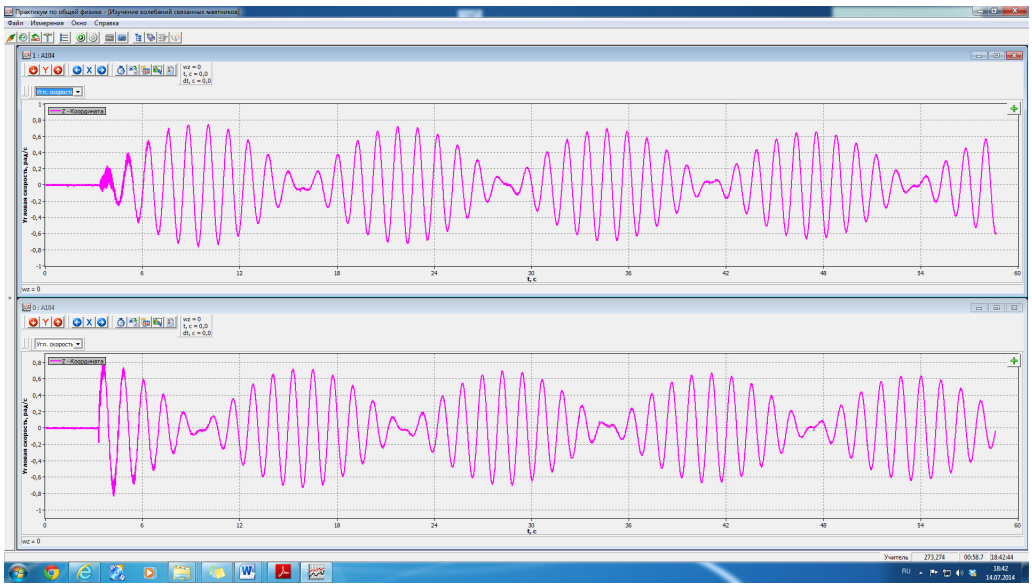


Рис. 5

21. Остановите измерения, нажав кнопку  после записи нескольких полных периодов биений (80 – 100с после начала колебаний).
22. Измерьте интервалы времени и рассчитайте в таблице период и частоту «быстрого» движения маятников. Для проведения измерений рекомендуется взять интервалы времени, за которые происходит 6-7 колебаний наибольшей амплитуды каждого из маятников.
23. Для измерения периода биений выберите на записи две точки, которые отстоят друг от друга на один период. В записи частоты колебаний имеются горизонтальные участки с близким к нулю значением частоты, которые разделяют полупериоды биений. Эти участки хорошо видны на осциллограмме, но на них трудно установить маркеры с необходимой точностью. Для установки маркеров следует использовать точки

пересечения графика с нулевой линией. Поэтому рекомендуется отступить от горизонтального участка, например, на один период быстрого движения маятника и поставить маркеры на пересечение графика с нулевой линией так, как это делалось в п. 7, 8.

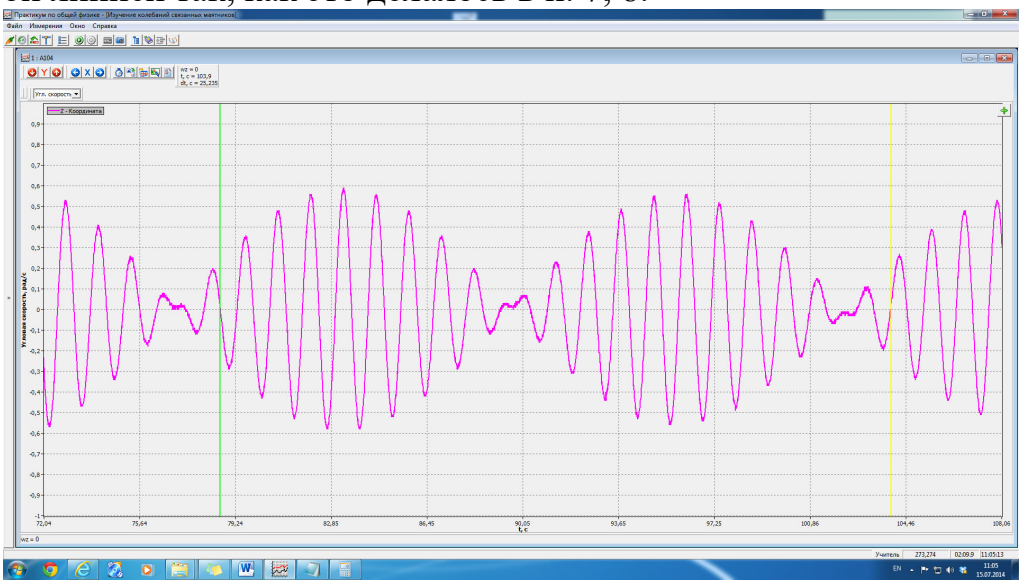


Рис. 6

24. Полученное значение времени внесите в таблицу, где будет рассчитана частота биений, и повторите измерение периода биений на записи колебаний второго маятника.
25. Сопоставьте разность фаз колебаний двух маятников при наличии биений (см. п. 15).
26. Сохраните результаты, собранные в таблице, в виде текстового файла() или в виде рисунка ().

5. Обработка результатов измерений

27. Сравните частоту биений и частоту колебаний системы в процессе биений со значениями, рассчитанными на основе частот нормальных колебаний (выражения 9, 11). Значения частот, полученные из анализа разных кривых (разных маятников) для одного и того же типа колебаний следует усреднить.
28. Повторите действия, описанные в пунктах 11-26, изменив параметры связанной колебательной системы (например, уменьшив в два раза расстояния от осей маятников до фиксаторов пружин). При первом запуске измерений для каждой новой колебательной системы согласитесь с предложением программы очистить таблицу накопленных данных.
29. Сделайте выводы.

6. Факультативно

30. Исследуйте зависимость частоты свободных колебаний связанных маятников от начальных условий.
31. Исследуйте зависимость «интенсивности биений» - отношения максимальной и минимальной амплитуды свободных колебаний связанных маятников от начальных условий.
32. Измерьте резонансную кривую связанных маятников (необходим источник вынуждающей силы(в комплект не входит)). Убедитесь в наличии двух максимумов.
33. Измерьте декремент и коэффициент затухания маятников.

7. Указания по технике безопасности

1. Перед выполнением работы получите инструктаж у лаборанта.
2. Соблюдайте общие правила техники безопасности работы в лаборатории "Физика".
3. К работе с установкой допускаются лица, ознакомленные с её устройством и принципом действия.
4. Не допускается создавать помехи движению маятников.
5. Не допускается никаких механических воздействий на гибкие кабели, идущие от датчиков угловой скорости.
6. Запрещается вскрывать датчики, а также подвергать элементы установки ударным и силовым нагрузкам.

8. Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются гармоническими?
2. Записать уравнение динамики для собственных колебаний математического маятника.
3. От чего зависит период собственных колебаний системы (математического маятника)?
4. Какие системы называются связанными?
5. Какие колебания называются парциальными?
6. Какие колебания называются нормальными?
7. Сколько нормальных частот имеет связанная система?
8. Показать, что при произвольном способе возбуждения колебаний связанной системы возникают биения.
9. Какие особенности имеет резонансная кривая системы двух связанных маятников?
10. Опишите порядок выполнения работы.

Список литературы

1. Савельев И. В. Курс общей физики: Кн. 1. Механика: Учебное пособие для втузов. – М.: ООО «Издательство Астрель», 2002. – 336 с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учебное пособие для вузов.В 5 т. Т. 1 Механика. – 5-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ.
3. Детлаф А. А., Яворский Б. М. Курс физики: Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 718 с.
4. Трофимова Т. И. Курс физики: Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1999. – 542 с.
5. Курс физики. Учебник для вузов. Т. 1 / Под ред. Лазовского В. Н. – СПб.: Изд-во «Лань», 2001. – 376 с.