Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Вычислительная математика и математическая физика»

Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, Д.О. Яковлев

РАСЧЕТ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН НА ОСНОВЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОСРЕДНЕНИЯ

Электронное учебное издание

Методические указания к выполнению курсовой работы по дисциплине «Методы решения задач МДТТ»

Москва
(С) 2013 МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

УДК 539.3
ББК
Д

Рецензент проф., д.т.н. Н.И. Сидняев

Димитриенко Ю.И.

Д Расчет многослойных пластин на основе асимптотической теории осреднения: Методические указания к выполнению курсовой работы по дисциплине «Методы решения задач МДТТ/ Ю.И.Димитриенко, Е.А. Губарева, Д.О.Яковлев. - М.:Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2013.-27 с.

В методических указаниях изложена новая теория тонких многослойных анизотропных упругих пластин, которая построена из уравнений общей трехмерной теории упругости путем введения асимптотических разложений по малому параметру, введенному как отношение толщины к характерной длине, без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине. Теория позволяет вычислить все 6 компонент тензора напряжений, включая поперечные нормальные напряжений и напряжения межслойного сдвига. Приведен пример решения задачи об изгибе многослойной пластины, а также предложены домашние задания для расчета многослойных пластин и балок по асимптотической теории.

Для студентов направления подготовки "Математика и компьютерные науки", специальности "Прикладная математика", а также студентов широкого круга машиностроительных специальностей, изучающих дисциплины "Механика деформируемого твердого тела", "Механика композиционных материалов", "Теория пластин и оболочек".

Рекомендовано Учебно-методической комиссией НУК «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана

Электронное учебное издание

Димитриенко Юрий Иванович

Губарева Елена Александровна

Яковлев Дмитрий Олегович

РАСЧЕТ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН НА ОСНОВЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОСРЕДНЕНИЯ:

© 2013 МГТУ имени Н.Э. Баумана

Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана

Оглавление

Введение..... **4**

1. Цели и задачи методических указаний..... **5**

2. Теоретические основы для выполнения курсовой работы: основы асимптотической теории многослойных пластин..... **6**

3. Пример и порядок выполнения курсовой работы: задача об изгибе многослойной симметричной пластины **14**

4.Задания для самостоятельной работы..... **22**

5. Порядок выполнения и защиты домашнего задания..... **25**

6. Вопросы для самоконтроля..... **26**

7. Литература..... **26**

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на появление в последнее время мощных вычислительных средств, позволяющих решать задачи теории упругости в общей 3-х мерной постановке для конструкций сложной формы, интерес к решению задач в двумерной постановке (для пластин и оболочек) не пропадает. Очевидные преимущества двумерных постановок – снижение размерности задачи, отсутствие необходимости детального построения конечно-элементных сеток по толщиной координате для достижения приемлемой точности расчета напряжений, сохраняются и в настоящее время, и, по-видимому, будут актуальны еще достаточно долго. В этой связи попытки модификации классических теорий пластин и оболочек, направленные на получение уточненных алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния тонких тел, продолжают быть востребованными. Таких модификаций, как известно, предложено достаточно много, не претендуя на полноту списка, отметим лишь некоторые исследования в этой области [1-9]. Сравнительно недавно [2-3] появились работы, в которых предложены теории тонких пластин и оболочек с двумерной микроструктурой – сотовыми, сетчатыми конструкциями, используя для этого метод асимптотического осреднения (метод гомогенизации - МГ), хорошо зарекомендовавший себя при осреднении композитов с 3-х мерной периодической структурой [10-14]. Применение МГ для двумерных структур вызывает определенные сложности и не является частным случаем общей 3-х мерной задачи осреднения, поскольку двумерные пластины и оболочки сохраняют «третью» координату, но не обладают по ней периодической структурой. В работах [2-3] был предложен вариант МГ для тонких пластин, в котором использовалось допущение о линейном характере распределения по толщине главных членов асимптотического ряда для перемещений, что позволило получить систему уравнений типа Кирхгофа-Лява. Было установлено, что для многослойных пластин линейное такое распределение отсутствует, а имеет место аналог гипотезы ломаной линии, используемой в теории Григолюка-Куликова [1]. Разработанный метод позволяет вычислить все 6 компонент тензора напряжений в пластине, решая при этом серию двумерных задач. Приведен пример решения задачи об изгибе многослойной пластины, приведены задания для самостоятельного решения данной задачи при различных случаях нагружения.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ МЕТОДИЧЕСКИХ УКАЗАНИЙ

Целью данных методических указаний является ознакомление студентов с моделью многослойных пластин, основанной на асимптотической теории осреднения уравнений трехмерной теории упругости и формирование навыков работы с этой моделью при проведении инженерных расчетов многослойных конструкций, а также умения использовать асимптотическую теорию при разработке сложных моделей деформируемых твердых сред для тонкостенных конструкций.

Задачи настоящих методических указаний - формирование у студентов
умения:

−формулировки основных положений теории многослойных упругих пластин;

−применять математические методы осреднения полных уравнений теории упругости для задач деформирования балок, стержней, пластин, оболочек, в частности для задач изгиба пластин;

владения:

−навыками применения основных математических моделей механики деформируемых твердых тел при решении практических задач,

−навыками разработки программных кодов для самостоятельной реализации численных алгоритмов решения задач механики деформируемых тел;

−навыками использования компьютерных технологий для математического моделирования полей напряжений, деформаций, перемещений с помощью пакетов прикладных программ типа ANSYS.

Методические указания разработаны для выполнения курсовых работ по дисциплине "Методы решения задач МДТТ" для студентов направления подготовки "Математика и компьютерные науки", специальности "Прикладная математика", а также могут быть использованы для изучения студентами широкого круга машиностроительных специальностей, изучающих дисциплины "Механика деформируемого твердого тела", "Механика композиционных материалов", "Теория пластин и оболочек".

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВЫХ РАБОТ - ОСНОВЫ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

2.1 Основные допущения асимптотической теории

Рассмотрим многослойную пластину (рис.1) постоянной толщины, введем малый параметр $\kappa = h/L << 1$, как отношение общей толщины пластины h к характерному размеру всей пластины L (например, к ее максимальной длине). Введем также глобальные x_k и локальную ξ координаты:

$$x_k = \tilde{x}_k / L \qquad \xi = x_3/\kappa\ , \quad k=1,2,3, \tag{1}$$

где $\tilde{x}_k$ - обычные декартовы координаты, ориентированные таким образом, что ось $O\tilde{x}_3$ направлена по нормали к внешней и внутренней плоскостям пластины, а оси $O\tilde{x}_1$ $O\tilde{x}_2$ принадлежат срединной поверхности пластины. Полагаем, что существует 2 масштаба изменения перемещений u_k: один по направлениям $O\tilde{x}_1$ $O\tilde{x}_2$, а второй по направлению $O\tilde{x}_3$. Координаты x_3 и ξ, как обычно, в методе асимптотического осреднения рассматриваются как независимые переменные. Координата ξ по толщине пластины изменяется в диапазоне $-0.5 < \xi_3 < 0.5$.

Рассмотрим для пластины 3-х мерную задачу линейной теории упругости [15]

$$\begin{gathered}
\nabla_j \sigma_{ij} = 0 \\
\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j\right) \\
\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \\
\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3} = -\kappa^3 p_\pm \delta_{i3}, \qquad \Sigma_T : u_i = u_{ei}, \qquad \Sigma_S : [\sigma_{i3}] = 0, \quad [u_3] = 0,
\end{gathered} \tag{2}$$

состоящую из уравнений равновесия, соотношений Коши, обобщенного закона Гука, граничных условий на внешних поверхностях пластины оболочки – на внешней и внутренней поверхности $\Sigma_{3\pm}$ (их уравнение имеет вид $\tilde{x}_3 = \pm h/2$) и на торцевой поверхности Σ_T, а также граничных условий на поверхности контакта Σ_S слоев пластины ($[u_i]$ - скачок функций), которые могут и отсутствовать, например, для однослойной пластины.

Принимаем основное допущение, состоящее в том, что давление $\tilde{p}_\pm$ на внешней и внутренней поверхностях пластины имеет порядок малости $O(\kappa^3)$ (т.е. $\tilde{p}_\pm = \kappa^3 p_\pm$) - это

допущение, как правило, соответствует реальным условиям нагружения тонких пластин. В уравнениях (2) обозначены σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, ε_{ij} - компоненты тензора деформаций, u_j - компоненты вектора перемещений, $\nabla_j = \partial / \partial \tilde{x}_j$ - оператор дифференцирования по декартовым координатам, $C_{ijkl}(\xi)$ - компоненты тензора модулей упругости, который полагается зависящим от координаты $\xi_3 = \xi$, так как этот тензор различен для разных слоев пластины. Никакого специального допущения об анизотропии материалов слоев пока не делаем, т.е. тензоры модулей упругости имеют по 21 независимой компоненте [16].

1.2 Асимптотические разложения для многослойной пластины

Задача (2) содержит локальную координату ξ, а также малый параметр κ в граничных условиях (это коэффициент при давлении), поэтому ее решение будем искать в виде асимптотических разложений по параметру κ в виде функций, зависящих от глобальных и локальной координат:

$$u_k = u_k^{(0)}(x_I) + \kappa u_k^{(1)}(x_I, \xi) + \kappa^2 u_k^{(2)}(x_I, \xi) + \kappa^3 u_k^{(3)}(x_I, \xi) + \ldots \qquad (3)$$

Здесь и далее индексы, обозначенные заглавными буквами I, J, K, L принимают значения 1,2, а индексы i, j, k, l - значения 1,2,3.

Подставим разложения (3) в соотношения Коши в системе (2), при этом используем правила дифференцирования функций локальных координат [10-13] ($\partial / \partial \tilde{x}_j \to \partial / \partial x_j + (1/\kappa)\delta_{j3} \partial / \partial \xi$), тогда получим асимптотические разложения для деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \kappa \varepsilon_{ij}^{(1)} + \kappa^2 \varepsilon_{ij}^{(2)} + \ldots \qquad (4)$$

где

$$\varepsilon_{IJ}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)}),\ \varepsilon_{I3}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(0)} + u_{I/3}^{(1)}),\quad \varepsilon_{33}^{(0)} = u_{3/3}^{(1)},$$

$$\varepsilon_{IJ}^{(1)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(1)} + u_{J,I}^{(1)}),\ \varepsilon_{I3}^{(1)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(1)} + u_{I/3}^{(2)}),\quad \varepsilon_{33}^{(1)} = u_{3/3}^{(2)}, \qquad (5)$$

$$\varepsilon_{IJ}^{(2)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(2)} + u_{J,I}^{(2)}),\ \varepsilon_{I3}^{(2)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(2)} + u_{I/3}^{(3)}),\quad \varepsilon_{33}^{(2)} = u_{3/3}^{(3)},\ \text{и.т.д.}$$

здесь обозначены производные по локальной координате $u_{i/3}^{(1)} = \partial u_i^{(1)} / \partial \xi$ и по глобальным координатам $u_{i,j}^{(1)} = \partial u_i^{(1)} / \partial x_j$.

Подставляя выражение (4) в закон Гука в системе (2), получаем асимптотическое разложения для напряжений

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \kappa\sigma_{ij}^{(1)} + \kappa^2\sigma_{ij}^{(2)} + \dots, \qquad (6)$$

где

$$\begin{aligned}
&\sigma_{IJ}^{(0)} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{IJk3}\varepsilon_{k3}^{(0)}, \quad \sigma_{i3}^{(0)} = C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(0)}, \\
&\sigma_{IJ}^{(1)} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(1)} + C_{IJk3}\varepsilon_{k3}^{(1)}, \quad \sigma_{i3}^{(1)} = C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(1)} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(1)}, \qquad (7) \\
&\sigma_{IJ}^{(2)} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(2)} + C_{IJk3}\varepsilon_{k3}^{(2)}, \quad \sigma_{i3}^{(2)} = C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(2)} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(2)}, \text{ и т.д.}
\end{aligned}$$

1.3 Формулировка локальных задач

Подставляя разложения (3),(4), (6) в уравнения равновесия и граничные условия системы (2), получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\kappa}\sigma_{i3/3}^{(0)} + (\sigma_{iJ,J}^{(0)} + \sigma_{i3/3}^{(1)}) + \kappa(\sigma_{iJ,J}^{(1)} + \sigma_{i3/3}^{(2)}) + \kappa^2(\sigma_{iJ,J}^{(2)} + \sigma_{i3/3}^{(3)}) + \dots = 0, \\
&\Sigma_{3\pm}: \sigma_{i3}^{(0)} + \kappa\sigma_{i3}^{(1)} + \kappa^2\sigma_{i3}^{(2)} + \dots = -\kappa^3 p_{\pm}\delta_{i3}, \qquad (8) \\
&\Sigma_T: u_i = u_i^{(0)} + \kappa u_i^{(1)} + \kappa^2 u_i^{(2)} + \kappa^3 u_i^{(3)} + \dots = u_{ei}.
\end{aligned}$$

Приравнивая в уравнениях равновесия члены при κ^{-1} к нулю, а при остальных степенях от κ к некоторым величинам $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$, не зависящим от ξ_l, получим рекуррентную последовательность локальных задач. Задача для нулевого приближения имеет вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_{i3/3}^{(0)} = 0, \\
&\sigma_{i3}^{(0)} = C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(0)}, \\
&\varepsilon_{IJ}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)}), \qquad \varepsilon_{I3}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(0)} + u_{I/3}^{(1)}), \qquad \varepsilon_{33}^{(0)} = u_{3/3}^{(1)}, \qquad (9) \\
&\Sigma_{3\pm}: \sigma_{i3}^{(0)} = 0; \qquad \Sigma_S: [\sigma_{i3}^{(0)}] = 0, \quad [u_i^{(1)}] = 0, \quad < u_i^{(1)} > = 0;
\end{aligned}$$

для первого приближения

$$\begin{aligned}
&\sigma_{i3/3}^{(1)} + \sigma_{iJ,J}^{(0)} = h_i^{(0)}, \\
&\sigma_{i3}^{(1)} = C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(1)} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(1)}, \\
&\varepsilon_{IJ}^{(1)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(1)} + u_{J,I}^{(1)}), \qquad \varepsilon_{I3}^{(1)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(1)} + u_{I/3}^{(2)}), \qquad \varepsilon_{33}^{(1)} = u_{3/3}^{(2)}, \qquad (10) \\
&\Sigma_{3\pm}: \sigma_{i3}^{(1)} = 0; \qquad \Sigma_S: [\sigma_{i3}^{(1)}] = 0, \quad [u_i^{(2)}] = 0, \qquad < u_i^{(2)} > = 0;
\end{aligned}$$

для второго приближения

$$\sigma^{(2)}_{i3/3}+\sigma^{(1)}_{iJ,J}=h^{(1)}_i,$$
$$\sigma^{(2)}_{i3}=C_{i3KL}\varepsilon^{(2)}_{KL}+C_{i3k3}\varepsilon^{(2)}_{k3},$$
$$\varepsilon^{(2)}_{IJ}=\frac{1}{2}(u^{(2)}_{I,J}+u^{(2)}_{J,I}),\qquad \varepsilon^{(2)}_{I3}=\frac{1}{2}(u^{(2)}_{3,I}+u^{(3)}_{I/3}),\qquad \varepsilon^{(2)}_{33}=u^{(3)}_{3/3},\tag{11}$$
$$\Sigma_{3\pm}:\sigma^{(2)}_{i3}=0;\qquad \Sigma_S:[\sigma^{(2)}_{i3}]=0,\quad [u^{(3)}_i]=0,\qquad <u^{(3)}_i>=0;$$

для третьего приближения

$$\sigma^{(3)}_{i3/3}+\sigma^{(2)}_{iJ,J}=h^{(2)}_i,$$
$$\sigma^{(3)}_{i3}=C_{i3KL}\varepsilon^{(3)}_{KL}+C_{i3k3}\varepsilon^{(3)}_{k3},$$
$$\varepsilon^{(3)}_{IJ}=\frac{1}{2}(u^{(3)}_{I,J}+u^{(2)}_{J,I}),\qquad \varepsilon^{(3)}_{I3}=\frac{1}{2}(u^{(3)}_{3,I}+u^{(4)}_{I/3}),\qquad \varepsilon^{(3)}_{33}=u^{(4)}_{3/3},\tag{12}$$
$$\Sigma_{3\pm}:\sigma^{(3)}_{i3}=-p_{\pm}\delta_{i3};\qquad \Sigma_S:[\sigma^{(3)}_{i3}]=0,\quad [u^{(4)}_i]=0,\qquad <u^{(4)}_i>=0;$$

и т.д. Здесь обозначена операция осреднения по толщине пластины

$$<u^{(1)}_i>=\int_{-0.5}^{0.5}u^{(3)}_i d\xi\,.\tag{13}$$

Уравнения равновесия (8) после введения функций $h^{(0)}_i, h^{(1)}_i, h^{(2)}_i$, принимают вид

$$h^{(0)}_i+\kappa h^{(1)}_i+\kappa^2 h^{(2)}_i+...=0\,.\tag{14}$$

Решением локальной задачи нулевого приближения (9) – являются функции $u^{(1)}_j, \varepsilon^{(0)}_{kl}, \sigma^{(0)}_{ij}$, они зависят от локальных координат ξ_l и входных данных этой задачи – перемещений $u^{(0)}_j(x_J)$. Решением задачи (10) являются функции $u^{(2)}_j, \varepsilon^{(1)}_{kl}, \sigma^{(1)}_{ij}$, а $u^{(1)}_j, \sigma^{(0)}_{ij}$ в этой задаче – входные данные. В задаче (11) функции $u^{(3)}_j, \varepsilon^{(2)}_{kl}, \sigma^{(2)}_{ij}$ - неизвестные, а $u^{(2)}_j, \varepsilon^{(1)}_{kl}, \sigma^{(1)}_{ij}$ - входные данные и т.д.

1.4 Решение задачи нулевого приближения.

Ввиду того, что задачи (9)-(11) являются одномерными по локальной переменной ξ, их решение можно найти аналитически. Решение уравнений равновесия с граничными условиями в локальной задаче (9) имеет вид

$$\sigma^{(0)}_{i3}=0,\qquad \forall\xi:-0.5<\xi<0.5\,.\tag{15}$$

Подставляя сюда выражение (7) для $\sigma^{(0)}_{i3}$, получим

$$C_{i3KL}\varepsilon^{(0)}_{KL}+C_{i3k3}\varepsilon^{(0)}_{k3}=0\,.\tag{17}$$

Выразим из этой системы уравнений деформации $\varepsilon^{(0)}_{k3}$

$$\varepsilon^{(0)}_{k3}=-C^{-1}_{k3i3}C_{i3KL}\varepsilon^{(0)}_{KL},\tag{18}$$

где C^{-1}_{i3k3} матрица компонент, обратная к C_{i3k3}. Подставляя в (16) выражения для деформаций $\varepsilon^{(0)}_{k3}$ из задачи (9), после интегрирования с учетом условий $<u^{(1)}_i>=0$, находим перемещения $u^{(1)}_i$

$$u^{(1)}_I = -\xi u^{(0)}_{3,I} + 2\varepsilon^{(0)}_{KL}(< \int_{-0.5}^{\xi} C^{-1}_{I3i3}C_{i3KL}d\xi > - \int_{-0.5}^{\xi} C^{-1}_{I3i3}C_{i3KL}d\xi),$$

$$u^{(1)}_3 = \varepsilon^{(0)}_{KL}(< \int_{-0.5}^{\xi} C^{-1}_{33i3}C_{i3KL}d\xi > - \int_{-0.5}^{\xi} C^{-1}_{33i3}C_{i3KL}d\xi), \qquad (19)$$

здесь учтено, что деформации $\varepsilon^{(0)}_{KL}(x_J)$, согласно (9), не зависят от ξ.

Подставляя выражение (18) в первую группу соотношений (7), находим, что напряжения $\sigma^{(0)}_{IJ}$, в отличие от $\sigma^{(0)}_{i3}$, являются ненулевыми

$$\sigma^{(0)}_{IJ} = C^{(0)}_{IJKL}\varepsilon^{(0)}_{KL}, \qquad (20)$$

$$C^{(0)}_{IJKL} = C_{IJKL} - C_{IJk3}C^{-1}_{k3i3}C_{i3KL}. \qquad (21)$$

1.5 Решение задачи первого, второго и третьего приближений

Решение уравнений равновесия в системах (10), (11) и (12) вместе с граничными условиями на Σ_S и $\xi = -0.5$ имеет вид

$$\sigma^{(1)}_{i3} = -\int_{-0.5}^{\xi} \sigma^{(0)}_{iJ,J}d\xi + h^{(0)}_i(\xi + 0.5), \qquad (22)$$

$$\sigma^{(2)}_{i3} = -\int_{-0.5}^{\xi} \sigma^{(1)}_{iJ,J}d\xi + h^{(1)}_i(\xi + 0.5), \qquad (23)$$

$$\sigma^{(3)}_{i3} = -p_-\delta_{i3} - \int_{-0.5}^{\xi} \sigma^{(2)}_{iJ,J}d\xi + h^{(2)}_i(\xi + 0.5). \qquad (24)$$

Условия существования решения (22)-(24) задач (10)-(12), удовлетворяющих граничным условиям $\sigma^{(1)}_{i3} = 0$, $\sigma^{(2)}_{i3} = 0$, $\sigma^{(1)}_{i3} = -p_+$ на внешней поверхности $\xi = 0.5$, приводят к следующей системе уравнений для вычисления функций $h^{(0)}_i, h^{(1)}_i, h^{(2)}_i$

$$h^{(0)}_i = <\sigma^{(0)}_{iJ,J}>, \qquad (25)$$

$$h^{(1)}_i = <\sigma^{(1)}_{iJ,J}>, \qquad (26)$$

$$h^{(2)}_i = <\sigma^{(2)}_{iJ,J}> - \Delta p\delta_{i3}, \quad \Delta p = p_+ - p_-. \qquad (27)$$

С учетом формул (25)-(27), напряжения $\sigma^{(m)}_{i3}$ (22)-(24) принимают вид

$$\sigma_{i3}^{(1)} = \int_{-0.5}^{\xi} (< \sigma_{iJ,J}^{(0)} > - \sigma_{iJ,J}^{(0)}) d\xi , \qquad (28)$$

$$\sigma_{i3}^{(2)} = \int_{-0.5}^{\xi} (< \sigma_{iJ,J}^{(1)} > - \sigma_{iJ,J}^{(1)}) d\xi , \qquad (29)$$

$$\sigma_{i3}^{(3)} = -(p_{-} + \Delta p(\xi + 0.5))\delta_{i3} + \int_{-0.5}^{\xi} (< \sigma_{iJ,J}^{(2)} > - \sigma_{iJ,J}^{(2)}) d\xi . \qquad (30)$$

Если подставить выражения (20) в (28), то получим для напряжений $\sigma_{i3}^{(1)}$ следующую формулу

$$\sigma_{I3}^{(1)} = \varepsilon_{KL,J}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (< C_{IJKL}^{(0)} > - C_{IJKL}^{(0)}) d\xi , \qquad \sigma_{33}^{(1)} = 0 . \qquad (31)$$

Выразим деформации $\varepsilon_{k3}^{(1)}$ из 4-й группы соотношений (7), тогда с учетом формул (28), получим

$$\varepsilon_{k3}^{(1)} = -C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)} - \varepsilon_{KL,J}^{(0)} C_{k3I3}^{-1} \int_{-0.5}^{\xi} (< C_{IJKL}^{(0)} > - C_{IJKL}^{(0)}) d\xi . \qquad (32)$$

Если подставить теперь (32) в 3-ю группу соотношений (7), то найдем оставшиеся напряжения 1-го приближения

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(1)} + N_{IJKLM}^{(0)} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} , \qquad (33)$$

$$N_{IJKLM}^{(0)} = -C_{IJk3} C_{k3P3}^{-1} \int_{-0.5}^{\xi} (< C_{PMKL}^{(0)} > - C_{PMKL}^{(0)}) d\xi .$$

Деформации $\varepsilon_{KL}^{(1)}$ с учетом формул (10), (19) можно представить в виде

$$\varepsilon_{KL}^{(1)} = \xi \eta_{KL} + \Phi_{KLMNS} \varepsilon_{MN,S}^{(0)} , \qquad (34)$$

$$\eta_{KL} = -u_{3,KL}^{(0)} , \qquad \Phi_{KLMNS}(\xi) = \tilde{\Phi}_{KLMNS}(\xi) - < \tilde{\Phi}_{KLMNS}(\xi) > , \qquad (35)$$

$$\tilde{\Phi}_{KLMNS}(\xi) = -\int_{-0.5}^{\xi} (C_{K3i3}^{-1} \delta_{SL} + C_{L3i3}^{-1} \delta_{SK}) C_{i3MN} d\xi . \qquad (36)$$

С учетом формул (34), выражения (33) принимают вид

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = \xi C_{IJKL}^{(0)} \eta_{KL} + \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} , \qquad (37)$$

$$\tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} = N_{IJKLM}^{(0)} + \Phi_{IJKLM} .$$

1.6 Осредненные уравнения равновесия многослойных пластин

Подставляя выражения (25)-(26) в асимптотическое разложение (14) уравнений равновесия, получим

$$< \sigma_{iJ,J}^{(0)} > + \kappa < \sigma_{iJ,J}^{(1)} > + \kappa^2 (< \sigma_{iJ,J}^{(2)} > - \Delta p \delta_{i3}) + ... = 0 . \qquad (38)$$

Домножим уравнения равновесия системы (8) на $\xi\kappa$ и проинтегрируем их по толщине, тогда получим следующее вспомогательное уравнение

$$\kappa(< \xi\sigma_{IJ,J}^{(0)} > - < \sigma_{I3}^{(1)} >) + \kappa^2 (< \xi\sigma_{IJ,J}^{(1)} > - < \sigma_{I3}^{(2)} >) + ... = 0 , \qquad (39)$$

Здесь учтено, что $< \xi\sigma_{i3/3}^{(1)} > = - < \sigma_{i3}^{(1)} >$, $< \xi\sigma_{i3/3}^{(2)} > = - < \sigma_{i3}^{(2)} >$.

Введем обозначения для усилий T_{IJ}, моментов M_{IJ} и перерезывающих сил Q_I в пластине

$$\begin{aligned} T_{IJ} &= < \sigma_{IJ}^{(0)} > + \kappa < \sigma_{IJ}^{(1)} > + ..., \\ Q_I &= \kappa < \sigma_{I3}^{(1)} > + \kappa^2 < \sigma_{I3}^{(2)} > + ..., \qquad (40) \\ M_{IJ} &= \kappa < \xi\sigma_{IJ}^{(0)} > + \kappa^2 < \xi\sigma_{IJ}^{(1)} > + ... \end{aligned}$$

Тогда уравнения (38)-(39) можно записать в традиционном виде уравнений равновесия и уравнений моментов

$$T_{IJ,J} = 0 , \qquad Q_{J,J} = \Delta\bar{p} , \qquad M_{IJ,J} - Q_I = 0, \qquad (41)$$

Это и есть искомые осредненные уравнения равновесия многослойной пластины, здесь обозначено $\Delta\bar{p} = \kappa^2 \Delta p$.

1.7 Осредненные определяющие соотношения теории пластин

Подставляя выражения (20), (32) для напряжений $\sigma_{IJ}^{(0)}, \sigma_{IJ}^{(1)}$ в интегралы формул (40), получим

$$T_{IJ} = \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + B_{IJKL} \eta_{KL} + K_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} , \qquad (42)$$

$$M_{IJ} = B_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + D_{IJKL} \eta_{KL} + \bar{K}_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} , \qquad (43)$$

$$Q_I = K_{IJKL} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \kappa^2 < \sigma_{I3}^{(2)} > , \qquad (44)$$

где обозначены тензоры осредненных упругих констант пластины

$$\bar{C}_{IJKL} = < C_{IJKL}^{(0)} > = < C_{IJKL} > - < C_{IJk3} C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL} > , \qquad (45)$$

$$B_{IJKL} = \kappa < \xi C_{IJKL}^{(0)} > , \qquad K_{IJKLM} = \kappa < \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} > , \; K_{IJKL} = \kappa < \int_{-0.5}^{\xi} (< C_{IJKL}^{(0)} > - C_{IJKL}^{(0)}) d\xi > ,$$

$$D_{IJKL} = \kappa^2 < \xi^2 C_{IJKL}^{(0)} > , \qquad \bar{K}_{IJKLM} = \kappa^2 < \xi \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} > .$$

В частном случае, когда слои пластины расположены симметрично относительно плоскости $\xi = 0$, часть тензоров (45) являются нулевыми

$$B_{IJKL}=0, \qquad K_{IJKLM}=0, \tag{46}$$

и определяющие соотношения (42)-(44) принимают такой же вид, как и в классической теории пластин Кирхгофа-Лява и Тимошенко [15]

$$T_{IJ}=\bar{C}_{IJKL}\varepsilon^{(0)}_{KL}, \quad M_{IJ}=D_{IJKL}\eta_{KL}. \tag{47}$$

1.8 Осредненные кинематические соотношения теории пластин

В систему осредненных определяющих соотношений (42)-(44) входят деформации срединной поверхности $\varepsilon^{(0)}_{KL}$, кривизны η_{KL} и градиенты деформаций $\varepsilon^{(0)}_{KL,N}$, которые зависят от 3 функций $u^{(0)}_I$, $u^{(0)}_3$ глобальных переменных x_I,

$$\varepsilon^{(0)}_{IJ}=\frac{1}{2}(u^{(0)}_{I,J}+u^{(0)}_{J,I}), \qquad \eta_{KL}=-u^{(0)}_{3,KL}. \tag{48}$$

1.9 Осредненная система уравнений для многослойных пластин

Подставляя далее выражения (42)-(44) и (48) в систему (41), получаем систему относительно 3 неизвестных функций $u^{(0)}_I$, $u^{(0)}_3$

$$\bar{C}_{IJKL}u^{(0)}_{K,LJ}+B_{IJKL}u^{(0)}_{3,KLJ}+K_{IJKLM}u^{(0)}_{K,LMJ}=0,$$

$$B_{IJKL}u^{(0)}_{K,LJI}+D_{IJKL}u^{(0)}_{3,KLJI}+\bar{K}_{IJKLM}u^{(0)}_{K,LMJI}=\Delta\bar{p}. \tag{49}$$

Эта система имеет четвертый порядок относительно прогиба $u^{(0)}_3$, как в классической теории пластин Кирхгофа-Лява, и третий порядок производных относительно продольных перемещений $u^{(0)}_I$, чем отличается от теории Кирхгофа-Лява. Разработанная теория многослойных пластин близка по характеру распределения перемещений по толщине к теории ломаной нормали Э.И.Григолюка [1], поскольку перемещения согласно (1) и (17) с точностью до членов 1-го порядка малости имеют вид (17).

Нелинейная зависимость перемещений u_k от ξ обусловлена различием модулей упругости для разных слоев пластины.

1.10 Напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения в пластине

После того как решена осредненная задача (49), и найдены функции $u^{(0)}_I$, $u^{(0)}_3$, вычисляем деформации (48), а затем напряжения $\sigma^{(0)}_{IJ}$ по формулам (20). Сдвиговые напряжения $\sigma^{(0)}_{I3}$ и поперечное напряжение $\sigma^{(0)}_{33}$, как было установлено, в пластине тождественно равны нулю. Ненулевые значения сдвиговых напряжений появляются у следующего члена

асимптотического разложения - $\sigma_{I3}^{(1)}$, согласно (31). Для поперечного напряжения первое в асимптотическом ряду ненулевое значение – это значение $\sigma_{33}^{(0)}$, которое вычисляется согласно (27), (28):

$$\sigma_{33} = -\kappa^2 \int_{-0.5}^{\xi} (<\sigma_{3J,J}^{(1)}> - \sigma_{3J,J}^{(1)}) d\xi + \kappa^3 (-p_- - \Delta p(\xi + 0.5) + \int_{-0.5}^{\xi} (<\sigma_{3J,J}^{(2)}> - \sigma_{3J,J}^{(2)}) d\xi) \text{ , (50)}$$

$$\sigma_{I3} = \int_{-0.5}^{\xi} (<\sigma_{IJ,J}^{(0)}> - \sigma_{IJ,J}^{(0)}) d\xi + \kappa \int_{-0.5}^{\xi} (<\sigma_{IJ,J}^{(1)}> - \sigma_{IJ,J}^{(1)}) d\xi \ . \qquad (51)$$

Таким образом, разработанная теория тонких пластин позволяет найти все шесть компонент тензора напряжений.

3. ПРИМЕР И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ: ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ МНОГОСЛОЙНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ ПЛАСТИНЫ

3.1 Постановка осредненной задачи

Рассмотрим в качестве примера классическую задачу об изгибе многослойной пластины прямоугольной формы под действием равномерно распределенного давления. Слои пластины расположены симметрично относительно плоскости $\xi = 0$, поэтому имеют место соотношения (46). В этом случае

$$u_I^{(0)} = 0, \varepsilon_{KL}^{(0)} = 0, \ T_{IJ} = 0, \ \sigma_{IJ}^{(0)} = 0, \ \sigma_{I3}^{(1)} = 0, \qquad (52)$$

и ненулевыми неизвестными функциями являются только

$$u_3^{(0)}(x), \ M_{11}(x), \ Q_1(x), \qquad (53)$$

здесь $x = x_1$ - безразмерная продольная координата пластины. Тождественно ненулевые уравнения равновесия (41), определяющие соотношения (43) и кинематические соотношения (48) принимают вид

$$M_{11,11} = \Delta\overline{p}, \qquad M_{11} = D_{1111}\eta_{11}, \qquad \eta_{11} = -u_{3,11}^{(0)}. \qquad (54)$$

3.2. Общий вид решения задачи изгиба пластины

Будем считать, что $\Delta\bar{p}(x)=\Delta\bar{p}_0 f(x)$ - перепад давления является в общем случае функцией координаты *x*, тогда, интегрируя первое уравнение в (54), получаем

$$M_{11}=M_{11}^0+Q_1^0 x+\int_0^x\int_0^{x'}\Delta\bar{p}(x'')dx''dx', \qquad (55)$$

$$Q_1=Q_1^0+\int_0^{x'}\Delta\bar{p}(x')dx',$$

где M_{11}^0, Q_1^0 - константы интегрирования. Подставляя это выражение во второе и третье уравнение (54) и интегрируя их, находим прогиб пластины

$$u_3^{(0)}=W^0+x\gamma_1^0-\frac{1}{D_{1111}}\int_0^x\int_0^{x'}M_{11}(x'')dx''dx', \qquad (56)$$

где W^0, γ_1^0 - константы интегрирования.

3.3 Изгиб шарнирно опертой пластины равномерным давлением

Рассмотрим решение уравнений (55), (56) вместе с граничными условиями шарнирного закрепления торцов пластины

$$x=0 \qquad u \qquad x=1: \qquad u_3^{(0)}=0, \qquad u_{3,11}^{(0)}=0. \qquad (57)$$

и будем рассматривать случай равномерно распределенного давления $\Delta\bar{p}(x)=\Delta\bar{p}_0=const$, $f(x)=1$. Тогда решение (56) для прогиба с учетом граничных условий (57) примет вид

$$u_3^{(0)}=-\frac{\Delta p}{24D_{11}}x(x^3-2x^2+1), \qquad D_{11}=<\xi^2 C_{1111}^{(0)}>. \qquad (58)$$

$$M_{11}=\frac{\Delta\bar{p}_0}{2}x(x-1), \qquad Q_1=\Delta\bar{p}_0\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

Графики функций (58), называемые эпюрами, показаны на рисунке 1.

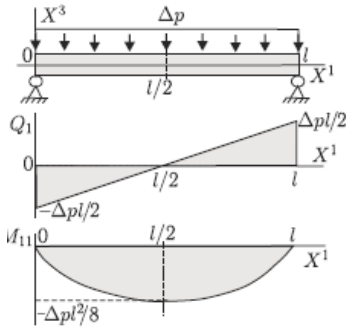


Рисунок 1. Эпюры перерезывающей силы Q_1 и момента M_{11} в шарнирно опертой пластине

3.4 Расчет всех 6 напряжений в многослойной пластине

Напряжения в 1-го и 2-го приближений согласно (37) и (29) в данной задаче имеют следующий вид

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = -\xi C_{IJ11}^{(0)} u_{3,11}^{(0)}, \quad \sigma_{I3}^{(1)} = 0, \tag{59}$$

$$\sigma_{I3}^{(2)} = -u_{3,111}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (< \xi C_{I111}^{(0)} > - \xi C_{I111}^{(0)}) d\xi .$$

Тогда изгибные напряжения, напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения, согласно (6), при сохранении главных членов в асимптотических разложениях, вычисляются по формулам

$$\sigma_{IJ} = -\kappa \xi C_{IJ11}^{(0)} u_{3,11}^{(0)},$$

$$\sigma_{I3} = -\kappa^2 u_{3,111}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (< \xi C_{I111}^{(0)} > - \xi C_{I111}^{(0)}) d\xi, \tag{60}$$

$$\sigma_{33} = -\kappa^3 (p_- + \Delta p(\xi + 0.5) - u_{3,111}^{(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (< \sigma^{(2)} > - \sigma^{(2)}) d\xi), \qquad \sigma^{(2)} = \int_{-0.5}^{\xi} (< \xi C_{1111}^{(0)} > - \xi C_{1111}^{(0)}) d\xi$$

Из этих выражений следует, что по толщине пластины напряжения σ_{IJ} распределены кусочно-линейным образом, а для однослойной пластины, для которой C_{ijkl}=const, эти напряжения имеют линейное распределение по толщине, как и в классической теории пластин.

Если пластина однослойная, т.е $C_{ijkl} = const$, то напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения, согласно (60), вычисляются по формулам

$$\sigma_{I3} = \frac{\kappa^2}{2} C_{I111}^{(0)} u_{3,111}^{(0)} \left(\xi^2 - \frac{1}{4} \right),$$

$$\sigma_{33} = -\kappa^3 \left(p_- + \Delta p(\xi + 0.5) + u_{3,111}^{(0)} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} + \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi}{4} \right) \right) \right), \tag{61}$$

С учетом (58) напряжения (61) принимают следующий вид

$$\sigma_{IJ} = \frac{C_{IJ11}^{(0)} \Delta \tilde{p}}{2\kappa^2 D_{11}} x(x-1),$$

$$\sigma_{I3} = \frac{\Delta \tilde{p}}{\kappa D_{11}} (x - 1/2) \int_{-0.5}^{\xi} (< \xi C_{I111}^{(0)} > - \xi C_{I111}^{(0)}) d\xi, \tag{62}$$

$$\sigma_{33} = -(\tilde{p}_- + \Delta\tilde{p}(\xi + 0.5) - \frac{\Delta\tilde{p}}{\kappa^3 D_{11}} \int_{-0.5}^{\xi} (< \sigma^{(2)} > - \sigma^{(2)}) d\xi), \qquad \sigma^{(2)} = \int_{-0.5}^{\xi} (< \xi C_{1111}^{(0)} > - \xi C_{1111}^{(0)}) d\xi$$

Здесь учтено, что

$$\frac{\kappa \Delta \bar{p}}{\bar{D}_{11111}} = \frac{\Delta \tilde{p}}{\kappa D_{11}}. \qquad (63)$$

Для однослойной пластины из (62) получаем ($\kappa = h/L$, где L – длина пластины)

$$\sigma_{IJ} = \frac{6\Delta\tilde{p}}{\kappa^2} x(x-1), \qquad \sigma_{13} = \frac{6\Delta\tilde{p}}{\kappa}\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\xi^2 - \frac{1}{4}\right). \qquad (64)$$

Максимальное значение касательного напряжения достигается на краю пластины на средней поверхности, при значениях $x = 0, \quad \xi = 0$:

$$\max \sigma_{13} = \frac{3\Delta\tilde{p}}{4\kappa}. \qquad (65)$$

3.5 Численная реализация аналитического решения и сравнение с трехмерной теорией упругости

Для анализа точности асимптотической теории многослойных пластин проведем сравнение результатов расчетов напряжений по формулам (62) с результатами расчетов по точной 3-х мерной теории упругости. Для нахождения численного решения по трехмерной теории используем программный конечно-элементный пакет ANSYS, с тетраэдальным 10-ти узловым конечным элементом SOLID187. Пластина в этом случае рассматривалась как 3-х мерное тело (параллелепипед), торцы которого $x = 0$ и $x = 1$ были жестко защемлены, на одной внешней поверхности ξ =0.5 было задано равномерное давление $\tilde{p}_- = \kappa^3 p_-$, вторая поверхность ξ = - 0.5 полагалась свободной, а боковые грани $x_2 = \pm b/(2L)$ (b- ширина пластины) были защемлены со свободным скольжением: $u_2 = 0$, $\sigma_{12} = 0$, $\sigma_{13} = 0$. Пластина состояла из 3-х слоев с симметричным их расположением относительно срединной плоскости (рисунок 2): толщина средней пластины была выбрана в 2 раза большей, чем толщина внешних слоев. Числа $\kappa = h/L$ и b/L были выбраны равными: $\kappa = b/L = 0.04$, что обеспечивало условие "тонкости" пластины. Материалы слоёв были выбраны ортотропными, с главными осями ортотропии совпадающими с осями симметрии пластины, значения упругих характеристик слоев соответствовали 2-м типам стеклопластика и приведены в табл.1.

Таблица 1. Упругие характеристики материалов слоёв

№	E_1 ,ГПа	E_2 ,ГПа	E_3 ,ГПа	G_{12} ,ГПа	G_{13} ,ГПа	G_{23} ,ГПа	ν_{12}	ν_{31}	ν_{23}
1	14	14	5,3	1,8	0,75	0,75	0,08	0,14	0,15
2	21	21	7,95	2,7	1,25	1,25	0,12	0,21	0,225

В процессе проведения трехмерных конечно-элементных расчетов с помощью пакета ANSYS была установлена существенная зависимость решения от использованной при расчетах конечно-элементной сетки. В начале расчеты проводились с равномерной КЭ сеткой с числом элементов по толщине пластины равным N=12 (что соответствует минимум 3-м КЭ по толщине на каждый из 4-х слоев пластины). Общее число КЭ для всей пластины в такой сетке составило 492544 (693634 узла). Однако точность решения, получаемого на такой сетке, оцениваемая по отклонению от решения (28), полученного по с помощью асимптотической теории (далее АТ-решение), оказалась крайне не удовлетворительной. Для повышения точности КЭ-решения оказалось необходимым существенное измельчение сетки с N=80 КЭ по толщине пластины. Однако при этом резко возрос общий размер КЭ – примерно до 50 млн. КЭ, что сделало затруднительным не только решение задачи на персональном компьютере, но и само хранение КЭ сетки в оперативной памяти компьютера. Для того, чтобы избежать необходимости применения параллельных вычислений, было предложено создать специальную неравномерную КЭ-сетку, для которой сгущение реализуется только вблизи 9 нормальных сечений пластины (рис.2), названных "опорными", для остальных частей пластины использовалась существенно более крупная сетка. Так для N=12 число КЭ по толщине и ширине пластины вне областей опорных сечений составляло 4 (9 узлов, рис.2).

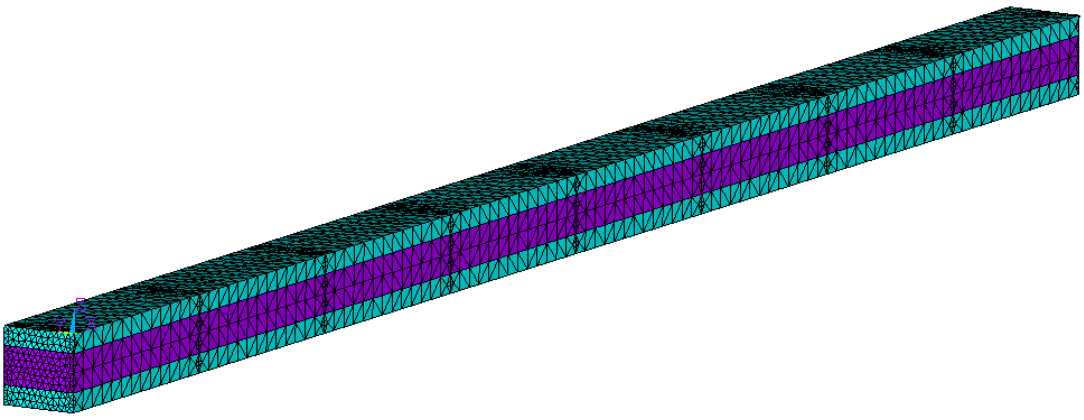


Рисунок 2. Неравномерная конечно-элементная сетка 3-х слойной пластины, использованная в расчетах.

Число N КЭ в опорном сечении выбиралось исходя из условия близости скачка напряжения σ_{22} на поверхности раздела слоёв, рассчитанного по АТ-решению (62) и с помощью комплекса ANSYS:

$$\Delta[\sigma_{22}] = \frac{\left|[\sigma_{22}]_{ansys} - [\sigma_{22}]_{AT}\right|}{[\sigma_{22}]_{AT}} \cdot 100\% < 20\%. \qquad (66)$$

В таблице 2 приведено сравнение невязки $\Delta[\sigma_{22}]$ вычисления скачка поперечного нормального напряжения $[\sigma_{22}]$ в зависимости от числа N конечных элементов в опорных сечениях. Для относительно крупных сеток с N=12 и 20 величина невязки $\Delta[\sigma_{22}]$ является достаточно большой и не удовлетворяет условию (32). Выполнение этого условия обеспечивает только достаточно мелкая сетка с N=80.

Таблица 2. Зависимость невязки $\Delta[\sigma_{22}]$ вычисления скачка напряжения $[\sigma_{22}]$ от измельчения КЭ сетки

Число N КЭ (узлов) по толщине пластины в опорных сечениях	Невязка $\Delta[\sigma_{22}]$ вычисления скачка напряжения $[\sigma_{22}]$ в сечении $x_1 = 0,25$, %
12 (25)	73,7
20 (41)	55,3
80 (161)	18,5

Исходя из полученных результатов число конечных элементов по толщине и ширине пластины в опорных сечениях, было выбрано равным N=80 (по 20 элементов на слой). Общее число КЭ в такой неравномерной сетки оставалось относительно не большим - 224733 (число узлов – 319869), что позволяло относительно быстро проводить расчеты на этой сетке.

Сравнение распределений напряжений, рассчитанных по АТ -решению с ANSYS-решением, приведено на рисунках 2 - 5 для 4-х различных сечений $x = x_1 = [0,125;\ 0,25;\ 0.375;\ 0.5]$, ($y = x_2, z = x_3$).

На этих рисунках, как и ранее, поперечная безразмерная координата ξ изменяется в пределах $[-0.5; 0.5]$: значение ξ =0.5 – соответствует верхней плоскости, на которой задано равномерно распределенное давление: $k^3 p_+ = 10^6$ Па; а значения ξ = ±0,25 –

соответствуют плоскостям стыка слоев. Так как материалы слоев выбраны ортотропными, то два касательных напряжения отсутствуют во всех слоях: $\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$.

Распределения остальных 4-х напряжений σ_{13}, σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, рассчитанные с помощью разработанной асимптотической теории (АТ) по формулам (28) и с помощью пакета ANSYS для сетки с N=80 достаточно хорошо совпадают (см. рис. 3-6). В качестве количественное характеристики близости решений кроме невязки (67) рассматривалась также средне-интегральная по толщине невязки численного решения для напряжений в различных сечениях x_1 (по поперечной координате x_2 в данной задаче напряжения не изменяются):

$$\delta(\sigma_{\alpha\alpha}) = \frac{\int_{-0.5}^{0.5} \left((\sigma_{\alpha\alpha})_{ansys} - (\sigma_{\alpha\alpha})_{AT} \right)^2 d\xi}{\int_{-0.5}^{0.5} \left((\sigma_{\alpha\alpha})_{AT} \right)^2 d\xi} \cdot 100\% \qquad (68)$$

Для N=80 значение среднеинтегральной невязки $\delta(\sigma_{\alpha\alpha})$ составило: для $\delta(\sigma_{22})$ = 8,8 %, $\delta(\sigma_{11})$ = 3,5 %, $\delta(\sigma_{33})$ = 0,6 %, $\delta(\sigma_{13})$ = 0,7 % в сечении $x_1 = 0,25$.

Решение, показанное на рисунке 2г), отражает тот факт, что теоретически нулевое распределение касательного напряжения $\delta(\sigma_{13})$ в центральном сечении $x_1 = 0,5$ при численной КЭ-реализации близко к машинному нулю, максимальное значение отклонений от нуля, есть величина примерно на 3 порядка меньшая, чем максимальное значение касательных напряжений в сечении $x_1 = 0,375$ (рис.2.в).

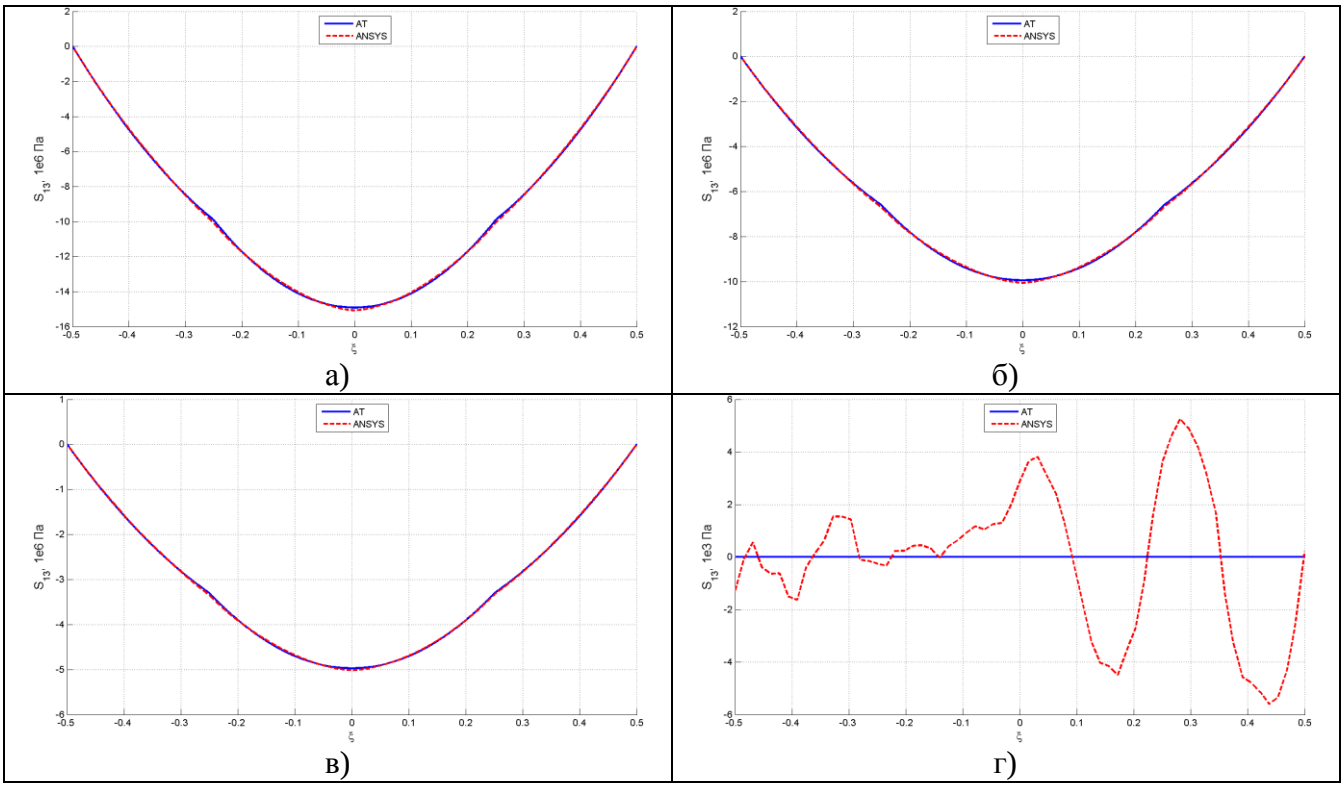


Рисунок 3. Распределение напряжения σ_{13} по толщине 3-х слойной пластины, полученное с помощью асимптотической теории (АТ) и пакета ANSYS:
а – $x_1 = 0,125$; б – $x_1 = 0,25$; в – $x_1 = 0,375$; г – $x_1 = 0,5$.

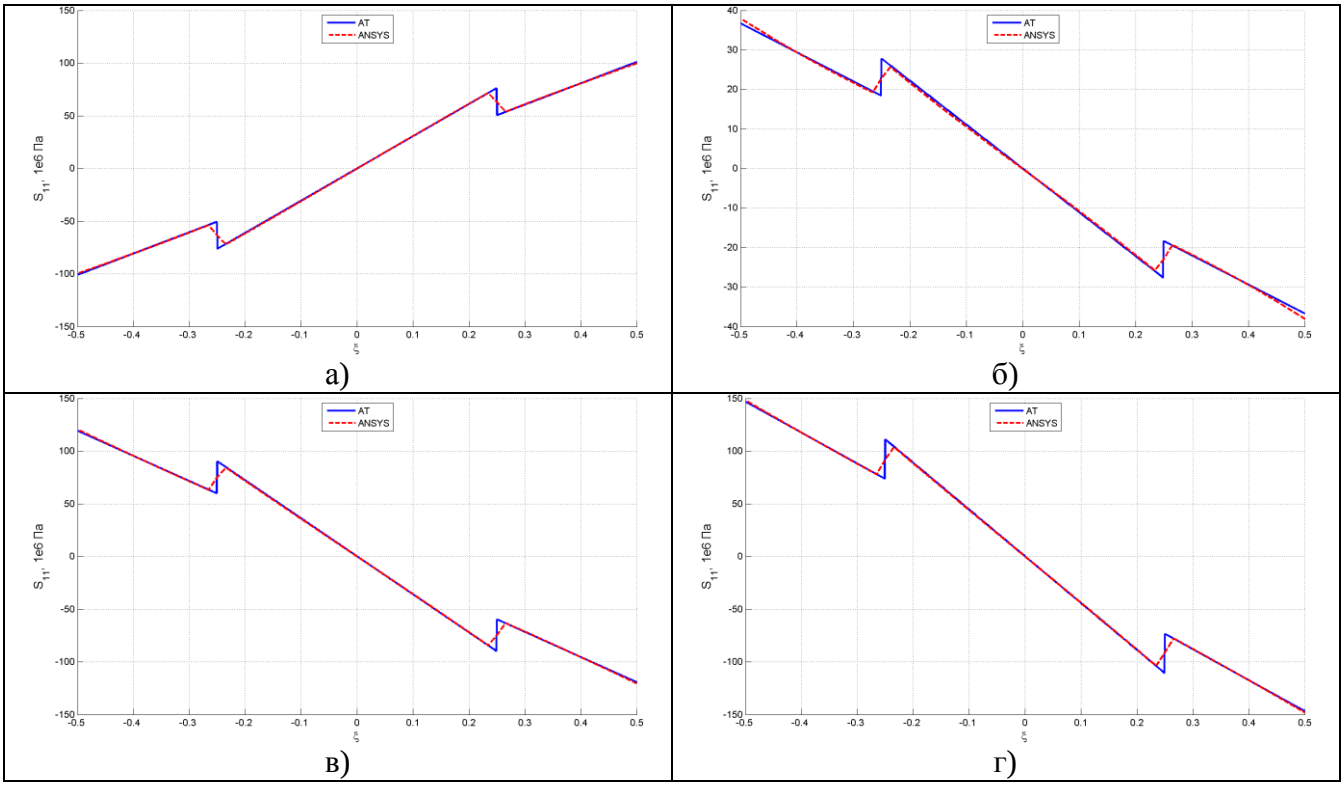


Рисунок 4. Распределение изгибного напряжения σ_{11} по толщине 3-х слойной пластины, полученное с помощью асимптотической теории (АТ) и пакета ANSYS:
а – $x_1 = 0{,}125$; б – $x_1 = 0{,}25$; в – $x_1 = 0{,}375$; г – $x_1 = 0{,}5$.

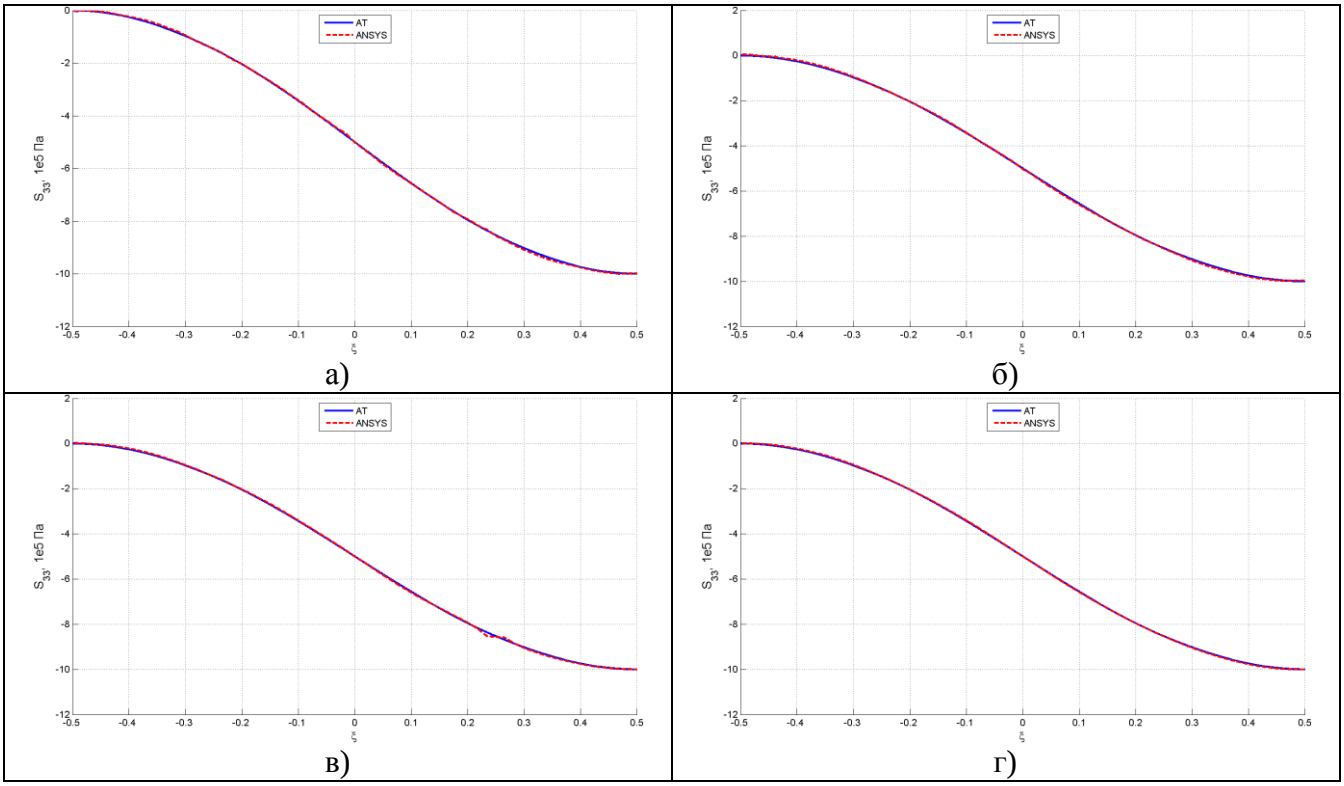


Рисунок 5. Распределение поперечного напряжения σ_{33} по толщине 3-х слойной пластины, полученное с помощью асимптотической теории (АТ) и пакета ANSYS:
а – $x_1 = 0{,}125$; б – $x_1 = 0{,}25$; в – $x_1 = 0{,}375$; г – $x_1 = 0{,}5$.

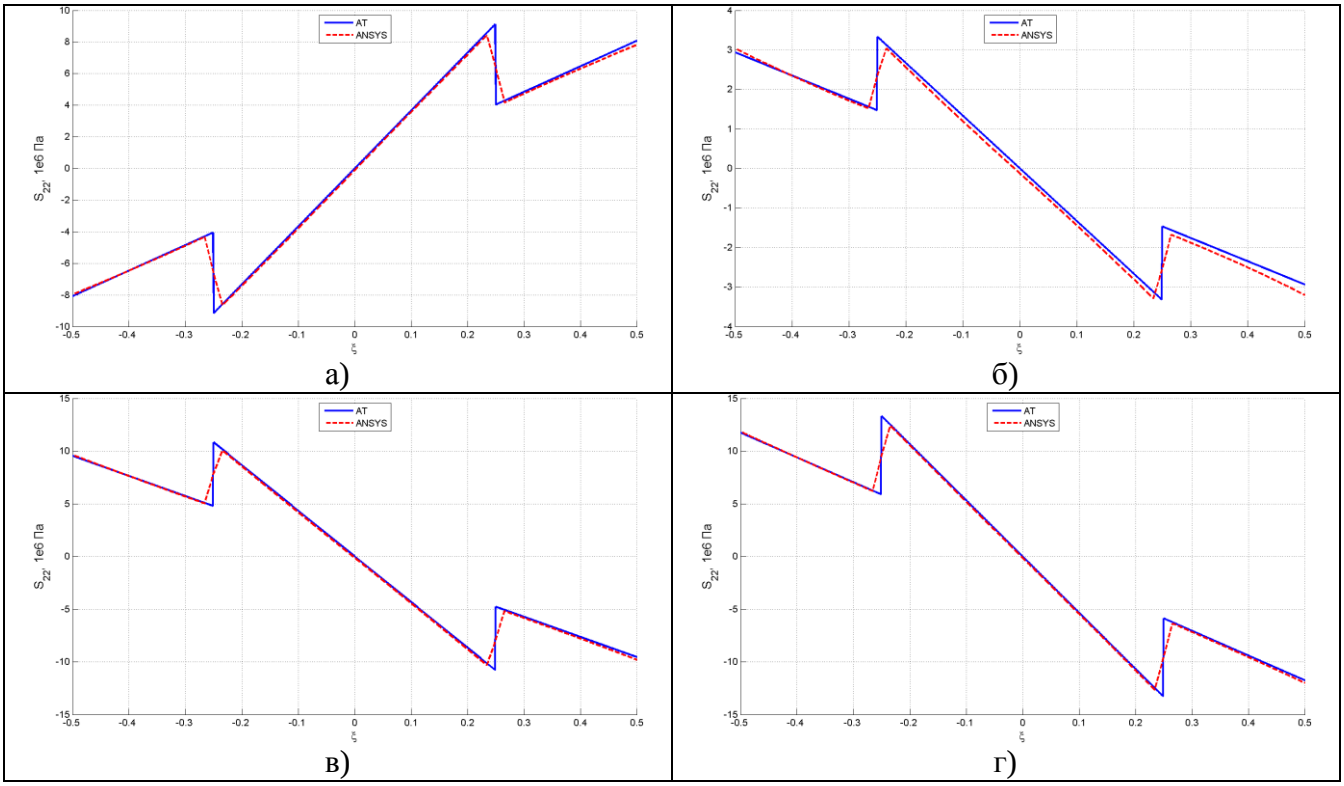


Рисунок 6. Распределение поперечного напряжения σ_{22} по толщине 3-х слойной пластины, полученное с помощью асимптотической теории (АТ) и пакета ANSYS: а – $x_1 = 0{,}125$; б – $x_1 = 0{,}25$; в – $x_1 = 0{,}375$; г – $x_1 = 0{,}5$.

4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

4.1 Вариант №1: задача об изгибе консольно-защемленной пластины (балки) сосредоточенной силой

Рассмотреть задачу об изгибе многослойной симметричной консольно-защемленной пластины (балки) сосредоточенной силой. В этой задаче вместо (57) заданы граничные условия жесткой заделки на торце $x = 0$

$$x = 0: \qquad u_3^{(0)} = 0, \qquad u_{3,1}^{(0)} = 0 \tag{69}$$

и условие действия сосредоточенной силы на торце $x = 1$

$$x = 1: \qquad M_{11} = 0, \qquad Q_1 = -P. \tag{70}$$

Давление $\Delta\bar{p}(x)$ в данной задаче является сингулярной функцией (δ - функцией) и имеет вид

$$\Delta\bar{p}(x) = \Delta\bar{p}_0 f(x), \qquad \Delta\bar{p}_0 = -P = const, \qquad f(x) = \delta(x). \tag{71}$$

Применить эти граничные условия к решению (55), (56) и показать, что в данной задаче решение имеет вид

$$M_{11} = P(1-x), \qquad Q_1 = -P, \qquad u_3^{(0)} = -\frac{Px^2}{2D_{1111}}(1-\frac{x}{3}), \tag{72}$$

где $M_{11}^0 = P, \qquad Q_1^0 = 0,\ W^0 = 0, \qquad \gamma_1^0 = 0$ - константы интегрирования.

Подставить формулы (72) в (60) и найти распределения напряжений в пластине, построить графики напряжений σ_{I1}, σ_{I3}, σ_{33}, в зависимости от ξ при различных значениях координаты *x*.

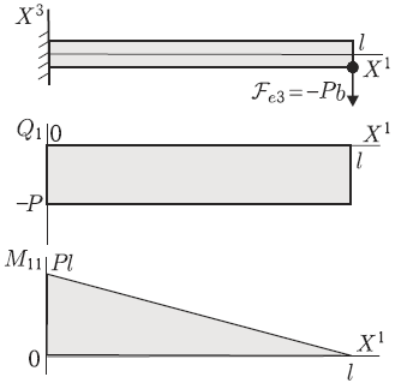


Рисунок 7. Распределение перерезывающей силы и момента в задаче об изгибе консольно защемленной пластины

4.2 Вариант № 2: задача об изгибе консольно защемленной балки равномерным давлением

Рассмотреть задачу об изгибе многослойной симметричной консольно защемленной балки равномерным давлением (рис. 7), для которой заданы граничные условия жесткой заделки на торце $x = 0$

$$x = 0: \qquad u_3^{(0)} = 0, \qquad u_{3,1}^{(0)} = 0 \tag{73}$$

и условие свободного края на торце $x = 1$

$$x = 1: \qquad M_{11} = 0, \qquad Q_1 = 0. \tag{74}$$

Давление $\Delta\bar{p}(x)$ в данной задаче является равномерным

$$\Delta\bar{p}(x) = \Delta\bar{p}_0 f(x), \qquad \Delta\bar{p}_0 = const, \qquad f(x) = 1. \tag{75}$$

Применить эти граничные условия к решению (55), (56) и показать, что в данной задаче решение имеет вид

$$M_{11}=\frac{\Delta\bar{p}_0}{2}(1-x)^2,\qquad Q_1=\Delta\bar{p}_0(x-1),\qquad u_3^{(0)}=-\frac{\Delta\bar{p}_0x^2}{2D_{1111}}(\frac{x^2}{12}-\frac{x}{3}+\frac{1}{2}),\tag{76}$$

Подставить формулы (72) в (60) и найти распределения напряжений в пластине, построить графики напряжений σ_{IJ}, σ_{I3}, σ_{33} в зависимости от ξ при различных значениях координаты *x*. Показать, что графики функций (76) имеют вид, показанный на рисунке 6.

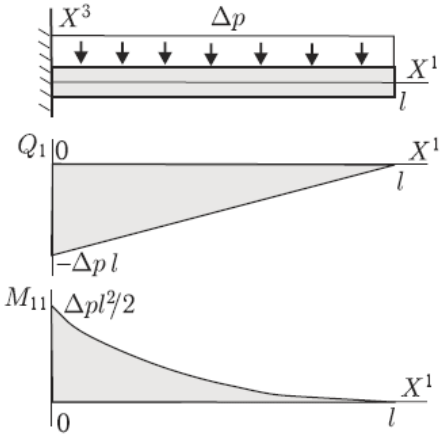


Рисунок 8. Распределение перерезывающей силы и момента в задаче об изгибе консольно заделанной пластины равномерным давлением.

4.3 Вариант № 3: изгиб шарнирно опертой пластины сосредоточенной силой

Рассмотреть задачу об изгибе многослойной симметричной шарнирно опертой пластины сосредоточенной силой, для которой заданы граничные условия шарнирного закрепления торцов пластины

$$x=0\qquad u\qquad x=1:\qquad u_3^{(0)}=0,\qquad u_{3,11}^{(0)}=0.\tag{77}$$

и будем рассматривать случай сосредоточенной силы, приложенной в точке x=1/2

$$\Delta\bar{p}(x)=P\delta(x-\frac{1}{2}).\tag{78}$$

Применить эти граничные условия к решению (55), (56) и показать, что в данной задаче решение имеет вид

$$M_{11}=-\frac{P}{2}(x-(2x-1)H(x-\frac{1}{2})),\qquad Q_1=P(\frac{1}{2}-H(x-\frac{1}{2})),\tag{79}$$

где $H(x-\frac{1}{2})$ - функции Хевисайда.

Найти распределения прогиба пластины $u_3^{(0)}$. Показать, что графики функций (79) имеют вид, показанный на рисунке 6.

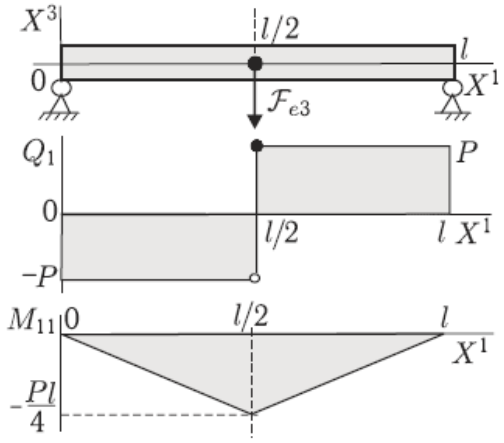


Рисунок 9 Эпюры перерезывающей силы и момента в задаче об изгибе шарнирно опертой пластины сосредоточенной силой

Найти распределения напряжений σ_{IJ}, σ_{I3}, σ_{33} в пластине, построить графики этих напряжений в зависимости от ξ при различных значениях координаты *x*.

5. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ЗАЩИТЫ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

5.1 Порядок выполнения курсовой работы

5.1.1 Ознакомление с теоретической частью курсовой работы

5.1.2 ознакомление с заданием и исходным данными по соответствующему варианту курсовой работы.

5.1.3 Проведение численно-аналитических расчетов в соответствии с указаниями п.4

5.1.4 Написание программы на языке С++, реализующей численно-аналитический метод по теории АТ.

5.1.5 знакомство с программным пакетом ANSYS.

5.1.6 Проведение расчетов задачи об изгибе балки по трехмерной теории упругости с использованием пакета ANSYS.

5.1.7 Проведение сравнения результатов численных решений по ANSYS и с помощью теории АТ.

5.1.8. Оформление отчета о выполнении курсовой работы, с включением в него всех разделов по курсовой работе, образец выполняется согласно примеру из п.3.

5.2 Порядок защиты курсовой работы

5.2.1 К защите курсовой работы предъявляется отчет о выполнении курсовой работы, оформленный согласно п.5.1.

5.2.2 Защита курсовой проводится в форме презентации результатов курсовой работы.

5.2.3 Для выступления на защите курсовой работы студент готовит:

- презентацию и текст доклада по презентации,
- ответы на вопросы для самоконтроля.

5.2.4 По результатам выполнения курсовой работы, а также по результатам выступления на защите курсовой работы студенту выставляется оценка по курсовой работе.

6. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

6.1 Что такое глобальные и локальные координаты?

6.2 Запишите формулировку 3-х мерной задачи теории упругости .

6.3 Что такое асимптотическое разложение функции?

6.4 Что такое локальные задачи ?

6.5 Как определяются усилия и моменты сил ?

6.6 Осредненная система уравнений для многослойной пластины.

6.7 Какие компоненты перемещений, деформаций и напряжений отличны от нуля в задаче об изгибе пластины ?

6.8 Каковы особенности составления КЭ -сетки для специализированной области типа многослойной балки ?

6.9 Назовите основные особенности распределения напряжений в задаче об изгибе пластин.

7. ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов// Механика композит. Материалов.- 1988.-№4.-С.698-704.

2. Шешенин С. В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин// Изв.РАН.-МТТ.-2006.-№ 6.-с.71-79.

3. Шешенин С. В., Ходос О. А. Эффективные жесткости гофрированной пластины// Вычислительная механика сплошной средыю.-2011.-Т.4.,№2-С.128-139.

4. З в е р я е в Е. М., М а к а р о в Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко//ПММ.-2008.-Т.72,вып.2.-с.308-321.

5. З в е р я е в Е. М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит//ПММ.-2003.-Т.67,вып.3.-С.472-483.

6. K o h n R.V., V o g e l i u s M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness // Int. J. Solids and Struct. – 1984. – V. 20, № 4. – P. 333-350.

7. П а н а с е н к о Г.П., Р е з ц о в М.В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 294. –№ 5. – С. 1061-1065.

8. L e v i n s k i T., T e l e g a J. J. Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization. – Singapore; London: World Sci. Publ., 2000. – 739 p.

9. K o l p a k o v A. G. Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses. – Springer Verlag: Berlin, Heidelberg, 2004. – 228 p.

10. П о б е д р я Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.

11. Б а х в а л о в Н.С., П а н а с е н к о Г.П. Осреднение процессов в периодических средах.-М.:Наука, 1984.

12. С а н ч е с -П а л е н с и я Э. Неоднородные среды и теория колебаний.-М.:Мир,1984.

13. Д и м и т р и е н к о Ю.И., К а ш к а р о в А.В. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов// Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана, сер. Естественные науки.- 2002.-№2.- 2002 г.

14. Д и м и т р и е н к о Ю.И., С о к о л о в А.П. Разработка системы автоматизированного вычисления эффективных упругих характеристик композитов. // Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки.-№2. -2008.- с.57-67.

15. Димитриенко Ю.И. Основы механики твердого тела/ Механика сплошной среды.Т.4.-Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана.-2013.-624 с.

16. Д и м и т р и е н к о Ю. И. Механика сплошной среды, т.1. Тензорный анализ.-М.:Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана.- 367 с.