Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

Факультет: «Фундаментальные науки»
Кафедра «Физика»

Бадаев Ю.Л.
Поздышев М.Л.

Лабораторная работа М-118

Проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера методом вращательных колебаний

Методическое руководство

Москва, 2024

Проверка теоремы Гюйгенса – Штейнера методом вращательных колебаний

1. Цель лабораторной работы

Изучение возможности проверки теоремы Штейнера методом вращательных колебаний.

2. Задачи лабораторной работы

Используя результаты измерений момента инерции свободного стола и периода его колебаний методом вращательных колебаний, провести экспериментальную и теоретическую проверку теоремы Гюйгенса - Штейнера.

3. Экспериментальное оборудование, приборы и принадлежности

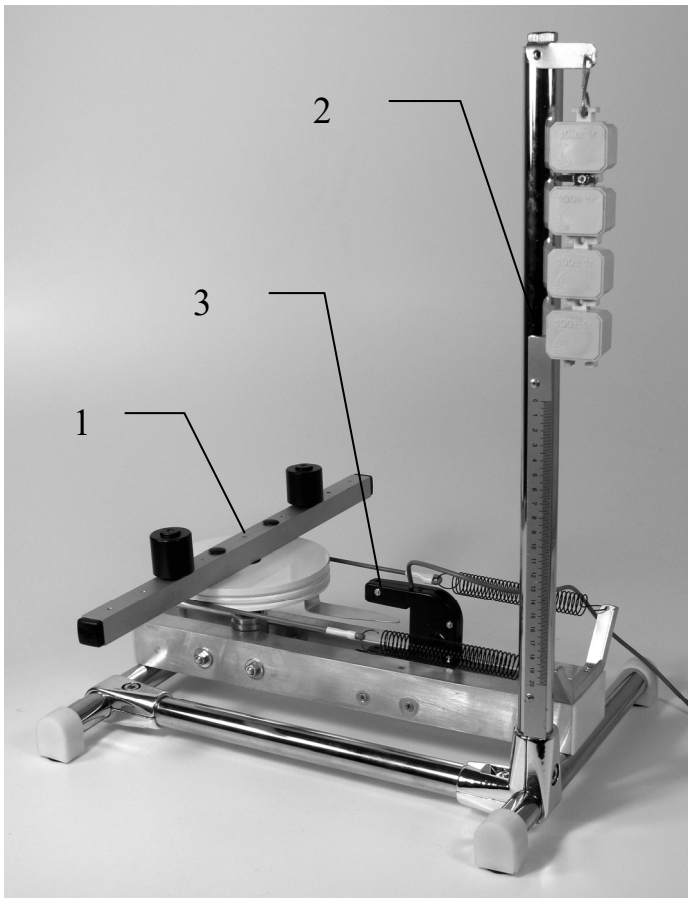


Рис.1

Лабораторная установка (рис.1) включает колебательную систему 1, вращающуюся в горизонтальной плоскости, и устройство 2 для измерения жесткости используемых пружин.

К приборам и принадлежностям относятся оптический датчик 3, с помощью которого измеряется период колебаний системы, компьютер с необходимым программным обеспечением и концентратор для подключения датчика к компьютеру.

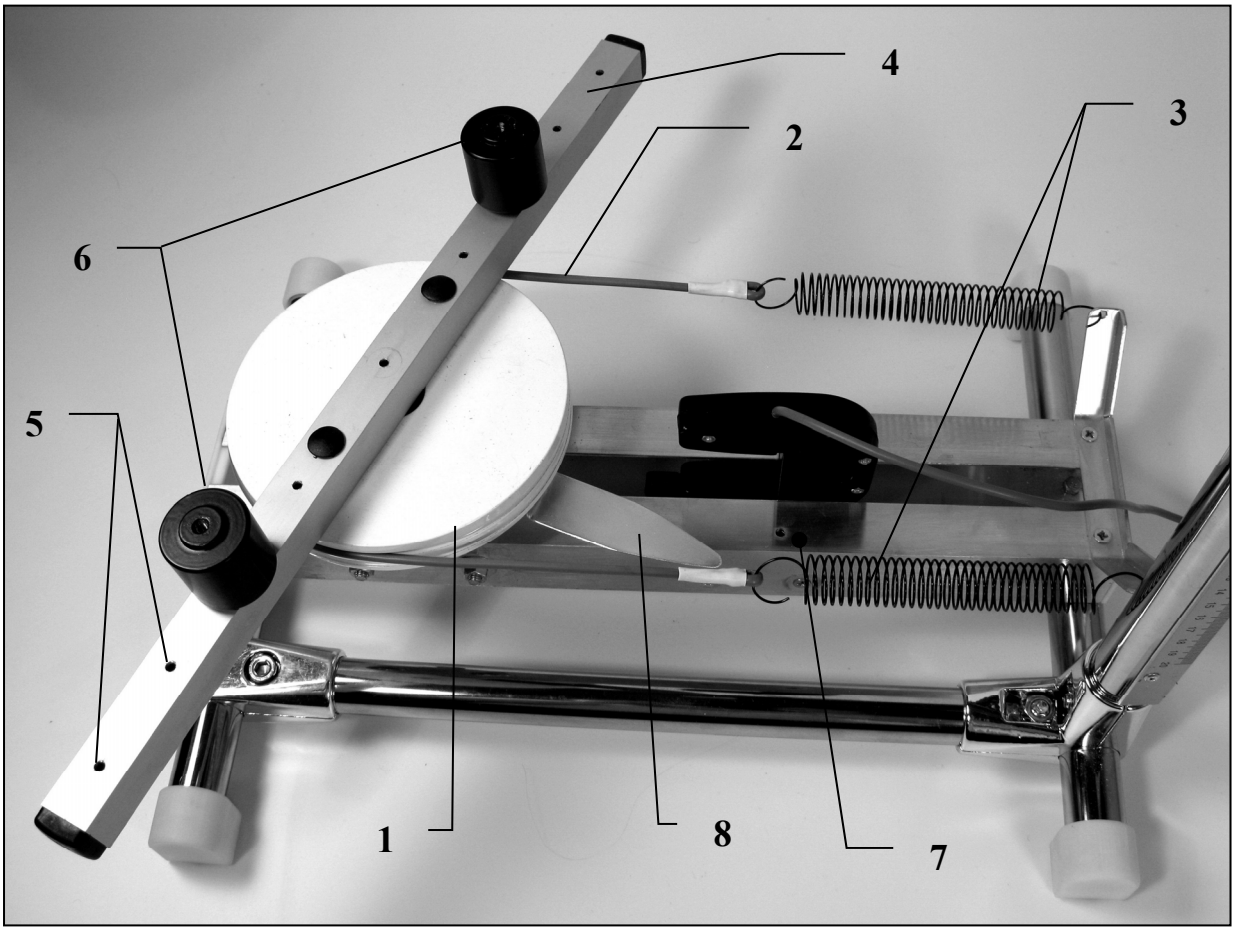


Рис.2

Колебательная система (рис.2) состоит из закрепленного на вертикальной оси шкива 1, ремень 2 которого связан с упругими пружинами 3, зацепленными за штыри стойки. К шкиву жестко прикреплен металлический профиль 4 с рядом отверстий 5, в которых фиксируются грузы 6. Вращательные колебания регистрируются оптическим датчиком 7 в форме импульсов при перекрытии оптической оси датчика язычком 8, жестко скрепленным со шкивом колебательной системы.

4. Теоретическая часть

Найдем связь между моментом инерции J подвижной части колебательной системы и периодом колебаний T. В положении равновесия силы упругости пружин, а, следовательно, и силы натяжения нити с разных сторон от стола, равны. Обозначим эти силы F_0. Для выведения шкива из положения равновесия повернем его на угол φ. Тогда натяжение одной пружины увеличится, а другой уменьшится на $\varphi d/2$, где d – радиус шкива. По закону Гука силы упругости изменятся на $kd\varphi/2$, здесь k – коэффициент жесткости одной пружины. На шкив будет действовать возвращающий момент сил:

$$M = \frac{d}{2}\left(F_0 - k\frac{d}{2}\varphi \right) - \frac{d}{2}\left(F_0 + k\frac{d}{2}\varphi \right) = -\frac{d^2}{2}\, k\varphi, \qquad (1)$$

Согласно основному уравнению вращательного движения

$$J\varepsilon = M\,. \qquad (2)$$

Подставляя (1) в (2) и учитывая, что $\varepsilon = \ddot{\varphi}$, получаем дифференциальное уравнение для φ:

$$J\ddot{\varphi} + \frac{d^2}{2}k\varphi = 0\,.$$

Из теории дифференциальных уравнений следует, что его решение имеет вид:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha).$$

Здесь φ_0 и α – константы, определяемые начальными условиями, а

$$\omega = \sqrt{\frac{d^2 k}{2J}} \qquad (3)$$

– частота колебаний. Из формулы (3) видим, что момент инерции обратно пропорционален квадрату частоты:

$$J = \frac{d^2 k}{2\omega^2} = \frac{d^2 k T^2}{8\pi^2}. \qquad (4)$$

Здесь учтено, что $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Следовательно, моменты инерции подвижной части колебательной системы относятся как квадраты частот их колебаний. Окончательно получаем, что отношение моментов инерции подвижной части колебательной системы

$$\frac{J}{J_0} = \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 \qquad (5)$$

Здесь нулевым индексом отмечены параметры системы, выбранной в качестве эталонной.

За эталонную примем такую подвижную систему, у которой грузы (рис.3) **располагаются соосно на оси шкива – в его центральном отверстии, один над другим (в позиции "0-0")**.

Жесткость упругой связи *k*, входящую в выражение (4), можно определить по величине растяжения пружин λ под действием весовой нагрузки:

$$G = k\lambda\,, \qquad (6)$$

откуда

$$k = \frac{G}{\lambda} \qquad (7)$$

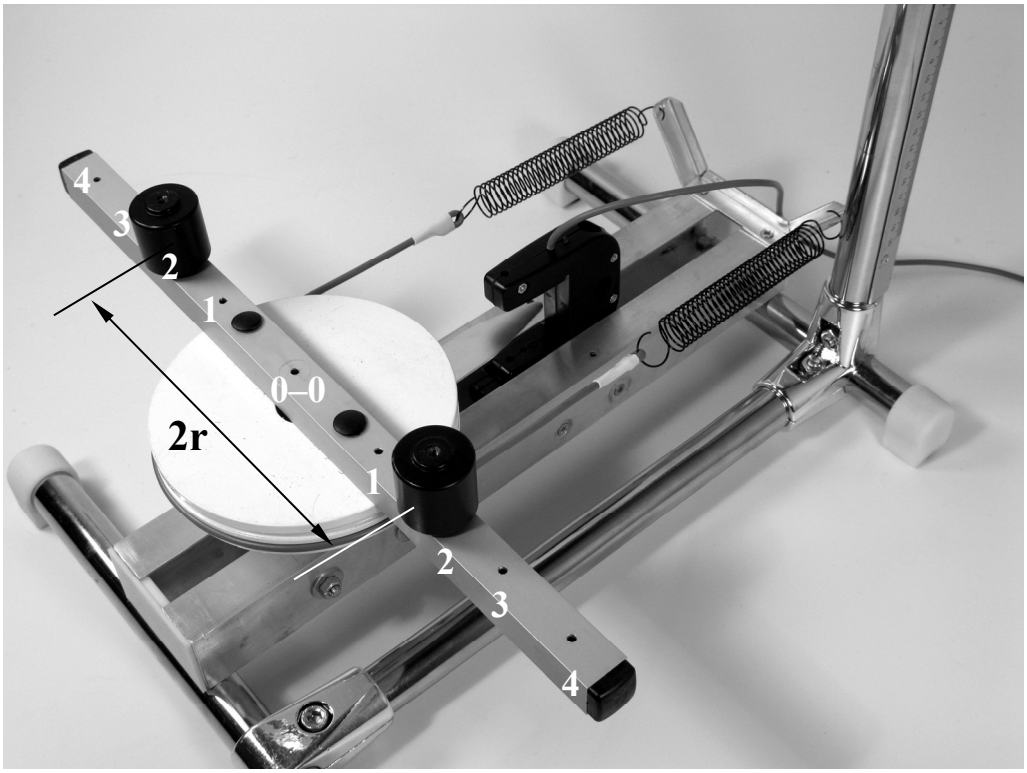


Рис.3

Для определения момента инерции эталонной системы J_0 применим формулу (4):

$$J_0 = \frac{d^2 k T_0^{\,2}}{8\pi^2} \tag{8}$$

Сформулируем теорему Гюйгенса - Штейнера:

Момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между этими осями.

Следовательно, момент инерции подвижной системы, у которой два одинаковых груза фиксированной массы *m* располагаются симметрично на расстоянии *r* от оси шкива (рис.3, позиции "1-1", "2-2", "3-3", или "4-4") определяется выражением

$$J = J_0 + 2mr^2. \tag{9}$$

Разместим на одинаковых расстояниях *r* от оси шкива 2 тела фиксированной массы *m*. После измерения периода колебаний *T* производится вычисление момента инерции по формуле (10)

$$J = J_0 \frac{T^2}{T_0^2}, \tag{10}$$

где T_0 и J_0 - период колебаний и момент инерции эталонной системы. Для проверки теоремы Штейнера по формуле (9) производится расчет момента

инерции J_T (его теоретическое значение) и сравнивается со значением момента инерции $J_Э$ (10), оцененного экспериментально.

5. Описание лабораторной установки

Устройство для измерения жесткости пружин, входящее в состав лабораторной установки, состоит из стойки с подвесом, набора калиброванных грузов весом по 100 г каждый и металлической линейки (рис.3, 4 и 5).

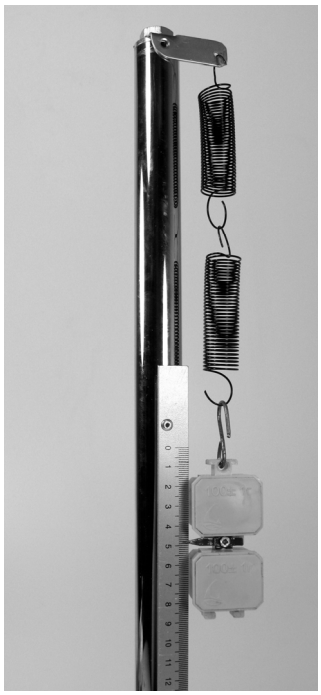


Рис.4



Рис.5

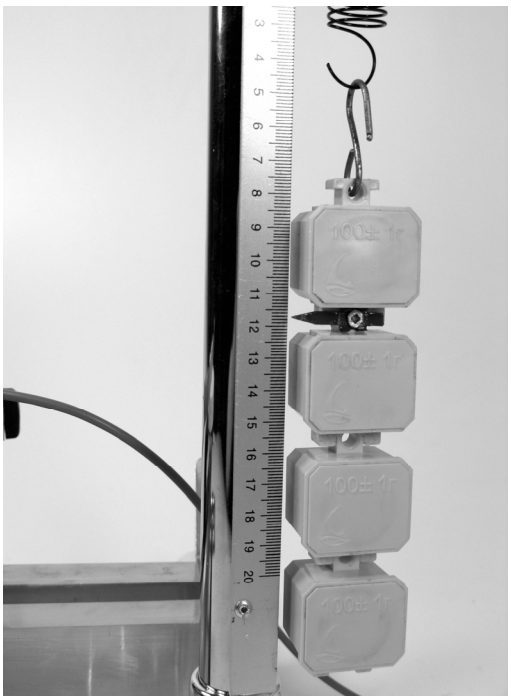


Рис.6

Используем формулу (6) для двух наборов калиброванных грузов:

$$G_1 = K\lambda_1 \quad \text{(рис. 4)}$$

$$G_2 = K\lambda_2 \quad \text{(рис. 5)}$$

Вычитая из второго выражения первое, получим:

$$G_2 - G_1 = K(\lambda_2 - \lambda_1),$$

Откуда можно по разности в удлинениях пружин $\lambda_2 - \lambda_1$ (она не зависит от положения нуля на измерительной линейке) получить оценку жесткости K системы пружин:

$$K = \frac{G_2 - G_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \qquad (11).$$

Поскольку обе пружины одинаковы, то жёсткость каждой из них вдвое больше жёсткости системы последовательно соединённых пружин:

$$k = 2K = 2 \cdot \frac{G_2 - G_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \qquad (12)$$

6. Порядок проведения лабораторной работы

1. Перенесите в таблицу 1 данные о весе разновесок G, диаметре шкива d, массе грузов m, расстояний от оси шкива до фиксирующих отверстий r, если они отличаются от указанных величин на Вашей лабораторной установке.

Таблица 1

$G=0,98\pm0,01$ Н, $d=138\pm2$ мм, $m=200\pm1$ г, $r_1=60\pm2$ мм, $r_2=100\pm2$ мм, $r_3=140\pm2$ мм, $r_4=180\pm2$ мм

2. Измерение жесткости системы пружин.
   1) Снимите обе пружины с колебательной системы и, зацепив их друг за другом, повесьте за кронштейн подвеса стойки.
   2) Подвесьте к пружинам груз общим весом G_1 (например $G_1 = 2G$) (рис.4), так чтобы стрелка оказалась в области измерения линейки.
   3) Зафиксируйте статическое положение стрелки λ_1 на шкале измерительной линейки.
   4) Добавьте к пружинам еще груз общим весом G_2 (например $G_2 = 4G$)(рис.5).
   5) Зафиксируйте статическое положение стрелки λ_2 на шкале измерительной линейки (рис.6).
   6) Запишите результаты в таблицу 2.

Таблица 2

G_1, Н	G_2, Н	λ_1, мм	λ_2, мм	k, Н/м

3. Соберите колебательную систему в соответствии с рис.2 и 3, поместив грузы m в позицию "0-0".
4. Подключите оптический датчик к USB – входу компьютера с помощью кабеля.
5. После включения компьютера запустите программу «Практикум по физике». На панели устройств выберете соответствующий сценарий проведения эксперимента (Alt+C) .
6. Запустите измерения для выбранного датчика (Ctrl+S)  и сразу, непосредственно вслед за запуском произведите в движение колебательную систему.
7. После записи нескольких импульсов перекрытия (7-8) остановите измерения (Ctrl+T) .
8. Проведите обработку полученных данных в соответствии со сценарием, для чего:

- ✓ выделите область из 5-6 импульсов перекрытия для ее детального просмотра с увеличенным масштабом (Alt+левая кнопка мыши);
- ✓ измерьте период колебаний маятника по передним или задним фронтам соседних четных (либо нечетных) импульсов перекрытий путем постановки желтого (левая клавиша мыши) и зеленого маркера (правая клавиша мыши) на соответствующие фронты импульса перекрытия.

9. Выполните измерения периодов еще четырежды по пп.3-7, размещая последовательно грузы m в позициях "1-1", "2-2", "3-3", и "4-4" (рис.3). Результаты измерений запишите в таблицу 3.

Таблица 3

"n-n", номер позиции	Период T_n, с	Момент инерции J_0, (3) кг·м^2	Момент инерции J_{nT}, (9) кг·м^2	Момент инерции $J_{n\Э}$, (10) кг·м^2	Отклонение ΔJ_n кг·м^2	Средняя погрешность $\langle \delta J \rangle$
"0-0"					-	
"1-1"						
"2-2"						
"3-3"						
"4-4"						

7. Обработка результатов измерений

1. Определите по формуле (4) момент инерции подвижной системы в эталонном состоянии (поз. "0-0", рис.3).
2. Определите по формуле (9) теоретические значения моментов инерций J_{nT} подвижной системы в состояниях с поз. "n-n" (рис.3).
3. Определите по формуле (10) экспериментальные значения моментов инерций $J_{n\Э}$ подвижной системы в состояниях с поз. "n-n" (рис.3).
4. Подсчитайте разность значений моментов инерций $\Delta J_n = J_{n\Э} - J_{nT}$
5. Результаты подсчетов по пп.1-4 внесите в табл.3.
6. Оцените среднюю погрешность эксперимента по формуле

$$\langle \delta J \rangle = \frac{1}{4}\sqrt{\sum_{n=1}^{4}\frac{\Delta J_n^2}{J_{nT}^2}} \cdot 100\% \qquad (12)$$

8. Указания по технике безопасности

1. Перед выполнением работы получите инструктаж у лаборанта.
2. Соблюдайте общие правила техники безопасности работы в лаборатории "Физика".

3. Осторожно обращайтесь с подвижной системой. Не допускайте чрезмерного растяжения пружин – это может привести к потере их упругих свойств.

9. Контрольные вопросы

1. Опишите метод вращательных колебаний, который используется в лабораторной работе при измерениях моментов инерции и периодов колебаний.
2. Сформулируйте теорему Гюйгенса - Штейнера, которая используется для вычисления момента инерции тела относительно произвольной оси.
3. Опишите устройство лабораторной установки.
4. Расскажите о порядке выполнения лабораторной работы и проведении измерений.
5. Дайте оценку случайной относительной погрешности результатов проверки выполнения теоремы Штейнера.
6. Дайте определение момента силы, момента импульса, момента инерции абсолютно твердого тела относительно некоторой оси.
7. Сформулируйте основной закон вращательного движения.
8. Сформулируйте закон сохранения момента импульса.
9. Рассчитайте момент инерции тела по указанию преподавателя.

10. Дополнительные источники

1. Приложение 1. Оценка погрешности измерений.
2. Приложение 2. Датчики, интерфейсы, программное обеспечение