Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Вычислительная математика и математическая физика»

Ю.И. Димитриенко, И.Д. Димитриенко

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ГИБКИХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ

Электронное учебное издание

Методические указания к выполнению курсовой работы
по дисциплине «Механика сплошной среды».

Москва

(C) 2013 МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

УДК 539.3

Рецензент: профессор, д.т.н. Н.И. Сидняев

Димитриенко Ю.И.

Д Численное моделирование ударно-волновых процессов в гибких композиционных материалах. Методические указания к выполнению курсовой работы по дисциплине «Механика сплошных сред»/ Ю.И.Димитриенко, И.Д. Димитриенко. - М.:МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2013.-46 с [48], ил.

Изложена математическая модель деформирования гибких броневых материалов на основе арамидных тканей при высокоскоростных воздействиях. Модель учитывает особенности деформационных характеристик данного класса композитных материалов: способность деформироваться без разрушения при конечных значениях деформаций, существенное различие диаграмм деформирования при растяжении и сжатии, зависимость этих диаграмм от скорости нагружения, наличие псевдопластических свойств материалов, обусловленных вытягиванием нитей из ткани и другие. Сформулирована постановка задачи динамического деформирования гибких броневых материалов, для ее решения в двумерной постановке применен метод ленточных адаптивных сеток. Приведен пример численного решения задачи о высокоскоростном воздействии ударника по гибкому броневому материалу, проанализированы некоторые специфические эффекты деформирования материалов данного класса. Предложены задания для выполнения курсовых работ.

Для студентов направления подготовки "Математика и компьютерные науки", специальности "Прикладная математика", а также студентов широкого круга машиностроительных специальностей, изучающих дисциплины "Механика деформируемого твердого тела", "Механика композиционных материалов", "Механика сплошной среды".

Рекомендовано Учебно-методической комиссией НУК «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана

Димитриенко Юрий Иванович
Димитриенко Ирина Донатовна

Численное моделирование ударно-волновых процессов в гибких композиционных материалах.. Электронное учебное издание. Методические указания к выполнению курсовой работы по дисциплине «Механика сплошных сред»

© 2013 МГТУ имени Н.Э. Баумана

Оглавление

Введение..... **4**

1. Цели и задачи методических указаний..... **5**

2. Теоретические основы для выполнения курсовой работы..... **6**

3. Пример и порядок выполнения курсовой работы..... **14**

4.Задания для самостоятельной работы..... **22**

5. Порядок выполнения и защиты курсовой работы..... **25**

6. Вопросы для самоконтроля..... **26**

7. Литература..... **26**

ВВЕДЕНИЕ

Исследование ударно-волновых процессов взаимодействия ударников с преградами имеет важное значение для прикладных задач создания защитных систем от высокоскоростных воздействий: пуль, снарядов, осколков, а также для частиц космического мусора, метеоритов и астероидов при их поражающем действии на технические объекты и земную поверхность. В настоящее время для создания защитных систем от поражающих факторов малого калибра: пуль, осколков успешно применяют гибкие композиционные броневые материалы на основе тканей: СВМ, Армос, TWARON, Kevlar, Русар и др., которые обладают высокими баллистическими характеристиками, и позволяют создавать на их основе защитные бронепанели для обеспечения защиты различных ответственных технических изделий и человека от широкого спектра ударных поражающих воздействий. Вопросы совершенствования рациональной структуры этих композитных материалов за счет выбора оптимального переплетения волокон, многослойной структуры тканей и слоистых композиций и рецептуры материала, за счет выбора различных типов баллистических тканей, пропитывающих составов и др., продолжают оставаться чрезвычайно важными для обеспечения решения конкретных технических задач по обеспечению бронезащиты техники и личного состава [1-10].

Гибкие броневые композитные материалы (ГБКМ) на основе арамидных тканей при ударных воздействиях проявляют специфические физико-механические свойства в области деформирования и разрушения. Для численного моделирования ударно-волновых процессов в ударниках и преградах в настоящее время применяются программные пакеты, относящиеся к коммерческим продуктам (NASTRAN, LS-DYNA, ANSYS и другие), а также к авторские программные средства, не имеющие универсального характера, но реализующие специфические модели поведения динамического деформирования и разрушения ударников и мишеней. Одной из целей настоящих методических указаний является формирование у студентов навыков разработки авторских программ, реализующих модели механики сплошных сред и, в частности, модели динамического поведения материалов при ударных воздействиях.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ МЕТОДИЧЕСКИХ УКАЗАНИЙ

Целью данных методических указаний является ознакомление студентов с моделями механического поведения гибких композиционных материалов при ударно-волновых воздействиях и формирование навыков работы с этими моделями при проведении

численных расчетов ударно-волновых процессов пробивания композитных преград, а также умения использовать методы математического моделирования при разработке усложненных моделей деформируемых твердых анизотропных сред с конечными деформациями.

Задачи настоящих методических указаний - формирование у студентов

умения:

−формулировки основных положений механики сплошных сред при конечных деформациях;

−применять математические методы построения моделей механического поведения материалов при конечных деформациях;

владения:

−навыками применения основных математических моделей механики деформируемых твердых тел при решении практических задач,

−навыками разработки программных кодов для самостоятельной реализации численных алгоритмов решения задач механики деформируемых тел;

−навыками использования компьютерных технологий для математического моделирования полей напряжений, деформаций, перемещений с помощью пакетов прикладных программ типа ShockLarge.

Методические указания разработаны для выполнения курсовых работ по дисциплине "Механика сплошной среды" для студентов направления подготовки "Математика и компьютерные науки", специальности "Прикладная математика", а также могут быть использованы для изучения студентами широкого круга машиностроительных специальностей, изучающих дисциплины "Механика деформируемого твердого тела", "Механика композиционных материалов".

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

2.1 Особенности механического поведения гибких броневых композитных материалов

Перечислим основные особенности механических свойств броневых композиционных материалов.

1) Нелинейно-упругий (обратимый, без пластических деформаций) характер

деформирования тканей в составе ГБКМ при растяжении по основе (рис. 1) и утку (рис. 2), обусловленный распрямлением волокон в тканях, которые в исходном состоянии находятся в искривленном положении.

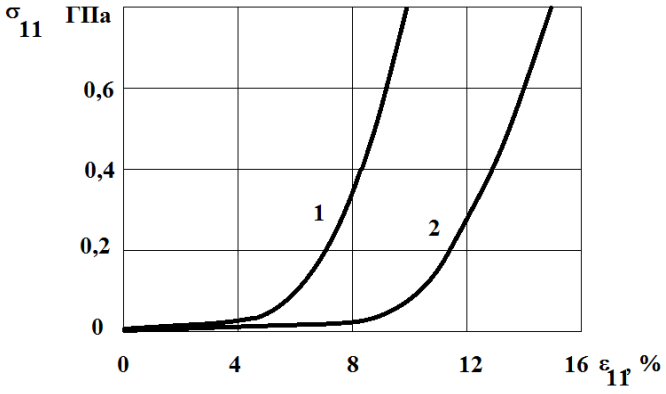


Рис.1 – Диаграмма квазистатического деформирования тканей ГБКМ с полотняным плетением на основе нитей Армос при продольном растяжении по основе: 1) и 2) – различные типы тканей (по данным [1]).

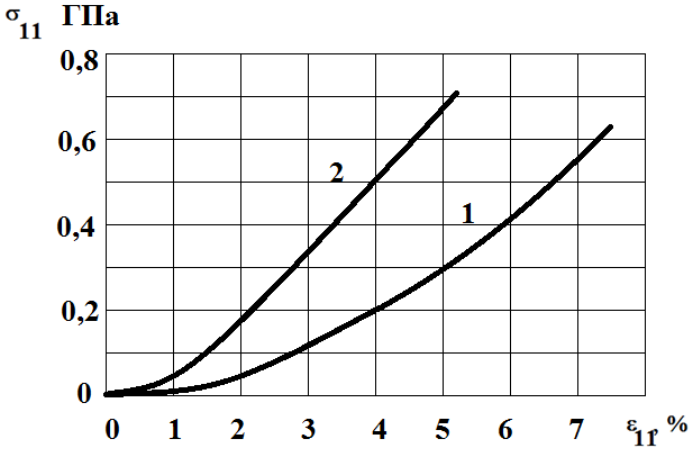


Рис.2 – Диаграмма квазистатического деформирования тканей ГБКМ с полотняным плетением на основе нитей Армос при продольном растяжении по утку: 1) и 2) – различные типы тканей (по данным [1]).

2) Вязкопластический характер деформирования и разрушения волокон при растяжении, который проявляется в зависимости прочности и предельной деформации разрыва материалов ГБКМ от скорости деформирования.

3) Нелинейно-упругий характер деформирования тканей в составе ГБКМ-1 при сжатии по основе и утку (рис. 3), обусловленный потерей устойчивости волокнами в тканях, вследствие чего волокна деформируются практически без сопротивления, однако из-за переплетения волокон в ткани и их сцепления между собой небольшие упругое сопротивление сжатию ГБМ все же оказывают.

После достижения определенного значения деформации сжатие становится необратимым - после снятия нагрузки в материале остаются большие пластические

деформации. Эффект появления остаточных деформаций продольного сжатия проявляется при ударном воздействии круглых ударников по мишени из ГБКМ, из-за которого возникает процесс раздвигания нитей в ГБКМ.

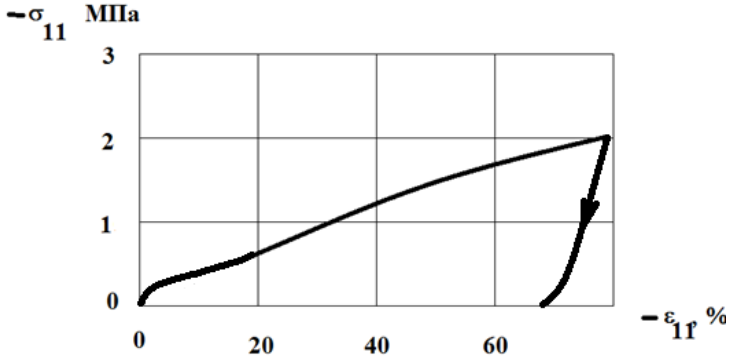


Рис.3 – Диаграмма деформирования тканей ГБКМ с полотняным плетением нитей Армос при продольном сжатии по основе (при активном нагружении и при разгрузке).

4) В поперечном к укладки слоев ткани наблюдается противоположная картина: при сжатии материал ГБКМ проявляет возрастающие нелинейно-упругие свойства, а при растяжении убывающие. Нелинейно-упругих характер деформирования нитей в поперечном направлении при сжатии, обусловлен смятием нитей в ткани (рис.4). При достаточно высоком уровне сжимающих деформаций происходит резкое увеличение жесткости материала из-за того, что поры и пустоты между волокнами в ткани схлопываются и материал, представляющий собой плотный «комок» волокон оказывает значительно большее сопротивление деформированию.

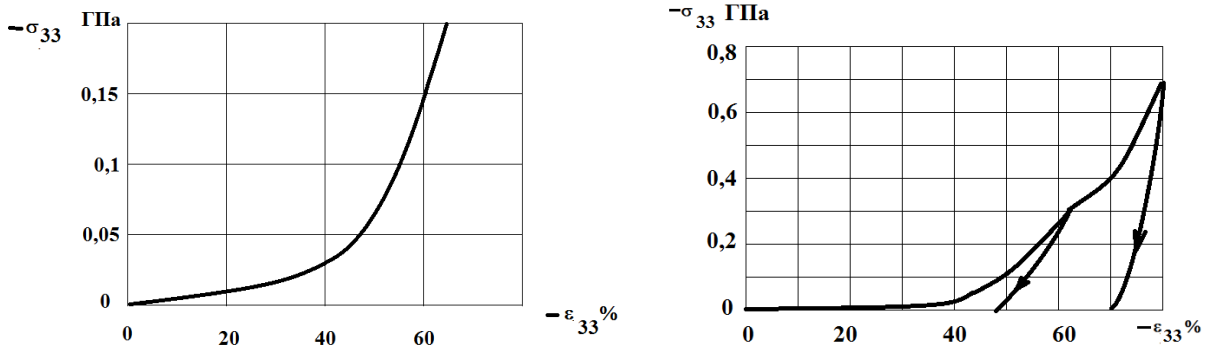


Рис.4 – Диаграмма деформирования тканей ГБКМ с полотняным плетением на основе нитей Армос при поперечном сжатии (при активном нагружении и при разгрузке).

Деформирование тканевого материала при поперечном сжатии является нелинейно-упругим (обратимым) только до некоторого уровня напряжений сжатия, когда происходит резкое увеличение сжатия за счет схлопывания пор, то поведение материала становится пластическим – после разгрузки в материале возникают остаточные деформации, материал сохраняется в уплотненном состоянии и после снятия нагрузки. Более того,

после некоторого более высокого значения сжимающих напряжений сами волокна ткани начинают также пластически обжиматься, факт этого зафиксирован экспериментально [1]. Общий вид диаграммы поперечного сжатия материала ГБКМ показан на рис. 4.

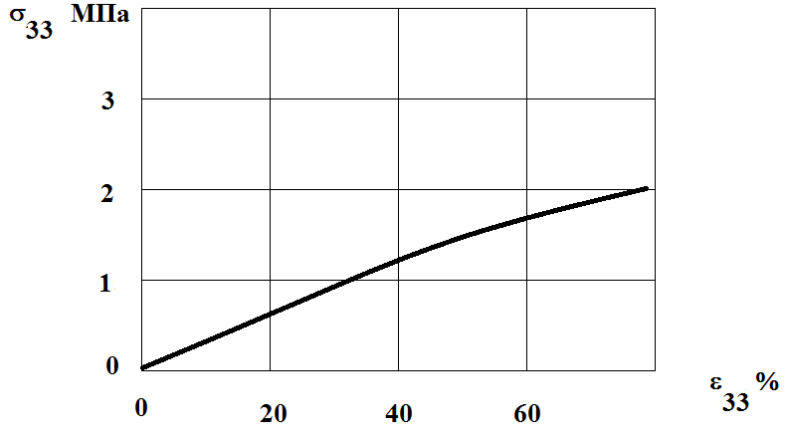


Рис.5 – Диаграмма деформирования тканей ГБКМ с полотняным плетением на основе нитей Армос при поперечном растяжении

5) При межслойном («межнитевом») сдвиге материалы ГБКМ, проявляют упруго-вязко-пластический характер деформирования, обусловленный вытягиванием волокон друг относительно друга при достижении напряжения сдвига определенного значения, а также проскальзыванием отдельных не прошитых слоев ткани. С точки зрения континуальной механики процесс вытягивания волокон можно моделировать как пластическое деформирование, следствие которого является накопление остаточных деформаций. Предельное напряжение, при котором начинается процесс вытягивания – в терминах теории пластического течения – это фактически предел текучести, который зависит от скорости деформаций: с повышением скорости деформаций предел текучести, как правило, возрастает. Это означает, что материал проявляет вязкопластические свойства.

6) Вязкопластический характер разрушения ткани при межслойном сдвиге (зависимость предельной деформации разрыва ткани при сдвиге от скорости деформирования).

Перечисленные факторы образуют в комплексе механизм поглощения материалом ГБКМ энергии ударника.

Данные, представленные на рисунках 1…6, получены на основе экспериментальных данных для следующих типов тканей: 1) - ткань полотняного переплетения из нити Армос с набивкой 12 нитей/см; 2) - ткань полотняного переплетения из нити Армос с набивкой 10 нитей/см.

Следует отметить, что нелинейно-упругих характер деформирования материалов

ГБКМ существенно отличается от деформирования нитей, образующих тканевую структуру ГБКМ. Как правило, на диаграмме деформирования нитей начальный участок с низким модулем упругости крайне мал и им, как правило, пренебрегают (рис. 1.8). Связано это с тем, что в составе одиночных нитей, в отличие от тканей, волокна имеют практически прямолинейную форму, и их распрямления не происходит. В тканях же волокна изначально переплетены и при растяжении эффект упрочнения наступает при более высоких значения деформаций (2..3% против 0,1% в нитях).

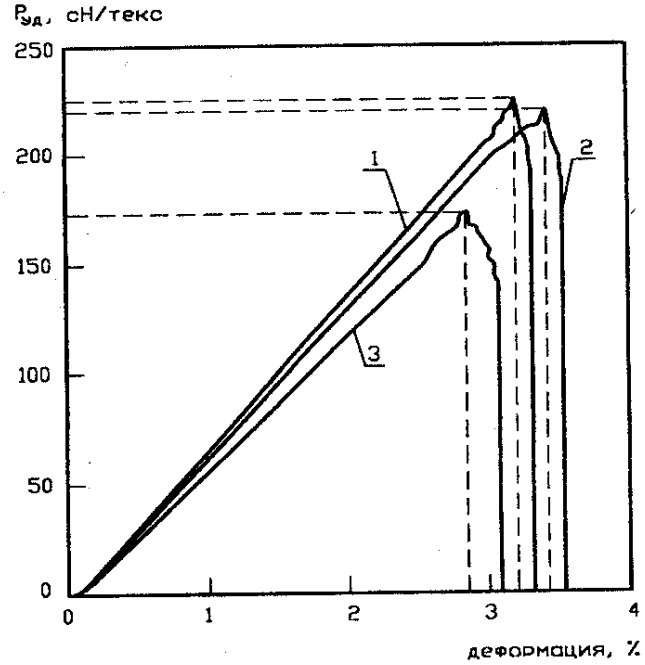


Рис.6 – Характерные осредненные диаграммы растяжения для арамид-комплексных нитей на основе волокон СВМ(3), Армос(2) и Русар(1)(по данным [1]).

Целью данного методического указания является формулировка математических моделей механического поведения гибких броневых композитных материалов, описание численного алгоритма решения задачи о прямом ударе ударника по композитной преграде, а также формулировка заданий для самостоятельного выполнения курсовых работ по моделированию ударно-волновых процессов в композитных материалах. как на основе разработанной программы ShockLarge, так и с помощью создания собственных программных кодов.

Для практического использования настоящих методических указаний рекомендуется ознакомиться с учебными пособиями [11,13,14], в которых изложены основы современной нелинейной механики сплошной среды при конечных деформациях, с использованием методов тензорного анализа.

2.2 Сведения из теории конечных деформаций

Модель основана на общих теоретических принципах построения моделей нелинейной механики сплошной среды при больших деформациях [11-13]. Рассматривая ГБКМ, как сплошную среду, которая под действием ударных воздействий преобразуется из отсчетной конфигурации $\overset{0}{K}$ в актуальную K, введем градиент деформаций **F**, преобразующий элементарный радиус-вектор $d\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ локальной окрестности всякой точки сплошной среды из $\overset{0}{K}$ в K [11-13]: $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\overset{0}{\mathbf{x}}$. Его представление в локальном базисе $\overset{\circ}{\mathbf{r}}^i$ отсчетной конфигурации имеет вид: $\mathbf{F} = F_{ij}\, \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}^j$. Используя полярное разложение [11] для градиента деформации, введем энергетические тензоры деформаций

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}}(\mathbf{F}) = \frac{1}{n - III}((\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^{\frac{n-III}{2}} - \mathbf{E}), \qquad n = I, II, IV, V\,, \tag{1}$$

Индекс n в обозначениях для энергетических тензоров, следуя обозначениям, предложенным в [11,13], записывается римскими цифрами. Тензор $\overset{(V)}{\mathbf{C}}$ совпадает с правым тензором деформации Коши-Грина **C**

$$\overset{(V)}{\mathbf{C}} = \mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{E}) = \varepsilon_{ij}\, \overset{\circ}{\mathbf{r}}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}^j\,, \tag{2}$$

$$\varepsilon_{ij} = (1/2)(g_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}) = \frac{1}{2}(F_{ik}F_{kj} - \overset{\circ}{g}_{ij})\,, \tag{3}$$

где ε_{ij} - компоненты тензора деформаций, $g_{ij} = \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_i$ и $\overset{\circ}{g}_{ij}$ - метрические матрицы в K и $\overset{0}{K}$.

Тензоры деформации представим в виде суммы упругих $\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^e$ и вязкопластических $\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^p$ деформаций (аддитивная модель деформаций)

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}} = \overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^e + \overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^p. \tag{4}$$

В отсчетной конфигурации $\overset{0}{K}$ напряженное состояние характеризуется первым тензором Пиола-Кирхгофа **P**:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}/\, J = P^{mn}\, \overset{\circ}{\mathbf{r}}_m \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_n\,, \qquad P^{mn} = T^{mi} F^n{}_i / J\,, \quad J = \rho / \overset{\circ}{\rho}, \tag{5}$$

где $\mathbf{T}$ — тензор истинных напряжений Коши, а T^{ij} — его компоненты в базисе $\mathbf{r}_i$ актуальной конфигурации: $\mathbf{T} = T^{ij}\, \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_j$, $\overset{\circ}{\rho}$ — плотность в отсчетной конфигурации, а ρ

– в актуальной конфигурации. Согласно классификации, введенной в [11-13], для тензора **C** парным является энергетический тензор напряжений $\overset{V}{\mathbf{T}}$

$$\overset{V}{\mathbf{T}} = \mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{F}^{-1T} = T^{ij}\,\overset{0}{\mathbf{r}}_i\otimes\overset{0}{\mathbf{r}}_j, \qquad (4)$$

имеющий те же компоненты T^{ij}, что и тензор **T**, но в базисе отсчетной конфигурации. Остальные энергетические тензоры напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$, соответствующие энергетическим тензорам деформации $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$, согласно [11-13] можно записать в единой форме

$$\mathbf{T} = \overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{E}^{-1}_{\mathbf{A}}}\cdot\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}}, \qquad \mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1}\cdot\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{E}^{-1}_{\mathbf{A}}}\cdot\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}}/J, \qquad (5)$$

где $\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{E}^{-1}_{\mathbf{A}}}$ – тензоры энергетической эквивалентности, зависящие только от **F** [11].

2.3 Определяющие соотношения для ортотропных упруго-пластических сред с конечными деформациями

Будем считать ГБКМ ортотропной упруго-пластической средой, удельная свободная энергия Гельмгольца ψ – потенциал которой выбирается в следующем виде

$$\overset{0}{\rho}\psi = \overset{0}{\rho}\psi(I^{(0)}_\alpha(\overset{(n)}{\mathbf{C}^e})) = \overset{0}{\rho}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{1}{2}l_{\alpha\alpha}(I^{(0)}_\alpha)^{2s_\alpha} + l_{3+\alpha}(I^{(0)}_{3+\alpha})^{s_{3+\alpha}}\right) + \overset{0}{\rho}\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{3} l_{\alpha\beta}I^{(0)}_\alpha I^{(0)}_\beta, \qquad (6)$$

где $I^{(0)}_\alpha(\overset{(n)}{\mathbf{C}^e}), \alpha = 1,...,6$ – инварианты тензора упругих деформаций относительно группы ортотропии [12,13]:

$$I^{(0)}_\alpha(\overset{(n)}{\mathbf{C}^e}) = \mathbf{e}^2_\alpha\cdot\cdot\overset{(n)}{\mathbf{C}^e} = \varepsilon^e_{\alpha\alpha}; \qquad I^{(0)}_{3+\alpha}(\overset{(n)}{\mathbf{C}^e}) = \frac{1}{2}\mathbf{O}_\alpha\cdot\cdot\overset{(n)}{\mathbf{C}^{e2}} = (\varepsilon^e_{\beta\gamma})^2, \qquad (7)$$

здесь обозначены тензоры $\mathbf{e}^2_\alpha = \mathbf{e}_\alpha\otimes\mathbf{e}_\alpha$, а $\mathbf{e}_\alpha$ – векторы декартова базиса, $\mathbf{O}_\alpha = \mathbf{e}_\beta\otimes\mathbf{e}_\gamma + \mathbf{e}_\gamma\otimes\mathbf{e}_\beta$, $\alpha\neq\beta\neq\gamma, \quad \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3$, здесь $l_{\alpha\alpha}, l_{\alpha\beta}$ - упругие константы, $s_\alpha, s_{3+\alpha}$, - параметры упругой нелинейности материала.

Энергетические тензоры напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ связаны с тензорами упругих деформаций $\overset{(n)}{\mathbf{C}^e}$ уравнением состояния: $\overset{V}{T} = \overset{(n)}{\mathbf{T}} = \rho\partial\psi/\partial\overset{(n)}{\mathbf{C}^e}$. Подставляя в это соотношение выражения (6) для потенциала ψ, получаем

$$\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}} = J\,{}^4\mathbf{M}\cdot\cdot\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{C}}{}^e \qquad (8)$$

где ${}^4\mathbf{M}$ - тензор нелинейных модулей упругости

$${}^4\mathbf{M} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\left(\hat{l}_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\alpha^2\otimes\mathbf{e}_\beta^2\right) + \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\hat{l}_{\alpha+3,\alpha+3}\,\mathbf{O}_\alpha\otimes\mathbf{O}_\alpha\right) \qquad (9)$$

здесь $\tilde{l}_{\alpha\beta}$, $\tilde{l}_{3+\alpha}$ - нелинейные модули упругости: $\hat{l}_{\alpha\alpha} = s_\alpha l_{\alpha\alpha}(I_\alpha^{(0)})^{2s_\alpha-2}$, $\hat{l}_{\alpha\beta} = l_{\alpha\beta}$, $\hat{l}_{\alpha+3,\alpha+3} = s_{\alpha+3}l_{\alpha+3,\alpha+3}(I_{\alpha+3}^{(0)})^{s_{\alpha+3}-1}$.

Дифференцируя по времени соотношение (8), получим представление определяющих соотношений в скоростях

$$\frac{d}{dt}\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}} = J\,{}^4\mathbf{M}\cdot\cdot({}^4\overset{(n)}{\tilde{\mathbf{X}}}\cdot\cdot\overset{0}{\nabla}\otimes\mathbf{v} - \frac{d\,\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{C}}{}^p}{dt}), \qquad (10)$$

где ${}^4\overset{(n)}{\tilde{\mathbf{X}}} = {}^4\overset{(n)}{\mathbf{X}} - \overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{C}}{}^e\otimes\mathbf{F}^{-1T}$, тензоры ${}^4\overset{(n)}{\mathbf{X}}$ зависят только от градиента деформаций $\mathbf{F}$, их выражения приведены в [11].

2.4 Соотношения пластического течения анизотропных ГБКМ при больших деформациях

Для моделирования пластических свойств ГБКМ применим теорию больших пластических деформаций [11-17], в том числе теорию конечных пластических деформаций для анизотропных сред, разработанную в [9,11-14]. Используя постулаты этой теории, полагаем, что в пространстве скалярных инвариантов Y_1^p существует поверхность течения, состоящая из N отдельных частей: $f_\beta = 0$, $\beta = 1,...,N$, где f_β — функции совместных инвариантов тензора напряжений и тензора пластических деформаций:

$$f_\beta = f_\beta(Y_\alpha^p, \theta, w_\alpha^p) \qquad \beta = 1,...,N, \qquad (11)$$

где

$$Y_\alpha^p = I_\alpha^{(o)}\left(\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}}_\gamma\right),\ \overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}}_\gamma = \overset{(n)}{\mathbf{T}} - H_\gamma\,\overset{(n)}{\mathbf{C}}{}^p, \qquad , \ \alpha = 1...6, \qquad (12)$$

— совместные инварианты, H_α — функции упрочнения, H_α^0 — модули упрочнения (константы), n_α - степени упрочнения. Для параметров упрочнения H_α, $\alpha = 1,2,4,5,6$ принимается степенная модель, а для параметра упрочнения при сжатии в поперечном к

слоям ткани направлении модель, учитывающая стабилизацию пластичности при предельном сжатии:

$$H_\alpha = H_\alpha^0\left(I_\alpha^{(0)}\left(\overset{(n)}{\mathbf{C}^p}\right)\right)^{n_\alpha},\ \alpha = 1,2,4,5,6,\ \ H_3 = H_3^0\left(1 - I_3^{(0)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}^p})/\varepsilon_{33C}^p\right)^{1-n_3}\left(I_3^{(0)}(\overset{(n)}{\mathbf{C}^p})\right)^{n_3},$$

где ε_{33C}^p - константа – деформация предельного поперечного сжатия ГБКМ.

Общее соотношение градиентальности для скоростей пластических деформаций таково:

$$\frac{d}{dt}\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{C}^p} = h\sum_{\alpha=1}^{N}\dot{\lambda}_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\overset{(n)}{\mathbf{T}}}, \qquad (13)$$

где $\dot{\lambda}_\alpha = \dot{\lambda}_\alpha(\overset{(n)}{\mathbf{T}},\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{C}^p},\dot{\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{C}^p}})$ — параметры нагружения, h – функция Хевисайда, являющаяся индикатором активного или пассивного нагружения (разгрузка). С учетом (19) соотношение (21) можно записать так: $\frac{d}{dt}\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{C}^p} = \sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha Y_{\alpha T}^p$, где $\psi_\alpha = h\sum_{\beta=1}^{N}\dot{\lambda}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial Y_\alpha^p}$, $Y_{\alpha T}^p = \frac{\partial Y_\alpha^p}{\partial\overset{(V)}{\mathbf{T}}}$. С учетом выражений (9) для инвариантов, эти уравнения для скоростей пластических деформаций принимают следующую форму:

$$\frac{d}{dt}\overset{(n)}{\mathbf{C}^p} = \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\psi_\alpha\mathbf{e}_\alpha^2 + \psi_{3+\alpha}(\mathbf{O}_\alpha\otimes\mathbf{O}_\alpha)\cdot\cdot\left(\overset{(n)}{\mathbf{T}} - H_\alpha\overset{(n)}{\mathbf{C}^p}\right)\right). \qquad (14)$$

Введем обозначения $I_{\gamma\pm}^{(O)}(\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}_\gamma}) = (|I_\gamma^{(O)}(\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}_\gamma})| \pm I_\gamma^{(O)}(\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}_\gamma}))/2,\quad \gamma = 1,2,3$. Пластические свойства ГБКМ, как было отмечено выше, проявляются только при сжатии вдоль направлений $O\bar{\mathbf{e}}_1$ и $O\bar{\mathbf{e}}_2$ укладки волокон (по основе и утку), при сжатии в поперечном направлении $O\bar{\mathbf{e}}_3$, а также при межслойных сдвигах. Данные эффекты анизотропной пластичности будем моделировать с помощью трех функций: описывающих пластичность при продольных сжатиях по основе и утку ГБКМ

$$2f_1(I_1^{(O)}(\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}_1}), I_2^{(O)}(\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}_2}), w_1^p, w_2^p) = \left(\frac{I_{1-}^{(O)}(\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}_1})}{\sigma_{1S}\left(w_1^p\right)}\right)^2 + \left(\frac{I_{2-}^{(O)}(\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}_1})}{\sigma_{2S}\left(w_2^p\right)}\right)^2 - 1 = 0, \qquad (15)$$

описывающей пластичность при поперечном сжатии ГБКМ

$$2 f_2(I_3^{(O)}(\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}}_3), w_3^p) = \left(\frac{I_{3-}^{(O)}(\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}}_3)}{\sigma_{3S}\left(w_3^p\right)} \right)^2 - 1 = 0\,, \qquad (16)$$

и описывающей пластичность при межслойных сдвигах ГБКМ

$$f_3(I_4^{(O)}(\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}}_4), I_5^{(O)}(\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}}_5), w_4^p, w_5^p) = \frac{I_4^{(O)}(\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}}_4)}{\sigma_{4S}^2\left(w_4^p\right)} + \frac{I_5^{(O)}(\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}}_5)}{\sigma_{5S}^2\left(w_5^p\right)} - 1 = 0\,, \quad (17)$$

здесь $\sigma_{\gamma S}\left(w_\gamma^p\right)$ - функции начальной текучести по различным направлениям, зависящие от параметров динамичности w_γ^p, которые описывают повышение пределов текучести при возрастании скорости нагружения:

$$\sigma_{\gamma S}\left(w_\gamma^p\right) = \sigma_{\gamma S}^0(1 + w_\gamma^p)\,, \qquad w_\gamma^p = b_\gamma \int_0^t (t-\tau)^{m_\gamma} I_\gamma^{(o)}(\overset{(n)}{\mathbf{T}}(\tau))d\tau\,, \qquad (18)$$

где $\sigma_{\gamma S}^0, b_\gamma, m_\gamma$ - константы, которые определяются экспериментально, далее будем полагать, что $m_\gamma = m,$ для всех γ.

С учетом (25) функции ψ_α принимают вид

$$\psi_\alpha = \frac{h\dot{\lambda}_\alpha I_{\alpha-}^{(O)}(\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}}_\alpha)}{\sigma_{\alpha S}^2\left(w_\alpha^p\right)}, \quad \alpha = 1,2 \quad \psi_3 = \frac{h\dot{\lambda}_2 I_{3-}^{(O)}(\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}}_3)}{\sigma_{3S}^2\left(w_3^p\right)}, \quad \psi_4 = \frac{h\dot{\lambda}_3}{2\sigma_{4S}^2\left(w_4^p\right)},$$

$$\psi_5 = h\dot{\lambda}_3 \frac{\partial f_3}{\partial J_5^{(S)p}} = \frac{h\dot{\lambda}_3}{2\sigma_{5S}^2\left(w_5^p\right)}, \quad \psi_6 = 0\,. \qquad (19)$$

2.5 Математическая формулировка динамической задачи взаимодействия ударника и преграды

Сформулируем в отсчетной конфигурации $\overset{0}{K}$ общую систему законов сохранения в лагранжевом описании, которая состоит из уравнений неразрывности, уравнений движения, уравнений совместности деформаций, а также кинематических соотношений, связывающих векторы скорости и перемещений [11]. К этой же системе присоединим определяющие соотношения (10), (14) для упругих и пластических деформаций, в результате получим следующую систему

$$
\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial \boldsymbol{\upsilon}}{\partial t} = \overset{0}{\nabla}\cdot\mathbf{P} + \overset{0}{\rho}\mathbf{f},\\
&\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \boldsymbol{\upsilon},\\
&\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \overset{0}{\nabla}\otimes\boldsymbol{\upsilon}^{\mathbf{T}},\\
&\frac{d}{dt}\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}} = J\,{}^{4}\mathbf{R}^{0}\cdot\cdot\left({}^{4}\overset{(n)}{\tilde{\mathbf{X}}}\cdot\cdot\overset{0}{\nabla}\otimes\mathbf{v} - \frac{d\,\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{C}^{p}}}{dt}\right),\\
&\frac{d}{dt}\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{C}^{p}} = \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\psi_{\alpha}\bar{\mathbf{e}}_{\alpha}^{2} + \frac{\psi_{3+\alpha}}{2}(\mathbf{O}_{\alpha}\otimes\mathbf{O}_{\alpha})\cdot\cdot\left(\overset{(n)}{\mathbf{T}} - H_{\alpha}\overset{(n)}{\mathbf{C}^{p}}\right)\right),
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

где $\overset{0}{\nabla}$ - набла-оператор в отсчетной конфигурации [17-18]. К этим уравнениям присоединяются соотношения (5) для тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа, уравнение неразрывности $\rho = \overset{0}{\rho}/\det\mathbf{F}$, соотношения (1) для энергетических тензоров деформаций, соотношения (19) для функций ψ_{γ}, соотношения (15)-(17) для условий пластичности и параметров нагружения $\dot{\lambda}_{\gamma}$. Остальные обозначения введены выше. Система (20) рассматривается относительно следующих неизвестных функций: $\boldsymbol{\upsilon}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{F}$, $\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}}$, $\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{C}^{p}}$.

К системе (21) присоединяем граничные условия идеального контакта на части $\overset{0}{\Sigma}_{1}$, а также условий на свободной поверхности $\overset{0}{\Sigma}_{2}$

$$
\overset{0}{\Sigma}_{1}: \quad \overset{\mathbf{0}}{\mathbf{n}}\cdot[\mathbf{P}] = 0, [\boldsymbol{\upsilon}] = 0; \qquad \overset{0}{\Sigma}_{2}: \quad \overset{\mathbf{0}}{\mathbf{n}}\cdot[\mathbf{P}] = 0, \qquad (21)
$$

Если происходит отскок ударника от преграды, то на поверхности контакта $\overset{0}{\Sigma}_{1}$ имеет место условие: $\overset{\circ}{n}\cdot[\mathbf{P}] = \mathbf{0}$. Начальные условия к системе (20):

$$
t = 0: \quad \boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_{\mathbf{0}}, \mathbf{u} = \mathbf{0}, \ \mathbf{F} = \mathbf{E}, \overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{C}^{p}} = \mathbf{0}, \overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{T}} = 0, \lambda_{\beta} = 0. \qquad (22)
$$

2.6 Математическая формулировка задачи при прямом соударении

Рассмотрим случай прямого соударения, который значительно упрощает моделирование и сводится к рассмотрению осесимметричному варианту постановки задачи (20)-(22). Далее рассмотрим только случай моделей материала при $n = V$. Будем полагать также, что область $\overset{\circ}{V}$ в $\overset{0}{K}$ и тип анизотропии (группа симметрии G_s ударника и

преграды) предполагают наличие оси симметрии OX^3 в лагранжевой системе координат X^i, в качестве которой выберем цилиндрическую систему координат: $X^1 = r$, $X^2 = \varphi$, $X^3 = z$. Тогда может быть сформулирована осесимметричная постановка указанной выше задачи (31)-(40). Запишем эту постановку в физических координатах, используя компонентную запись дифференциальных операторов и тензоров [19]:

$$\overset{\circ}{\rho}\frac{\partial rv_r}{\partial t} = \frac{\partial rP_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial rP_{rz}}{\partial z} - P_{\varphi\varphi},$$
$$\overset{\circ}{\rho}\frac{\partial rv_z}{\partial t} = \frac{\partial rP_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial rP_{zz}}{\partial z}, \qquad (23)$$
$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = v_r, \qquad \frac{\partial u_z}{\partial t} = v_z,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} T_{rr} \\ T_{\varphi\varphi} \\ T_{zz} \\ T_{rz} \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} M_{1111} & M_{1122} & M_{1133} & 0 \\ M_{1122} & M_{1111} & M_{1133} & 0 \\ M_{1133} & M_{1133} & M_{3333} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2M_{1313} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} e_{rr} \\ e_{\varphi\varphi} \\ e_{zz} \\ e_{rz} \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \varepsilon^p{}_{rr} \\ \varepsilon^p{}_{\varphi\varphi} \\ \varepsilon^p{}_{zz} \\ \varepsilon^p{}_{rz} \end{pmatrix}\right),$$

$$\frac{\partial F_{rr}}{\partial t} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \qquad \frac{\partial F_{\varphi\varphi}}{\partial t} = \frac{v_r}{r}, \qquad \frac{\partial F_{zz}}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \qquad \frac{\partial F_{rz}}{\partial t} = \frac{\partial v_r}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_{zr}}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial r},$$

$$\frac{\partial \varepsilon^p_{rr}}{\partial t} = \frac{h\dot{\lambda}_1}{\sigma^2_{1S}\left(w_1^p\right)}(T_{rr} - H_1\varepsilon^p_{rr}), \quad \frac{\partial \varepsilon^p_{\varphi\varphi}}{\partial t} = \frac{h\dot{\lambda}_1}{\sigma^2_{2S}\left(w_1^p\right)}(T_{\varphi\varphi} - H_2\varepsilon^p_{\varphi\varphi}).$$

Здесь $T_{11}=T_{rr}$, $T_{22}=T_{\varphi\varphi}$, $T_{33}=T_{zz}$ и T_{rz} — физические компоненты тензора **T** в актуальной конфигурации, а $e_{11}=e_{rr}$, $e_{22}=e_{\varphi\varphi}$, $e_{33}=e_{zz}$ и e_{rz} — физические компоненты тензора скоростей деформаций **D** [11], а $P_{11}=P_{rr}$, $P_{22}=P_{\varphi\varphi}$, $P_{33}=P_{zz}$ и P_{rz} - физические компоненты тензора Пиолы -Кирхгофа **P**:

$$P_{rr} = \Delta(T_{rr}F_{rr} + T_{rz}F_{rz}), \quad P_{\varphi\varphi} = \Delta(T_{\varphi\varphi}F_{\varphi\varphi}), \quad P_{zz} = \Delta(T_{rz}F_{zr} + T_{zz}F_{zz}),$$
$$P_{rz} = \Delta(T_{rr}F_{zr} + T_{rz}F_{zz}), \quad P_{zr} = \Delta(T_{rz}F_{rr} + T_{zz}F_{rz}), \qquad \Delta = F_{\varphi\varphi}(F_{rr}F_{zz} - F_{rz}F_{zr}), \qquad (24)$$

$$e_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}F_{rr} + \frac{\partial v_z}{\partial r}F_{zr}, \qquad e_{\varphi\varphi} = \frac{v_r}{r}F_{\varphi\varphi},$$
$$e_{zz} = \frac{\partial v_r}{\partial z}F_{rz} + \frac{\partial v_z}{\partial z}F_{zz}, \qquad e_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}F_{rz} + \frac{\partial v_z}{\partial z}F_{zr} + \frac{\partial v_z}{\partial r}F_{rr} + \frac{\partial v_r}{\partial z}F_{zz}\right).$$

Для параметра нагружения и пластических деформаций ε^p_{zz} в поперечном направлении и при межслойном сдвиге имеют место следующие соотношения, вытекающие из (16) и (17):

$$\varepsilon_{zz}^p = \frac{B}{1+B/\varepsilon_{33C}^p}; \qquad B = h\left(\frac{T_{zz}-\sigma_{3S}\left(w_3^p\right)}{H_3^0}\right)^{\frac{1}{1-n_3}}, \quad \varepsilon_{rz}^p = h\left(\frac{T_{rz}-\sigma_{4S}\left(w_4^p\right)}{H_4^0}\right)^{\frac{1}{1-n_4}},$$

$$\dot{\lambda}_1 = h\sigma_{1S}A_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_{rr}^p+\varepsilon_{\varphi\varphi}^p\right), \quad A_1 = \left(\frac{T_{rr}-H_1\varepsilon_{rr}^p}{\sigma_{1S}}+\frac{1}{\sigma_{2S}}\left(\sigma_{1S}^2-(T_{rr}-H_1\varepsilon_{rr}^p)^2\right)^{1/2}\right)^{-1},$$

$$H_1 = H_1^0\left|\varepsilon_{rr}^p\right|^{-n_1},\ H_2 = H_2^0\left|\varepsilon_{\varphi\varphi}^p\right|^{-n_2}\ \ H_3 = H_3^0\left|\varepsilon_{zz}^p\right|^{-n_3},\ \ H_4 = H_4^0\left|\varepsilon_{rz}^p\right|^{-n_4}, \qquad (25)$$

Будем далее полагать, что ударник является изотропным упругим телом, т.е. для него пластические деформации отсутствуют ($\varepsilon_{ij}^p = 0$).

Система уравнений (24)-(26) является замкнутой относительно 17 функций $u_r, u_z, v_r, v_z, F_{rr}, F_{zz}, F_{rz,}F_{zr}, F_{\varphi\varphi}, T_{rr}, T_{zz}, T_{rz,}T_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{rr}^p, \varepsilon_{zz}^p, \varepsilon_{\varphi\varphi}^p, \varepsilon_{rz}^p$, зависящих от r, z и t.

Граничные условия (22) на границе идеального контакта ударника и мишени и условия на свободной части поверхности имеют вид

$$\overset{0}{\Sigma}_1: \qquad [P_{zz}]=0,\ [P_{rz}]=0, \qquad [v_r]=0,\ [v_z]=0, \qquad (26)$$

$$\overset{0}{\Sigma}_2: \qquad n_rP_{rz}+n_zP_{zz}=0,\ \ n_rP_{rr}+n_zP_{zr}=0.$$

Начальные условия к системе (23):

$$\text{t=0: } (u_r,u_z,v_r,v_z,F_{rz,}F_{zr},T_{rr},T_{zz},T_{rz,}T_{\varphi\varphi},\varepsilon_{rr}^p,\varepsilon_{\varphi\varphi}^p)=(0,...,0)\ ,\ (F_{rr},F_{zz},F_{\varphi\varphi})=(1,1,1), \qquad (27)$$

для ударника при t=0: $v_z = V_b$, где V_b - начальная скорость ударника в момент начала взаимодействия с преградой.

2.7 Матричное представление системы уравнений

Вводя координатные столбцы, элементами которых являются величины, стоящие под знаками производных в системе (24):

$$\mathbf{U} = (u_r,u_z,r\rho v_r,r\rho v_z,F_{rr},F_{zz},F_{rz,}F_{zr},F_{\varphi\varphi},T_{rr},T_{zz},T_{rz,}T_{\varphi\varphi},\varepsilon_{rr}^p,\varepsilon_{zz}^p,\varepsilon_{\varphi\varphi}^p,\varepsilon_{rz}^p)^T,$$

$$\mathbf{F} = (0,0,rP_{rr},rP_{zr},v_r,0,0,v_z,0,v_r,v_r,v_r,v_r,0,0,0,0)^T,$$

$$\mathbf{K} = (0,0,-1,-1,-1,0,0,-1,0,-M_{1111}F_{rr},-M_{1133}F_{rr},-M_{1313}F_{rz},-M_{1122}F_{rr},0,0,0,0)^T,$$

$$\mathbf{G} = (0,0,0,0,0,0,0,0,0,v_z,v_z,v_v,v_z,0,0,0,0)^T,$$

$$\mathbf{S} = (0,0,0,0,0,0,0,0,0,-M_{1111}F_{zr},-M_{1133}F_{zr},-M_{1212}F_{rr},-M_{1122}F_{zr},0,0,0,0)^T,$$

$$\mathbf{W} = (0,0,rP_{rz},rP_{zz},0,v_z,v_r,0,0,v_z,v_z,v_z,v_z,0,0,0,0)^T, \qquad (28)$$

$$\mathbf{L} = (0,0,-1,-1,0,-1,-1,0,-1,-M_{1133}F_{zz},-M_{3333}F_{zz},-M_{1313}F_{zr},-M_{2233}F_{zz},0,0)^T,$$

$$\mathbf{V} = (0,0,0,0,0,0,0,0,0,v_r,v_r,v_r,v_r,0,0,0,0)^T,$$

$$\mathbf{N} = (0,0,0,0,0,0,0,0,0,-M_{1133}F_{rz},-M_{3333}F_{rz},-M_{1313}F_{zz},-M_{2233}F_{rz},0,0,0,0)^T,$$

$$\mathbf{P} = (v_r,v_z,-P_{\varphi\varphi},-P_{zr},0,0,0,0,v_r/r,P_{10},P_{11},P_{12},P_{13},P_{14},P_{15},P_{16},P_{17})^T,$$

представим эту систему уравнений в матричном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \bar{\mathbf{K}} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial r} + \bar{\mathbf{S}} \cdot \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial r} + \bar{\mathbf{L}} \cdot \frac{\partial \mathbf{W}(\mathbf{U})}{\partial z} + \bar{\mathbf{N}} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{U})}{\partial z} = \mathbf{P}(\mathbf{U}), \qquad (29)$$

где $\mathbf{U}$ — столбец неизвестных, $\bar{\mathbf{K}}, \bar{\mathbf{L}}, \bar{\mathbf{N}}, \bar{\mathbf{S}}$ — диагональные матрицы, ненулевыми элементами которых являются столбцы $\mathbf{K}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{N}$, а $\mathbf{P}(\mathbf{U})$ — вектор правой части, его элементы $P_{14} \ldots P_{17}$ определяются правой частью уравнений (23), а $P_{10} \ldots P_{13}$ имеют вид:

$$P_{10} = M_{1122}F_{\varphi\varphi}v_r/r - M_{1111}P_{14} - M_{1122}P_{16} - M_{1133}P_{15},$$
$$P_{11} = M_{2233}F_{\varphi\varphi}v_r/r - M_{3311}P_{14} - M_{3333}P_{16} - M_{2233}P_{15} \qquad (30)$$
$$P_{12} = M_{2222}F_{\varphi\varphi}v_r/r - M_{1122}P_{14} - M_{2233}P_{16} - M_{2222}P_{15}, \quad P_{13} = -2M_{1313}P_{17}$$

Для численного решения системы (29) с граничными и начальными условиями (27),(26) применялся метод ленточных адаптивных сеток, предложенный в работах [19-21].

2.8 Генерация адаптивных разностных сеток

Для численного решения системы (29) с граничными и начальными условиями (27), (26) введем для области решения V (см. Рис. 7) адаптивную разностную регулярную сетку, образованную четырехугольными криволинейными ячейками, которую далее будем называть ленточной адаптивной сеткой (ЛАС).

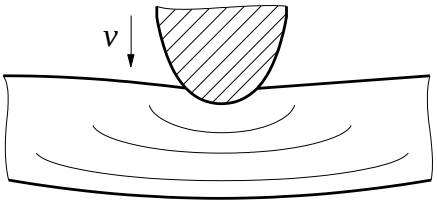


Рис. 7.а)

Схема соударения ударника и преграды

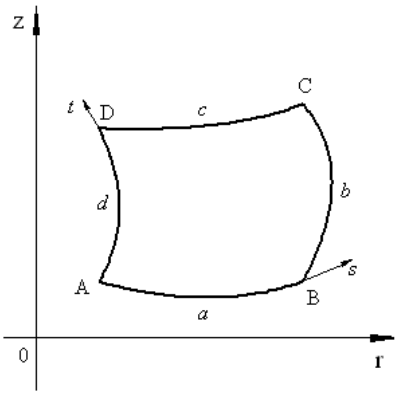


Рис.7б).

Адаптивная система координат

Алгоритм построения ЛАС следующий. Рассматриваемую область V разобьём на совокупность «крупных» криволинейных четырехугольников V_i, каждый из которых имеет вид, изображенный на Рис. 8 б. Способ такого разбиения может быть различным, в данной работе он вводился «вручную», т.е. задавался как исходные данные, что удобно для практического применения, поскольку любую геометрическую область V так или иначе перед решением задачи надо как-то задать. В каждой из областей V_i, можно ввести параметрическую систему координат (s,t), связанную с уравнениями 4-х кривых, ограничивающих этот четырехугольник, и определить преобразование:

$$z = f_z(s,t), \qquad r = f_r(s,t), \tag{31}$$

преобразующее криволинейный четырехугольник V_i в прямоугольник V_{st}. Полагаем, что в координатах (s,t) прямоугольник V_{st} занимает область $[0,1]\times[0,1]$. Также положим, что стороны a, b, c, d криволинейного четырехугольника V_i в координатах (z,r) представляют собой функции аргументов s, t:

$$\begin{cases} z = z_a(s) \\ r = r_a(s) \end{cases}, \quad \begin{cases} z = z_b(t) \\ r = r_b(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} z = z_c(s) \\ r = r_c(s) \end{cases}, \quad \begin{cases} z = z_d(t) \\ r = r_d(t) \end{cases}. \tag{32}$$

Аргументы s, t меняются в пределах $[0,1]$. Также предполагается, что выполнены условия согласования:

$$\begin{cases} f_z(s,0)=z_a(s), & f_r(s,0)=r_a(s), & f_z(s,1)=z_c(s), & f_r(s,1)=r_c(s), \\ f_z(0,t)=z_b(t), & f_r(0,t)=r_b(t), & f_z(1,t)=z_d(t), & f_r(1,t)=r_d(t), \end{cases} \tag{33}$$

$$\begin{cases} z_a(1)=z_b(0), & r_a(1)=r_b(0), & z_b(1)=z_c(1), & r_b(1)=r_c(1), \\ z_c(0)=z_d(1), & r_c(0)=r_d(1), & z_d(0)=z_a(0), & r_d(0)=r_a(0), \end{cases}$$

Тогда преобразование (31) имеет вид:

$$\begin{cases} f_z(s,t)=P_z(s,t)-(1-s)\big(P_z(0,t)-z_d(t)\big)-s\big(P_z(1,t)-z_b(t)\big) \\ f_r(s,t)=P_r(s,t)-(1-s)\big(P_r(0,t)-r_d(t)\big)-s\big(P_r(1,t)-r_b(t)\big) \end{cases}, \tag{34}$$

где

$$\begin{cases} P_z(s,t)=(1-t)z_a(s)+t\,z_c(s) \\ P_r(s,t)=(1-t)r_a(s)+t\,r_c(s) \end{cases}, \tag{35}$$

Имея это преобразование, определяем Якобиеву матрицу

$$Q=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial s}{\partial z} & \dfrac{\partial t}{\partial z} \\ \dfrac{\partial s}{\partial r} & \dfrac{\partial t}{\partial r} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial r}{\partial s} \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} & \dfrac{\partial r}{\partial t} \end{pmatrix}^{-1}, \tag{36}$$

с помощью которой переходим от координат (s,t) к координатам (z,r), причем всякая функция $\tilde{h}(z,r)$ при переходе к новым координатам преобразуется в функцию $h(s,t)=\tilde{h}(z,r)$, а ее производные преобразуются по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{h}(z,r)}{\partial z}&=\frac{\partial h(s,t)}{\partial z}=\frac{\partial h(s,t)}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}+\frac{\partial h(s,t)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z}, \\ \frac{\partial \tilde{h}(z,r)}{\partial r}&=\frac{\partial h(s,t)}{\partial r}=\frac{\partial h(s,t)}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial r}+\frac{\partial h(s,t)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial r}. \end{aligned} \tag{37}$$

В данной работе функции (32) представлялись кубическими сплайнами, заданными опорными точками. В каждом из криволинейных четырехугольников V_i вводилась

локальная разностная сетка, затем отдельные сетки для каждого четырехугольника собирались в единую разностную сетку, охватывающую всю область V.

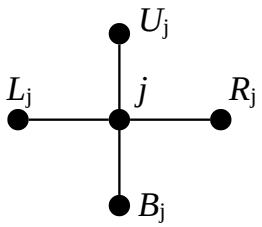


Рис. 8.

Узел разностной сетки с четырьмя соседними узлами в ЛАС

Отличительной особенностью алгоритма являлось то, что узлы единой разностной сетки нумеровались единым списком (сетка при этом описывается ленточным образом) и их характеристики (координаты, компоненты матрицы Якоби, номера соседних узлов) записывались в единый список.

Пронумеруем все узлы разностной сетки индексом $i = 0..(N+1)(M+1)-1$, поскольку общее количество узлов равно произведению количества $N+1$ точек горизонтального разбиения на количество $M+1$ точек вертикального разбиения всей области. Каждый узел обладает определенными характеристиками: координатами (s,t), координатами (z,r) и константами Якобиевой матрицы.

В традиционном численном дифференцировании производная $\frac{\partial h(z_i, r_j)}{\partial z}$ заменяется отношением вида $\frac{h(z_{i+1}, r_j) - h(z_i, r_j)}{z_{i+1} - z_i}$ (правая разность). Выражение в знаменателе этой дроби является шагом разностной сетки между точками z_{i+1} и z_i. Но при использовании модифицированный разностной сетки, построенной для криволинейной области, этот шаг не только не постоянный, а еще и зависит от z_i, r_j. Более конкретно, этот шаг равен разности соответствующих координат соседних узлов разностной сетки.

Аппроксимация правой разностью будет иметь вид:

$$\frac{\partial h(s_i, t_j)}{\partial s} \approx \frac{h(s_{i+}, t_j) - h(s_i, t_j)}{s_{i+} - s_i}, \qquad (38)$$

где индекс $i+$ относится к узлу, ближайшему справа для узла с индексом i.

Следовательно, необходимо введение списков для хранения номеров соседних узлов для каждого узла. В общем случае таких списков необходимо 4 штуки: номера левого, правого, верхнего и нижнего соседних узлов (см. Рис. 9). Числа, хранящиеся в данных списках, будут номерами соответствующих узлов (от 0 до $\left(\left(N+1\right)\left(M+1\right)-1\right)$).

После построения общего разбиения пространства на горизонтальные и вертикальные линии, необходимо исключить из рассмотрения те узлы, которые не должны участвовать в решении задачи (численном дифференцировании). В частности, это могут быть узлы, не входящие ни в одну из криволинейных областей. Это вносит необходимость во введении еще одного списка – списка номеров узлов, входящих в область расчета. Назовем этот список A – список активных узлов. Количество его элементов обозначим P, $P \le \left(N+1\right)\left(M+1\right)$.

Отметим, что «выбрасывание» некоторых узлов из сетки образует внутренние «островки» с границами.

Следует также учитывать, что некоторые точки-соседи могут отсутствовать для определенных узлов. Так, для узлов, лежащих на границе пространства, соседей нет с одной стороны, а для угловых точек – с двух сторон. Более того, исключенные из рассмотрения точки должны быть исключены из всех ссылок на них, поскольку они не принимают участие в расчетах. Это требует введения псевдо-номера для таких отсутствующих точек. Обозначим этот номер символом $NULL$. Конкретной его величиной не будет задаваться, поскольку это относится к программной реализации алгоритма. Стоит только отметить, что данный номер заведомо должен быть не из области $\left[0;\left(N+1\right)\left(M+1\right)-1\right]$.

Так как в рассмотрение входят только узлы из активного списка A, имеет смысл ввести обозначение для индексов этих узлов j. В дальнейшем для обозначения i-го активного узла будем использовать символ j.

На Рис.10 показан пример разбивки, при которой некоторые узлы были исключены из рассмотрения. Номера этих узлов, ссылки на них, а также ссылки на правых соседей на правой границе (отмечена жирным) равны $NULL$.

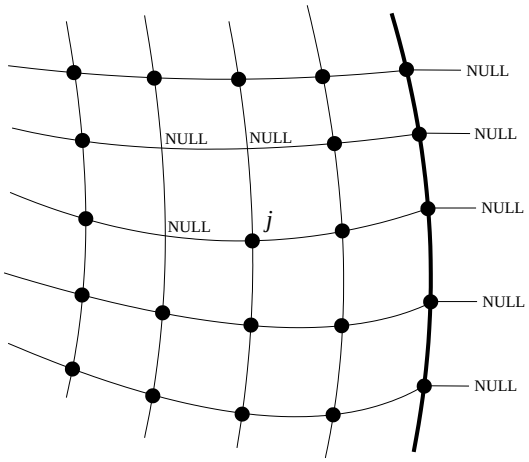


Рис. 9.

Участок криволинейной сетки с краем

Введем обозначение для сокращения последующих записей. Обозначим величину функции в точке j от прямолинейных координат (s,t) $f(S_j,T_j)$ символом f_j.

Получим выражения для аппроксимаций производных по s, t для точки с номером $j \neq NULL$.

Аппроксимация правой разностью имеет вид:

$$\frac{\partial f(S_j,T_j)}{\partial s} \approx \frac{f_{R_j} - f_j}{S_{R_j} - S_j}, \qquad R_j \neq NULL, \tag{39}$$

$$\frac{\partial f(S_j,T_j)}{\partial t} \approx \frac{f_{U_j} - f_j}{T_{U_j} - T_j}, \qquad U_j \neq NULL. \tag{40}$$

Аппроксимация левой разностью, аналогично, имеет вид:

$$\frac{\partial f(S_j,T_j)}{\partial s} \approx \frac{f_j - f_{L_j}}{S_j - S_{L_j}}, \qquad L_j \neq NULL, \tag{41}$$

$$\frac{\partial f(S_j,T_j)}{\partial t} \approx \frac{f_j - f_{B_j}}{T_j - T_{B_j}}, \qquad B_j \neq NULL. \tag{42}$$

Аппроксимация центральной разностью:

$$\frac{\partial f(S_j,T_j)}{\partial s} \approx \frac{f_{R_j} - f_{L_j}}{2(S_{R_j} - S_{L_j})}, \qquad R_j \neq NULL, \quad L_j \neq NULL, \tag{43}$$

$$\frac{\partial f(S_j,T_j)}{\partial t} \approx \frac{f_{U_j} - f_{B_j}}{2(T_{U_j} - T_{B_j})}, \qquad U_j \neq NULL, \quad B_j \neq NULL. \tag{44}$$

Если у узла j отсутствует сосед, участвующий в конечноразностной формуле, то ею пользоваться нельзя. В этом случае нужно перейти на другую формулу: вместо правой разности использовать левую, если правого соседа нет, а левый есть.

С учетом введенных обозначений перепишем теперь аппроксимацию производных для функций от координат (z,r), то есть в исходных криволинейных координатах.

Аппроксимация правой разностью:

$$\frac{\partial f(\mathrm{Z}_j,\mathrm{R}_j)}{\partial z} \approx \frac{f_{R_j} - f_j}{S_{R_j} - S_j} Q_{11j} + \frac{f_{U_j} - f_j}{T_{U_j} - T_j} Q_{12j}, \tag{45}$$

$$\frac{\partial f(\mathrm{Z}_j,\mathrm{R}_j)}{\partial r} \approx \frac{f_{R_j} - f_j}{S_{R_j} - S_j} Q_{21j} + \frac{f_{U_j} - f_j}{T_{U_j} - T_j} Q_{22j}. \tag{46}$$

Аппроксимация левой разностью:

$$\frac{\partial f(\mathrm{Z}_j,\mathrm{R}_j)}{\partial z} \approx \frac{f_j - f_{L_j}}{S_j - S_{L_j}} Q_{11j} + \frac{f_j - f_{B_j}}{T_j - T_{B_j}} Q_{12j}, \tag{47}$$

$$\frac{\partial f(\mathrm{Z}_j,\mathrm{R}_j)}{\partial r} \approx \frac{f_j - f_{L_j}}{S_j - S_{L_j}} Q_{21j} + \frac{f_j - f_{B_j}}{T_j - T_{B_j}} Q_{22j}. \tag{48}$$

Аппроксимация центральной разностью:

$$\frac{\partial f(\mathrm{Z}_j,\mathrm{R}_j)}{\partial z} \approx \frac{f_{R_j} - f_{L_j}}{2(S_{R_j} - S_{L_j})} Q_{11j} + \frac{f_{U_j} - f_{B_j}}{2(T_{U_j} - T_{B_j})} Q_{12j}, \tag{49}$$

$$\frac{\partial f(\mathrm{Z}_j,\mathrm{R}_j)}{\partial r} \approx \frac{f_{R_j} - f_{L_j}}{2(S_{R_j} - S_{L_j})} Q_{21j} + \frac{f_{U_j} - f_{B_j}}{2(T_{U_j} - T_{B_j})} Q_{22j}. \tag{50}$$

2.9 Разностная схема метода предиктор-корректор

На основе описанной выше методики построим разностную схему для решения поставленной задачи. Будем пользоваться схемой, основанной на двухшаговой схеме решения недивергентных систем.

Рассмотрим шаги предиктора, корректора и шаг сглаживания, который нужен для устранения нефизических осцилляций, возникающих как побочный эффект двухшагового метода.

Шаг 1 предиктор:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_j^{n+1/2} = \mathbf{U}_j^n &- \Delta t\ \mathbf{K}_j^n\left(\frac{\mathbf{Y}(\mathbf{U}_{R_j}^n)-\mathbf{Y}(\mathbf{U}_j^n)}{S_{R_j}-S_j}Q_{21j}+\frac{\mathbf{Y}(\mathbf{U}_{U_j}^n)-\mathbf{Y}(\mathbf{U}_j^n)}{T_{U_j}-T_j}Q_{22j}\right)-\\ &- \Delta t\ \mathbf{S}_j^n\left(\frac{\mathbf{G}(\mathbf{U}_{R_j}^n)-\mathbf{G}(\mathbf{U}_j^n)}{S_{R_j}-S_j}Q_{21j}+\frac{\mathbf{G}(\mathbf{U}_{U_j}^n)-\mathbf{G}(\mathbf{U}_j^n)}{T_{U_j}-T_j}Q_{22j}\right)-\\ &- \Delta t\ \mathbf{L}_j^n\left(\frac{\mathbf{W}(\mathbf{U}_{R_j}^n)-\mathbf{W}(\mathbf{U}_j^n)}{S_{R_j}-S_j}Q_{11j}+\frac{\mathbf{W}(\mathbf{U}_{U_j}^n)-\mathbf{W}(\mathbf{U}_j^n)}{T_{U_j}-T_j}Q_{12j}\right)-\\ &- \Delta t\ \mathbf{N}_j^n\left(\frac{\mathbf{V}(\mathbf{U}_{R_j}^n)-\mathbf{V}(\mathbf{U}_j^n)}{S_{R_j}-S_j}Q_{11j}+\frac{\mathbf{V}(\mathbf{U}_{U_j}^n)-\mathbf{V}(\mathbf{U}_j^n)}{T_{U_j}-T_j}Q_{12j}\right).\end{aligned} \tag{51}$$

Шаг 2 корректор:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}_j^{n+1} = &\frac{1}{2}\left(\mathbf{U}_j^{n+1/2}+\mathbf{U}_j^n\right)-\\ &-\frac{\Delta t}{2}\ \mathbf{K}_j^{n+1/2}\left(\frac{\mathbf{Y}(\mathbf{U}_j^{n+1/2})-\mathbf{Y}(\mathbf{U}_{L_j}^{n+1/2})}{S_j-S_{L_j}}Q_{21j}+\frac{\mathbf{Y}(\mathbf{U}_j^{n+1/2})-\mathbf{Y}(\mathbf{U}_{B_j}^{n+1/2})}{T_j-T_{B_j}}Q_{22j}\right)-\\ &-\frac{\Delta t}{2}\ \mathbf{S}_j^{n+1/2}\left(\frac{\mathbf{G}(\mathbf{U}_j^{n+1/2})-\mathbf{G}(\mathbf{U}_{L_j}^{n+1/2})}{S_j-S_{L_j}}Q_{21j}+\frac{\mathbf{G}(\mathbf{U}_j^{n+1/2})-\mathbf{G}(\mathbf{U}_{B_j}^{n+1/2})}{T_j-T_{B_j}}Q_{22j}\right)-\\ &-\frac{\Delta t}{2}\ \mathbf{L}_j^{n+1/2}\left(\frac{\mathbf{W}(\mathbf{U}_j^{n+1/2})-\mathbf{W}(\mathbf{U}_{L_j}^{n+1/2})}{S_j-S_{L_j}}Q_{11j}+\frac{\mathbf{W}(\mathbf{U}_j^{n+1/2})-\mathbf{W}(\mathbf{U}_{B_j}^{n+1/2})}{T_j-T_{B_j}}Q_{12j}\right)-\\ &-\frac{\Delta t}{2}\ \mathbf{N}_j^{n+1/2}\left(\frac{\mathbf{V}(\mathbf{U}_j^{n+1/2})-\mathbf{V}(\mathbf{U}_{L_j}^{n+1/2})}{S_j-S_{L_j}}Q_{11j}+\frac{\mathbf{V}(\mathbf{U}_j^{n+1/2})-\mathbf{V}(\mathbf{U}_{B_j}^{n+1/2})}{T_j-T_{B_j}}Q_{12j}\right)+\\ &+\Delta t\ \mathbf{P}\left(\mathbf{U}_j^n\right).\end{aligned} \tag{52}$$

Шаг 3 искусственная вязкость.

Для устранения эффекта нефизической осцилляции, возникающего из-за разности значений в четных и нечетных ячейках сетки, введем в задачу искусственную вязкость:

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \tilde{\mathbf{U}}_j^{n+1} + \alpha \mathbf{L}\left(\mathbf{U}_j^n\right), \tag{53}$$

где

$$\mathbf{L}\left(\mathbf{U}_j^n\right) = \mathbf{U}_{R_j}^n + \mathbf{U}_{L_j}^n - 4\mathbf{U}_j^n + \mathbf{U}_{U_j}^n + \mathbf{U}_{B_j}^n, \tag{54}$$

параметр α – коэффициент искусственной вязкости, который выбирался переменным в зависимости от направления фронта ударной волны.

2.10 Моделирование процесса динамического разрушения преграды из ГБКМ

Представленные выше уравнения (51)-(54) позволяют рассчитывать все характеристики ударника и мишени при непрерывных процессах деформирования, т.е. при отсутствии разрушения. Однако сам процесс проникания ударников в преграду как раз и состоит из стадий зарождения трещин, их распространения, и образования отверстия в преграде. При численных расчетах этот процесс моделируется следующим образом.

1. Этап зарождения трещин. В процессе непрерывного деформирования в каждой расчетной точке ударника и мишени проверяется условия отсутствия разрушения: $\pi < 1$, где π – параметр повреждаемости материала, представляющий собой функции от инвариантов тензора истинных напряжений Коши (силовой критерий):

$$\pi = \pi\left(I_\gamma^{(O)}(\mathbf{T})\right). \tag{55}$$

Инварианты выбираются в соответствии с группой симметрии рассматриваемого материала (изотропные или ортотропные). Критерий прочности преграды в этом случае подобен критерию пластичности, в которых пределы текучести заменяются на соответствующие пределы прочности.

Для ортотропных ГБКМ, на основе тканевых структур, разрушение будем считать происходящим только, если происходит разрыв нитей по основе или утку тканей, тогда по аналогии с (15) введем параметр повреждаемости:

$$\pi = \left(\frac{I_{1+}^{(O)}(\mathbf{T})}{\sigma_{1T}}\right)^2 + \left(\frac{I_{2+}^{(O)}(\mathbf{T})}{\sigma_{2T}}\right)^2, \tag{56}$$

где σ_{1T}, σ_{2T} – пределы прочности на растяжение по основе и утку.

2. Этап распространения трещин. Если в какой-либо расчетной точке выполняется условие: $\pi \geq 1$, то это означает, что в локальной окрестности этой точки происходит зарождение макротрещины, которая затем начинает расти. При численном счете зарождение макротрещины моделируется обнулением компонент тензора напряжений Коши в данной расчетной точке: вместо определяющих соотношений упруго-пластичности в ней задаются следующие условия: $T_{ij} = 0$.

Распространение трещины в преграде (или ударнике) происходит, если после выполнения предельного условия $\pi\left(x_*^i, t_*\right) \geq 1$ в точке x_*^i в момент времени t_* в какой-либо из ее соседних точек y_*^i в момент времени $t_* + \Delta t$ реализуется то же самое условие: $\pi\left(y_*^i, t_* + \Delta t\right) \geq 1$. В этом случае происходит прирост трещины на величину $\Delta x_*^i = y_*^i - x_*^i$.

Этап разлета осколков и проникания ударника в образовавшееся отверстие в данной работе не рассматривается.

2.11. Программа ShockLarge для численного моделирования ударно-волнового деформирования ГБКМ при прямом ударе

Разработана программа ShockLarge, предназначенная для численного моделирования ударно-волнового деформирования ГБКМ при ударных воздействиях в рамках осесимметричного нагружения. Программа комплекс состоит из 3 основных модулей: препроцессора, модуля решения, постпроцессора. Разработка велась на языке C++ с помощью Microsoft Visual Studio-2008.

Препроцессор.

Модуль препроцессора состоит из модуля ввода данных о свойствах ГБКМ, ударника, ввода начальных данных, модуля генерации геометрии, модуля построения конечно-разностной сетки.

Модуль ввода данных позволяет ввести все упругие константы ГБКМ, константы, характеризующие вязкоупругие свойства материалов, упруго-пластические свойства, а также прочностные свойства ГБКМ.

Модуль генерации геометрии рассчитывает и формирует набор узловых точек для областей, занятых ударником и преградой в начальном состоянии, в том числе для случая многослойной преграды. Сгенерированные узловые точки являются входными данными для модуля построения конечно-разностной сетки.

Модуль построения конечно-разностной сетки основан на построении сетки для ударника и преграды, которые имеют осесимметричную форму.

Модуль решения.

Модуль решения состоит из модулей вычисления изменения характеристик материалов в процессе упруго-пластического нагружения, а также вследствие возникновения разрушения, модулей расчета значений неизвестных функций на этапах предиктора и корректора, модуля расчета решения с учетом правой части системы уравнений, модуля применения граничных условий, в том числе с переменной границей (отскок ударника), модуля применения искусственной вязкости.

Постпроцессор.

Модуль постпроцессора состоит из графического модуля отображений распределения всех полей неизвестных функций в области ударника и мишени (в отсчетной и актуальной конфигурации). В качестве графического модуля использован программный продукт Uniplay, разработанный на кафедре ФН-11, и использующий библиотеки OpenGL для отображения трехмерных объектов.

На рисунке 10 показана блок-схема разработанного программы ShockLarge.

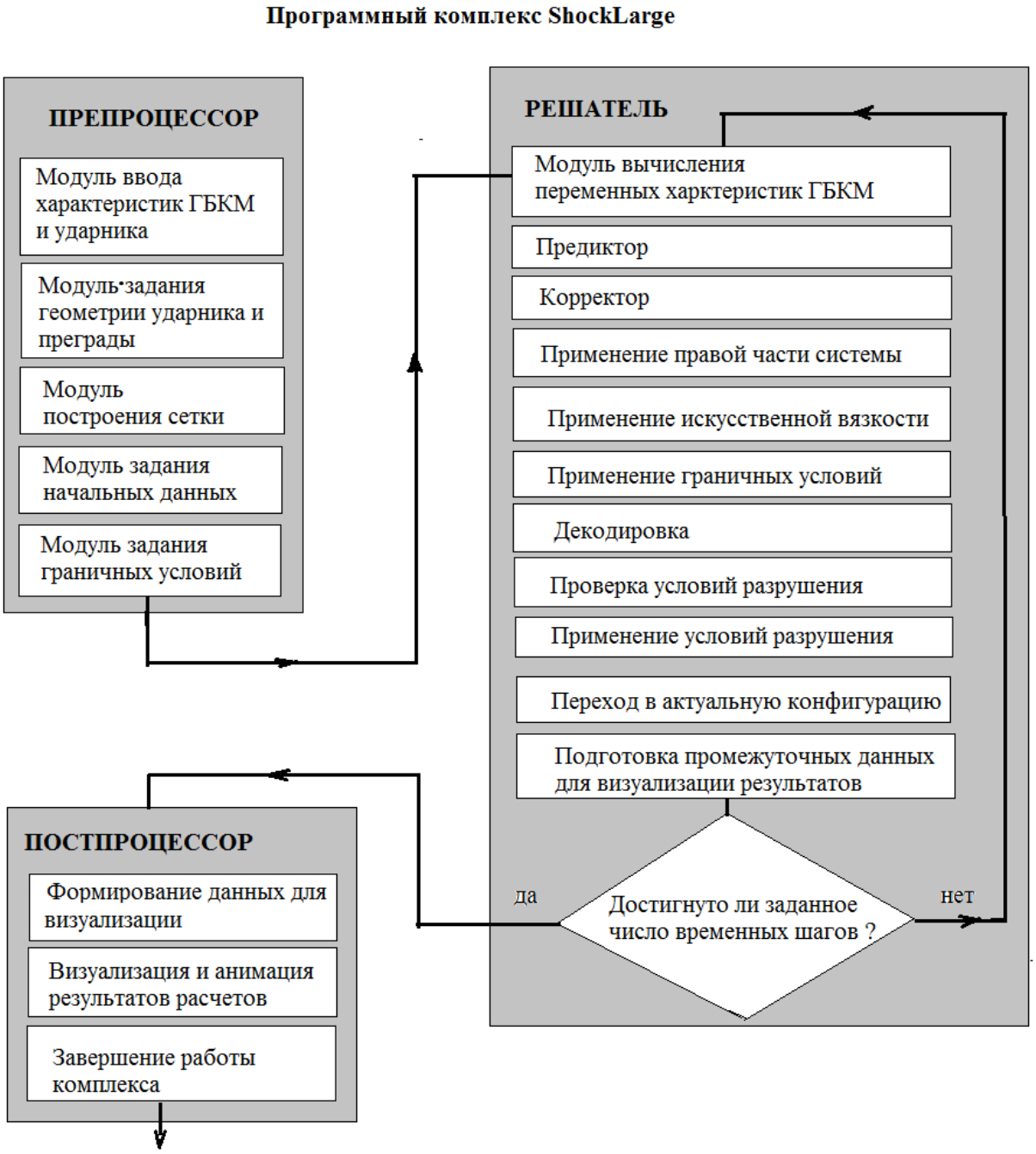


Рис. 10.

Блок-схема разработанного программного комплекса ShockLarge

3 ПРИМЕР И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

3.1 Исходные данные для численного моделирования

В качестве численного примера применения разработанной модели и численного алгоритма рассмотрим задачу о прямом ударе ударника по преграде из ортотропного ГБКМ. Ударник считаем изотропной упругой средой.

При расчетах выберем следующие значения констант, характеризующих геометрические размеры преграды и ударника:

расчетный радиус преграды $r_N = 2 \cdot 10^{-2}$ м,

максимальный радиус ударника $r_b = 4 \cdot 10^{-3}$ м;

минимальный радиус ударника выбирался равным $r_a = 4 \cdot 10^{-3}$ м (цилиндрический ударник) и $r_a = 2 \cdot 10^{-3}$ м (с оживальной формой закругления передней части),

длина ударника $z_b = 10^{-2}$ м,

толщина преграды z_t варьировалась от $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ м до $8 \cdot 10^{-3}$ м.

Примем следующие значения констант для ударника (сталь):

$$M_{1111} = 200\,\text{ГПа},\ M_{2222} = 60\,\text{ГПа},\ M_{3333} = 77\,\text{ГПа},\ \overset{o}{\rho} = 7800\,\text{кг/м3},$$

и для ГБКМ:

$$M_{1111} = M_{2222} = 50\,\text{ГПа},\ M_{3333} = 0{,}5\,\text{ГПа},\ M_{1122} = 1{,}5\,\text{ГПа},$$

$$M_{1133} = M_{2233} = 0{,}015\,\text{ГПа},\ M_{1313} = 2{,}5\,\text{ГПа},\ \overset{o}{\rho} = 1500\ \text{кг/м3},$$

$$\sigma_{1S} = 10\,\text{МПа},\ H_1^0 = 0{,}2\,\text{ГПа},\ n_1 = 0{,}9,$$

$$\sigma_{2S} = 10\,\text{МПа},\ H_2^0 = 0{,}2\,\text{ГПа},\ n_2 = 0{,}9,$$

$$\sigma_{3S} = 0{,}1\,\text{МПа},\ H_3^0 = 2\,\text{ГПа},\ n_3 = 0{,}9,$$

$$\sigma_{4S} = 100\,\text{МПа},\ H_4^0 = 0{,}2\,\text{ГПа},\ n_4 = 0{,}9,$$

$$\sigma_{1T} = 0{,}5\,\text{ГПа},\ \sigma_{2T} = 0{,}5\,\text{ГПа}.$$

Начальную скорость ударника по оси OZ в момент встречи с преградой при нормальном ударе варьируем в диапазоне от $V_b = 300$ м/с до 700 м/с.

3.2 Результаты расчетов для цилиндрического ударника

На Рис.12 представлены некоторые из полученных результатов расчетов для ударника цилиндрической формы. Показана общая картина взаимодействия ударника и преграды из ГБКМ в различные моменты времени проникания. Расчеты на Рис.11а проведены без учета разрушения ГБКМ, а на Рис.11 б – с учетом разрушения по методу, изложенному выше.

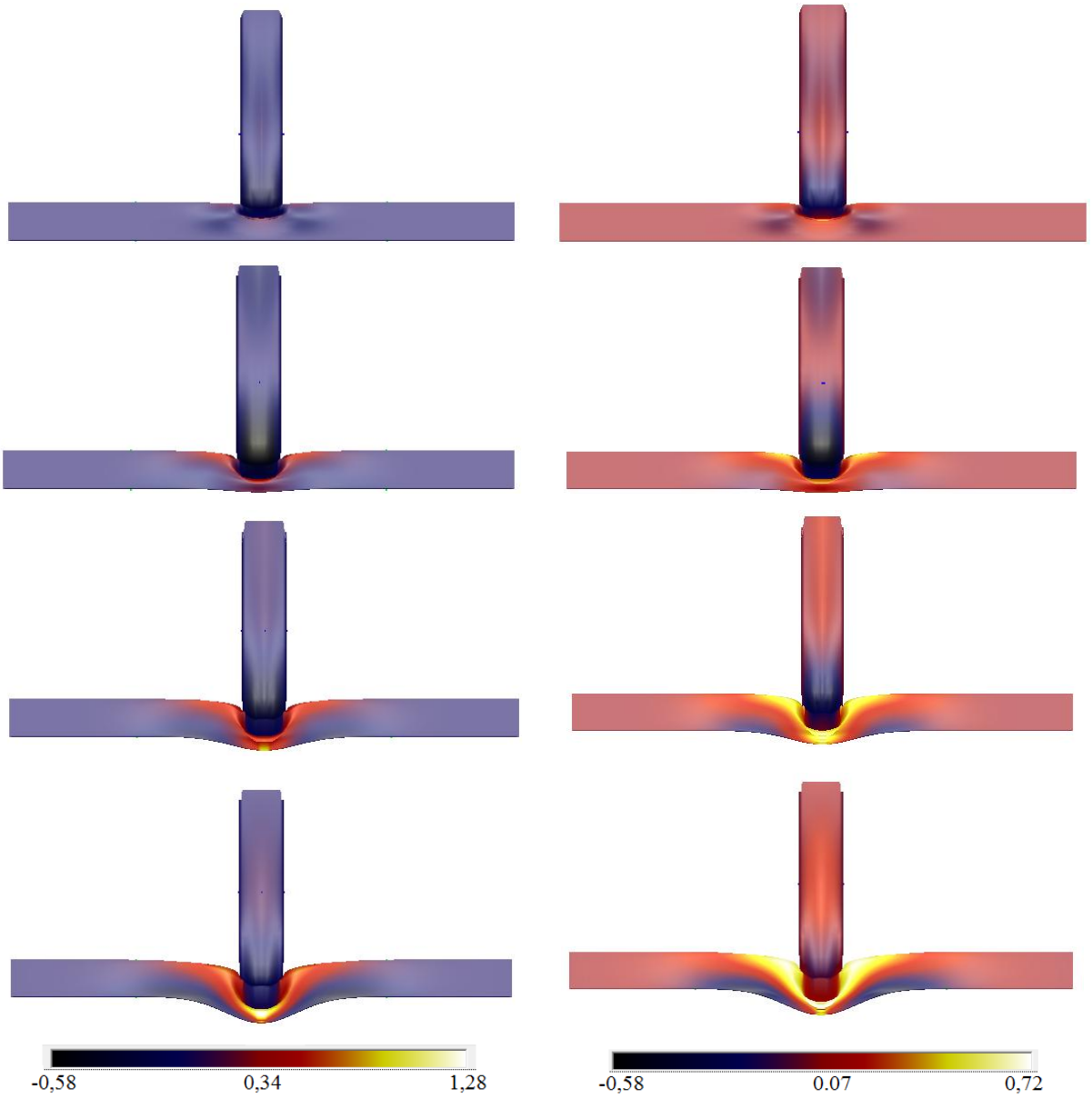


Рис. 11

Картина проникания ударника в многослойную преграду (показано распределение радиального напряжения T_{rr} (ГПа) для различных моментов времени $t = 1.34; 3.01; 4.7; 6.7$ мкс) без учета (а) и с учетом разрушения (б)

Ударно-волновые процессы рассматривались как в ударнике, так и в композитной пластине, при этом допускался отскок ударника от композита и вторичное возможное их взаимодействие. После начала соударения из-за относительно малой массы композитная пластина разгоняется и приобретает скорость $v_z \approx 450$ м/с – большую, чем начальная скорость ударника V_b. Из-за больших деформаций на лицевой поверхности преграды образуется воронка, в которую проникает ударник. В ударнике и преграде после начала взаимодействия возникают волны сжатия, распространяющиеся по направлению к

тыльной стороне преграды и ударника, соответственно. Максимальное значение напряжения сжатия в ударнике достигает $T_{zz} \approx 2.5$ ГПа, а в преграде $T_{zz} \approx 1.7$ ГПа. После отражения волны сжатия от тыльной поверхности ударника возникает отраженная волна, распространяющаяся в сторону преграды. За рассмотренное время $t_{\max} = 6$ мкс волна сжатия в ударнике 3 раза отражается от тыльной поверхности, в тоже время в преграде в силу существенно меньшей поперечной скорости звука ГБКМ (≈ 550 м/с по сравнению с 5 км/с в ударнике) волна сжатия за время $t_{\max} = 6$ мкс не успевает отразиться ни разу от тыльной поверхности и волна сжатия лишь немного обгоняет сам ударник, проникающий в преграду.

Максимальные амплитудные значения компонент тензора деформаций, характеризующие формоизменение поперечного сжатия-растяжения достигают значений $F_{zz} = 0.4...1.5$, растяжения-сжатия в кольцевом направлении $F_{\varphi\varphi} = 0.98...1.02$ и в радиальном направлении $F_{rr} = 15$ – на тыльной стороне преграды при $t = 6.4$ мкс в зоне проникания ударника, что соответствует эффекту вытягивания волокон из ткани ГБКМ. В этих же зонах достигают максимальных значений компоненты $T_{\varphi\varphi}$ и T_{rr} тензора напряжений. Эти значения положительны, и именно они являются причиной разрыва волокон ткани и разрушения композитной пластины в целом при ударе. Напряжения T_{zz} до возникновения отраженной волны являются сжимающими. Их уровень лимитируется пределом текучести σ_{1S}, определяющим появление пластической деформации ε_{zz}^{p}. От величины пластической деформации ε_{zz}^{p} зависит и значение скорости v_z движения тыльной поверхности, являющейся важной характеристикой ударной стойкости композита. Увеличение значения пластической деформации приводит к снижению скорости тыльной поверхности. В целом наличие больших деформаций приводит к существенному перераспределению напряженного состояния в композите.

3.3 Результаты расчетов для заостренного ударника

На Рис.12-17 представлены некоторые из полученных результатов расчетов для ударника с заостренной (оживальной) формой передней части при скорости удара $V_b = 300$ м/с. Толщина преграды 2,5 мм. Показана общая картина взаимодействия ударника и преграды из ГБКМ в различные моменты времени проникания, от начального момента взаимодействия до разрушения преграды с образованием отверстия.

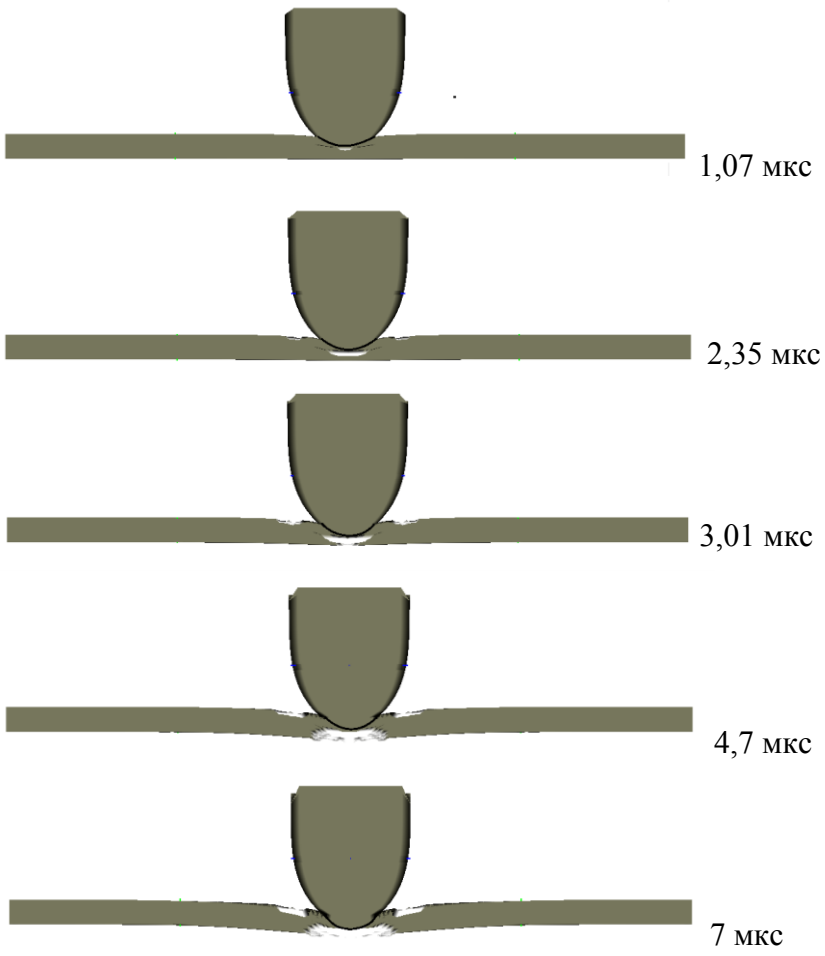
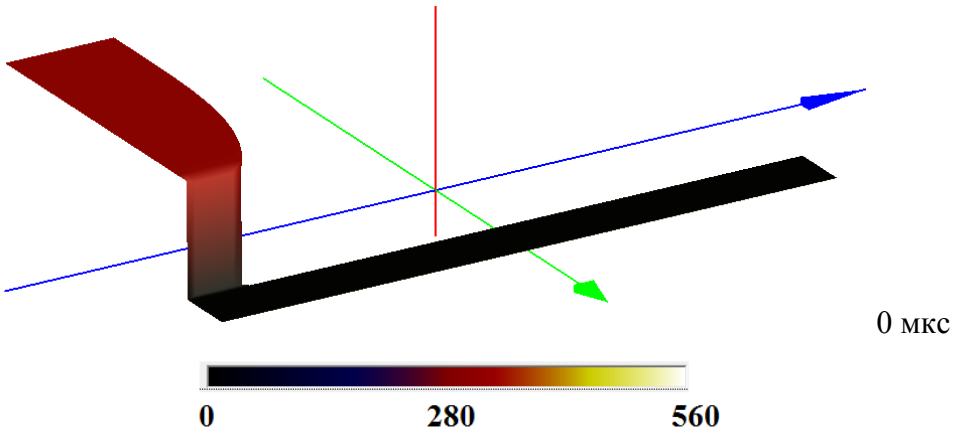


Рис. 12.

Картина разрушения преграды из ГБКМ толщиной 2,5 мм при воздействии ударника со скоростью 300 м/с



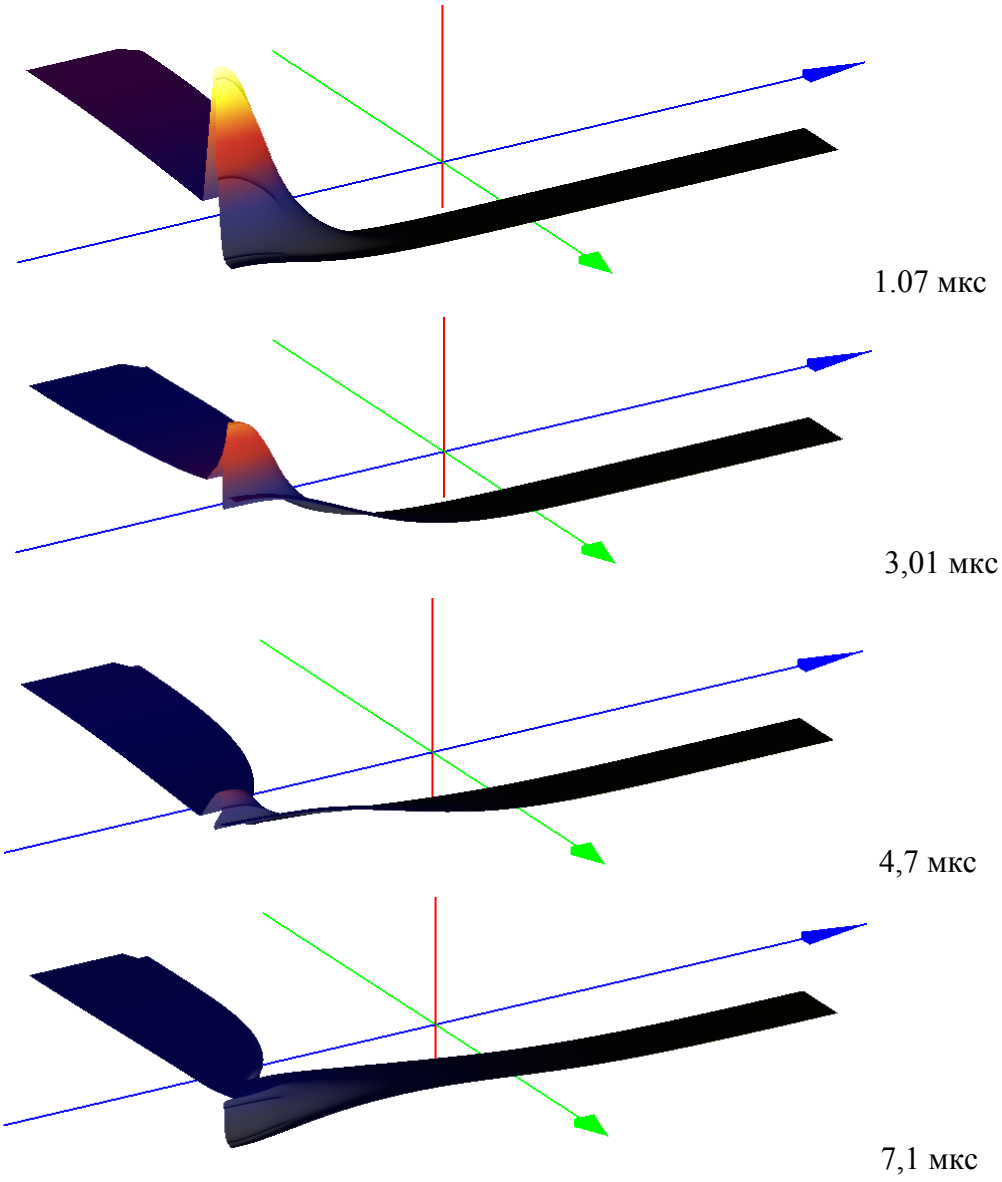
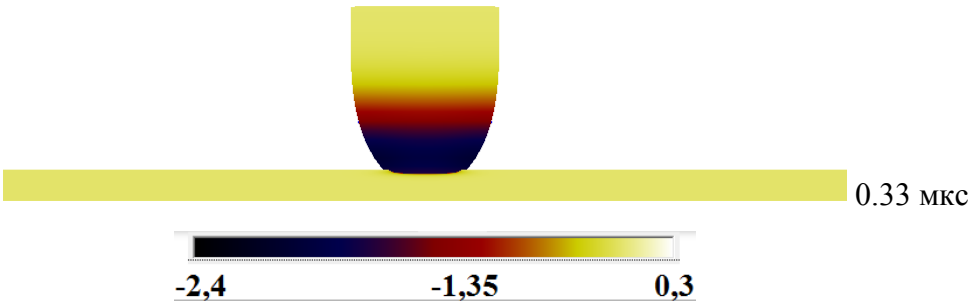


Рис. 13.

Распределение продольной компоненты скорости Vz м/с в ударнике и преграде из ГБКМ, начальная скорость удара 300 м/с, толщина преграды 2,5 мм



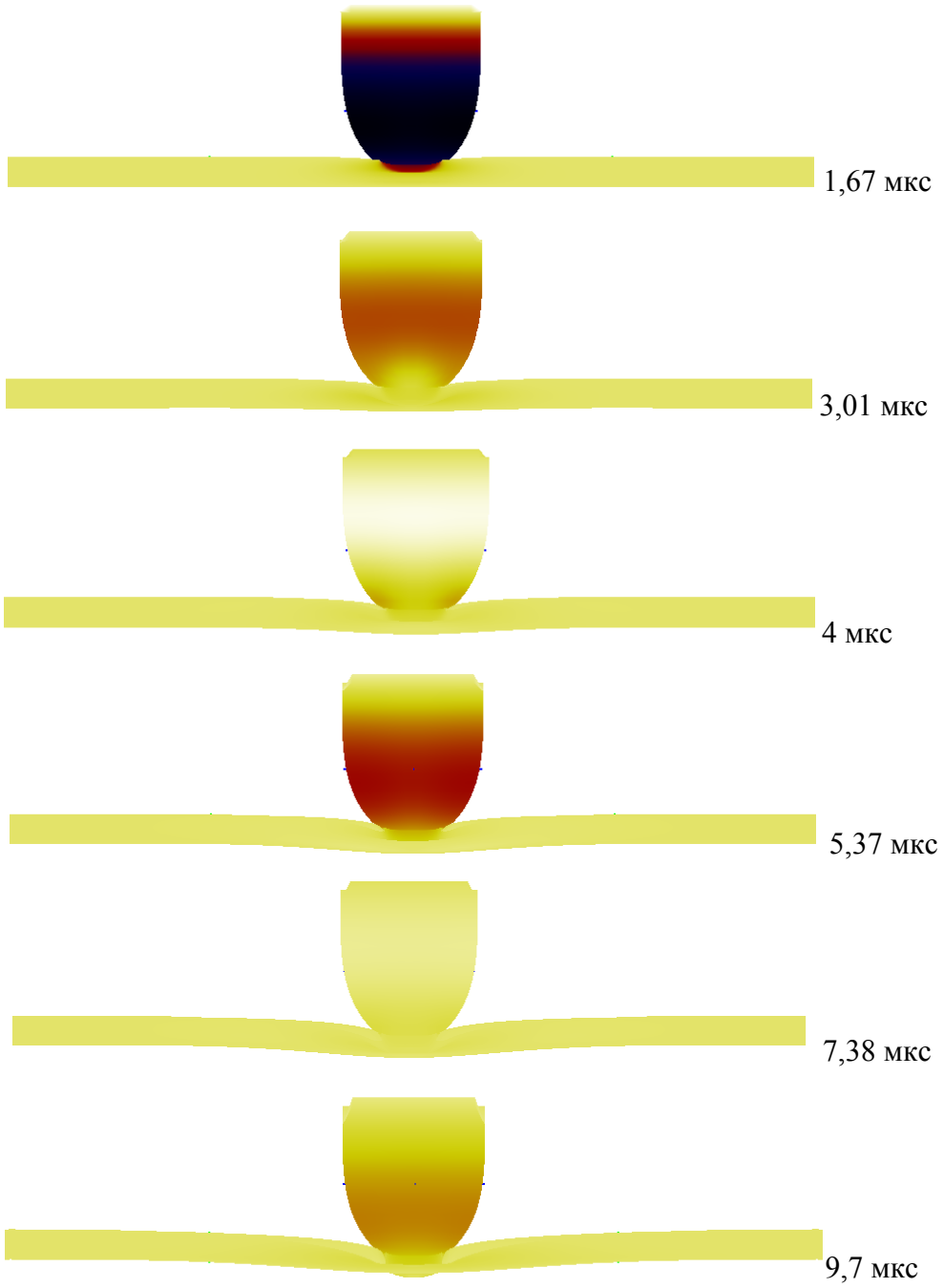
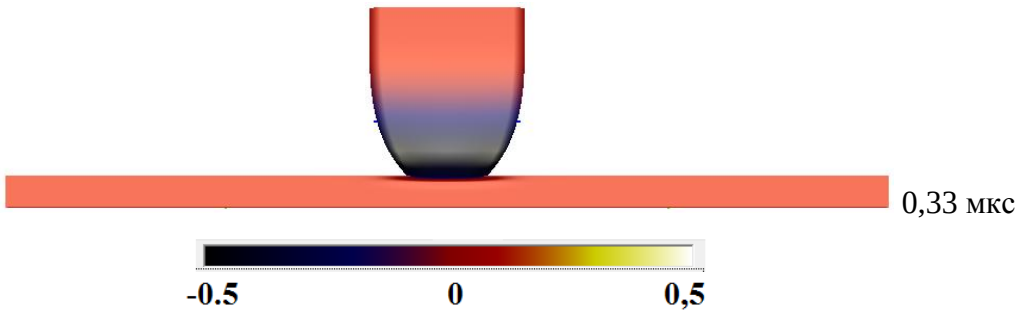


Рис. 14.

Распределение поперечного напряжения T_{zz} (ГПа) в ударнике и преграде из ГБКМ, начальная скорость удара 300 м/с, толщина преграды 2,5 мм



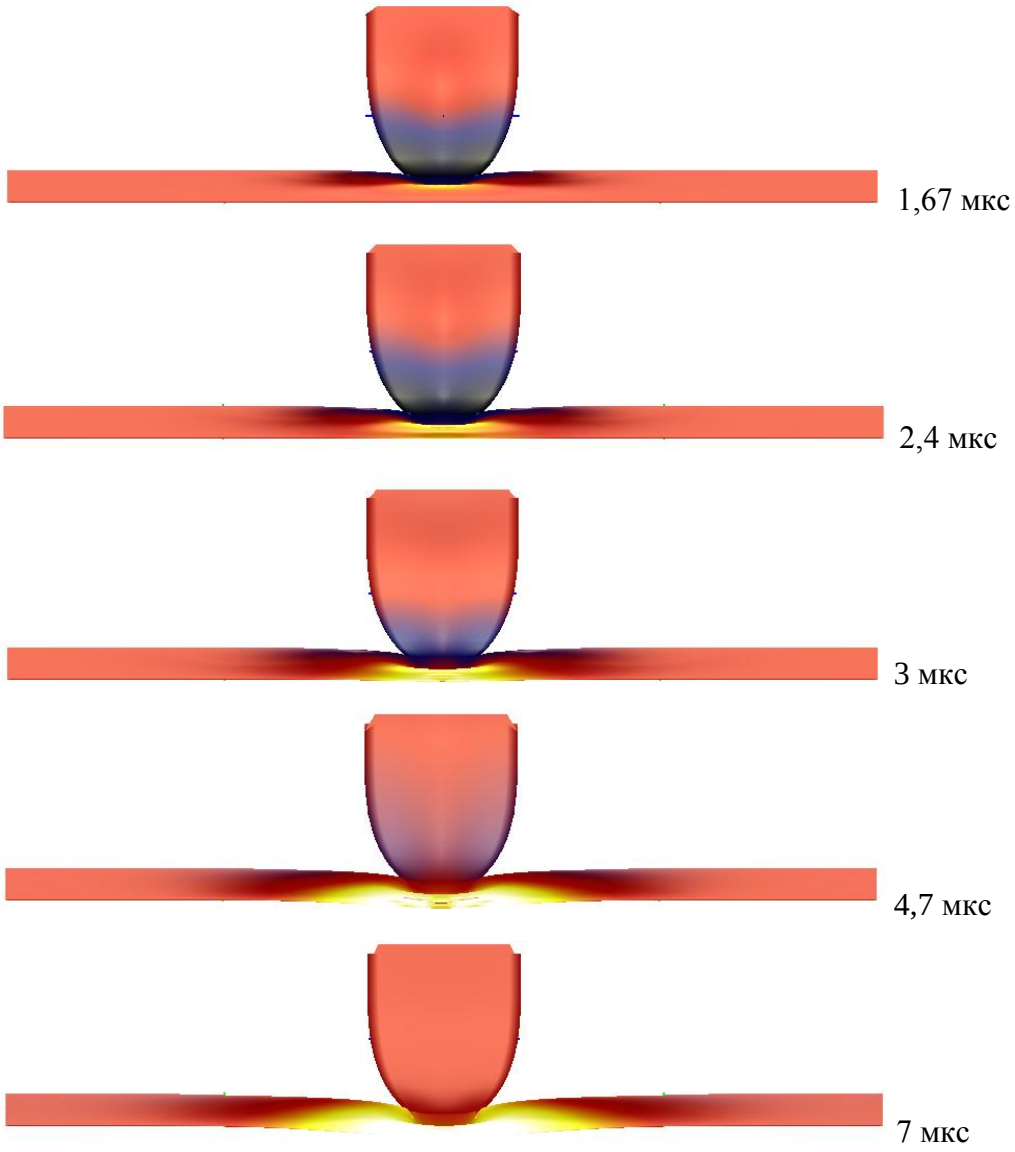
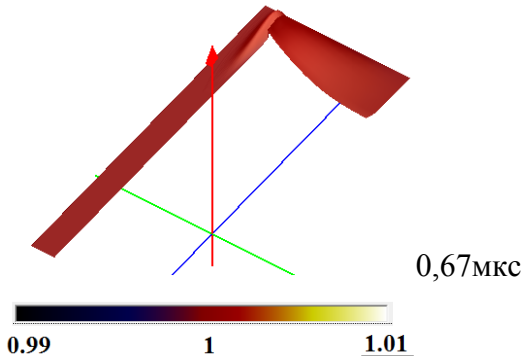


Рис. 15.

Распределение окружного напряжения $T_{\varphi\varphi}$ (ГПа) в ударнике и преграде из ГБКМ, начальная скорость удара 300 м/с, толщина преграды 2,5 мм



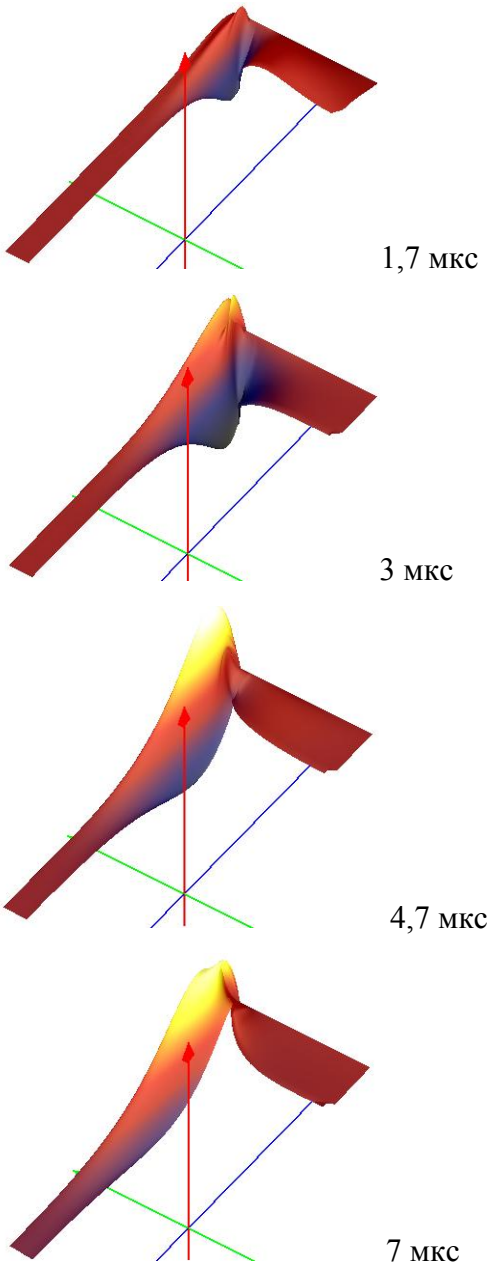
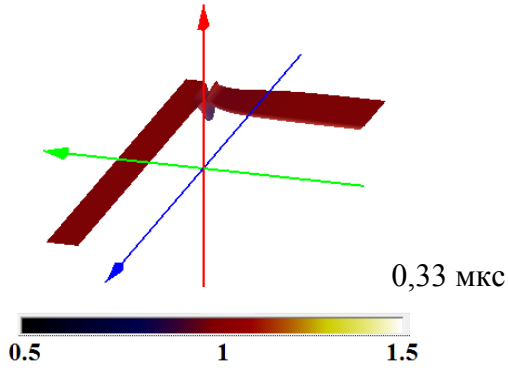


Рис. 16.

Распределение компоненты градиента деформации $F_{\varphi\varphi}$ в ударнике и преграде из ГБКМ, начальная скорость удара 300 м/с, толщина преграды 2,5 мм



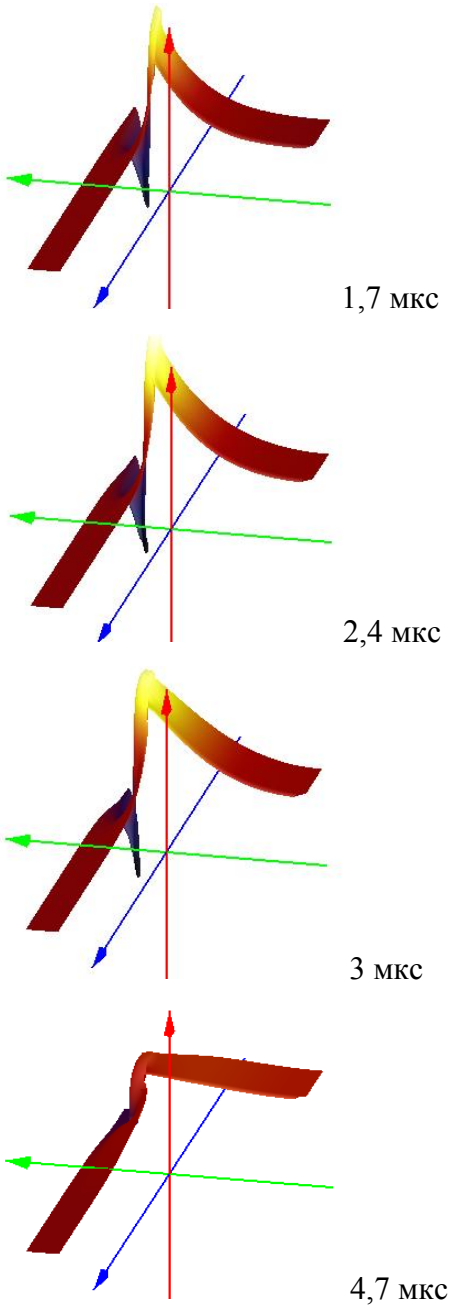


Рис. 17

Распределение компоненты градиента деформации F_{zz} в ударнике и преграде из ГБКМ, начальная скорость удара 300 м/с, толщина преграды 2,5 мм

3.4 Результаты расчетов для заостренного ударника со скоростью 300 м/с и преграды толщиной 5 мм

На Рис.18 представлены некоторые из полученных результатов расчетов для ударника с заостренной (оживальной) формой передней части при скорости удара V_b =300 м/с. Толщина преграды 5 мм. Показана общая картина взаимодействия ударника и

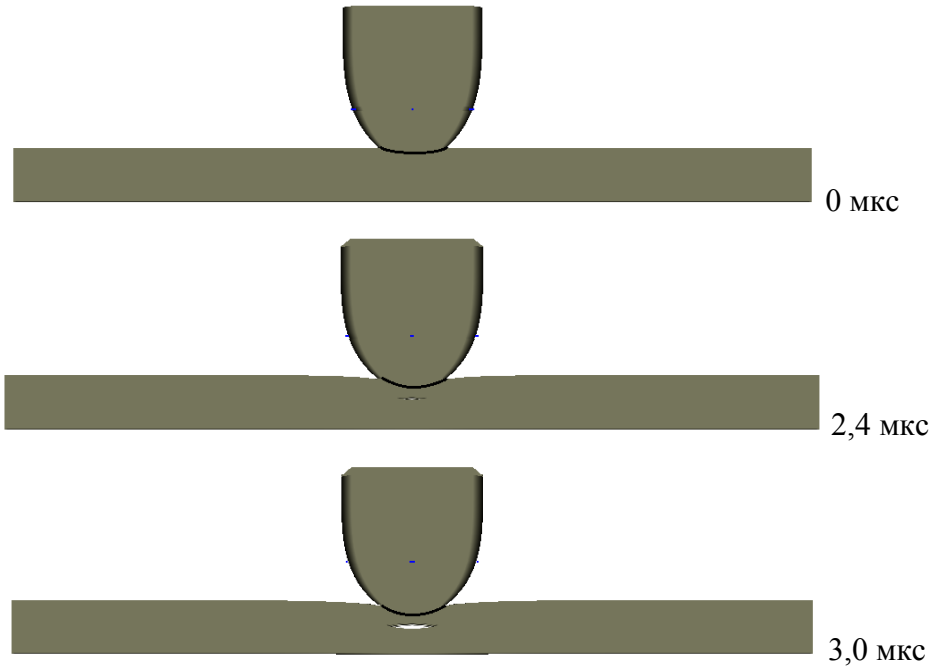
преграды из ГБКМ в различные моменты времени проникания, от начального момента взаимодействия до разрушения преграды с образованием отверстия.

3.5 Результаты расчетов для заостренного ударника со скоростью 500 м/с и преграды толщиной 5 мм

На Рис. 19 представлены некоторые из полученных результатов расчетов для ударника с заостренной (оживальной) формой передней части при скорости удара V_b =500 м/с. Толщина преграды 5 мм. Показана общая картина взаимодействия ударника и преграды из ГБКМ в различные моменты времени проникания, от начального момента взаимодействия до разрушения преграды с образованием отверстия.

3.6 Результаты расчетов для заостренного ударника со скоростью 700 м/с и преграды толщиной 8 мм

На Рис.20 представлены некоторые из полученных результатов расчетов для ударника с заостренной (оживальной) формой передней части при скорости удара V_b =700 м/с. Толщина преграды 8 мм. Показана общая картина взаимодействия ударника и преграды из ГБКМ в различные моменты времени проникания, от начального момента взаимодействия до разрушения преграды с образованием отверстия.



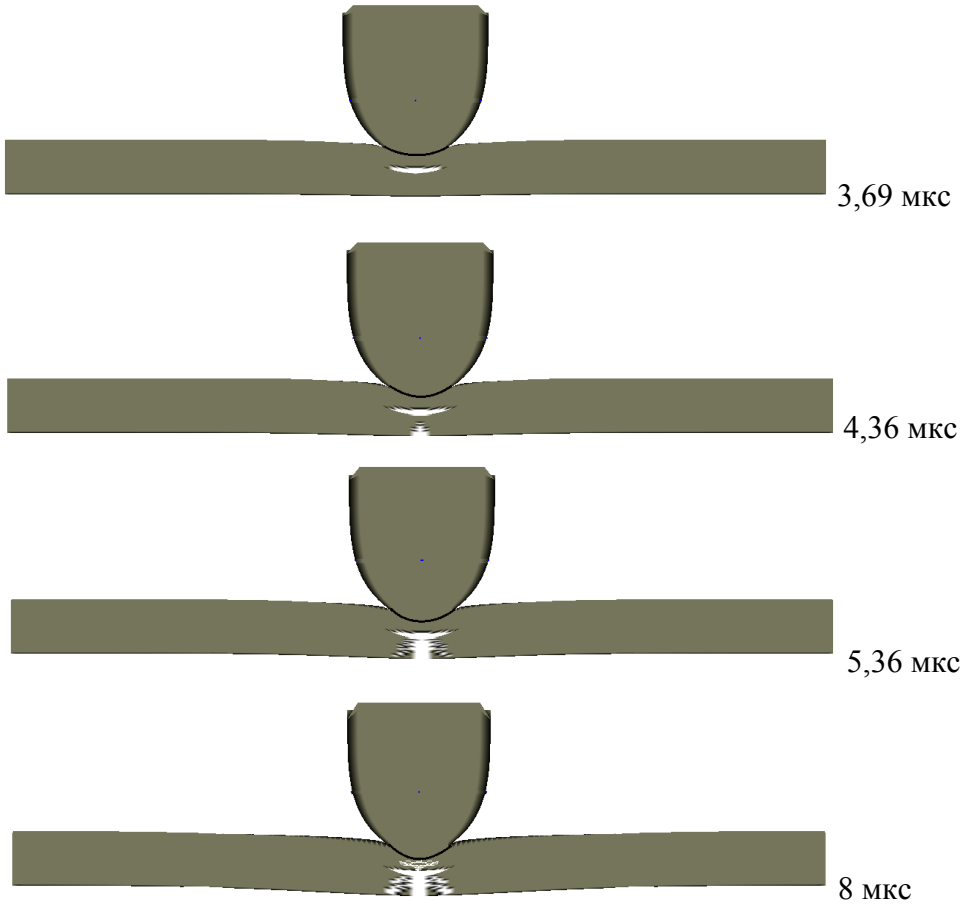
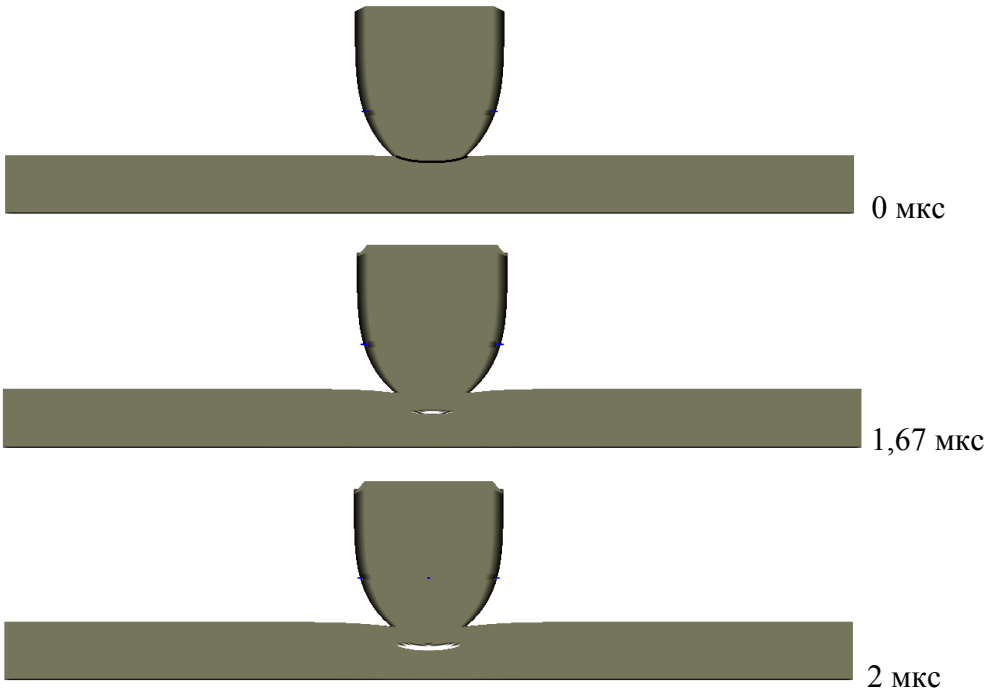


Рис. 18

Картина разрушения преграды из ГБКМ толщиной 5 мм при воздействии ударника со скоростью 300 м/с



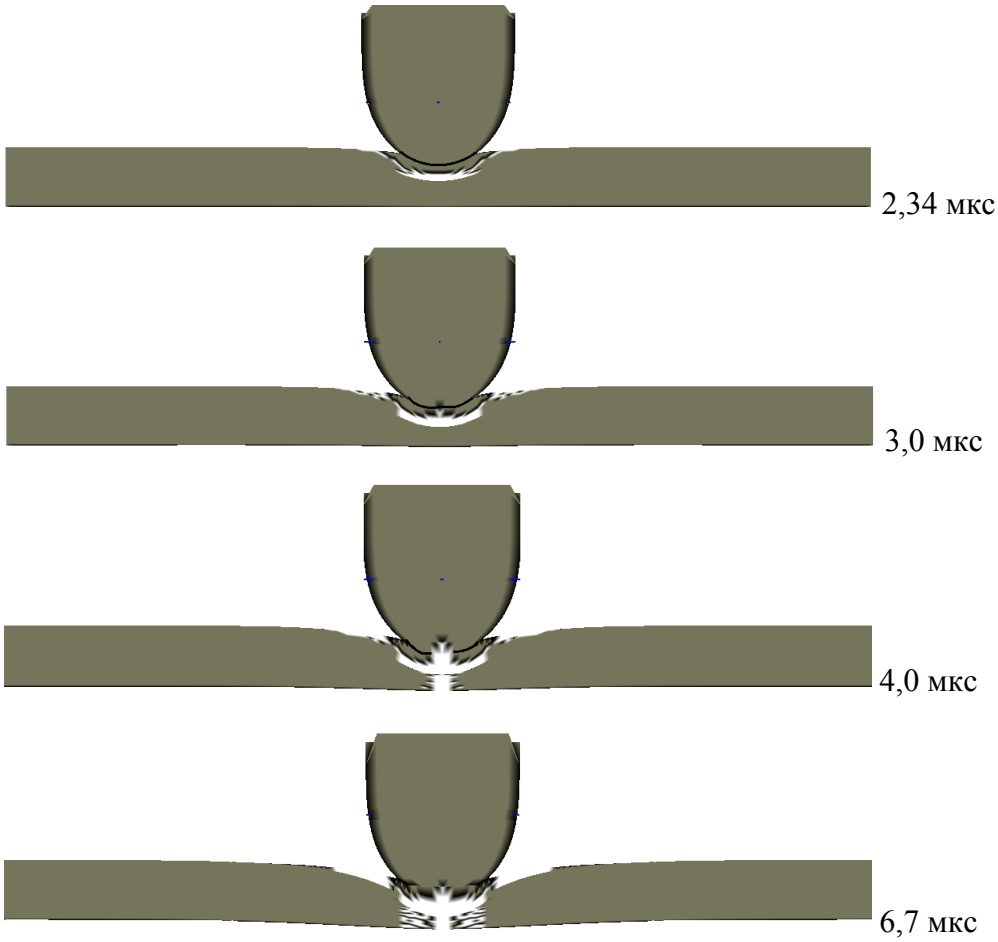
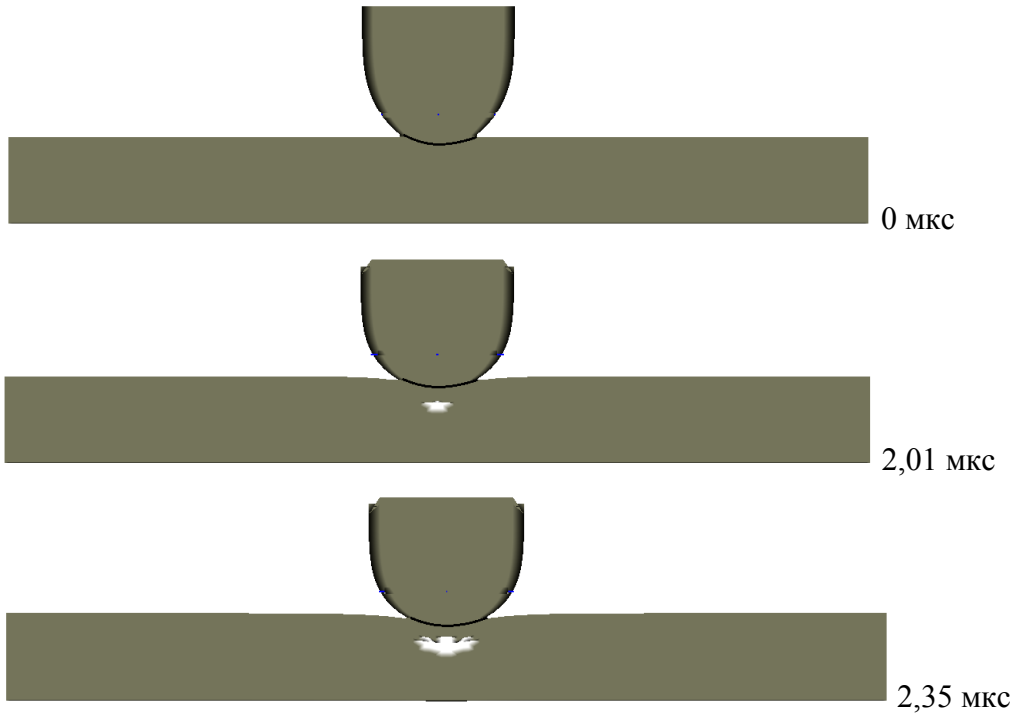


Рис. 19

Картина разрушения преграды из ГБКМ толщиной 5 мм при воздействии ударника со скоростью 500 м/с



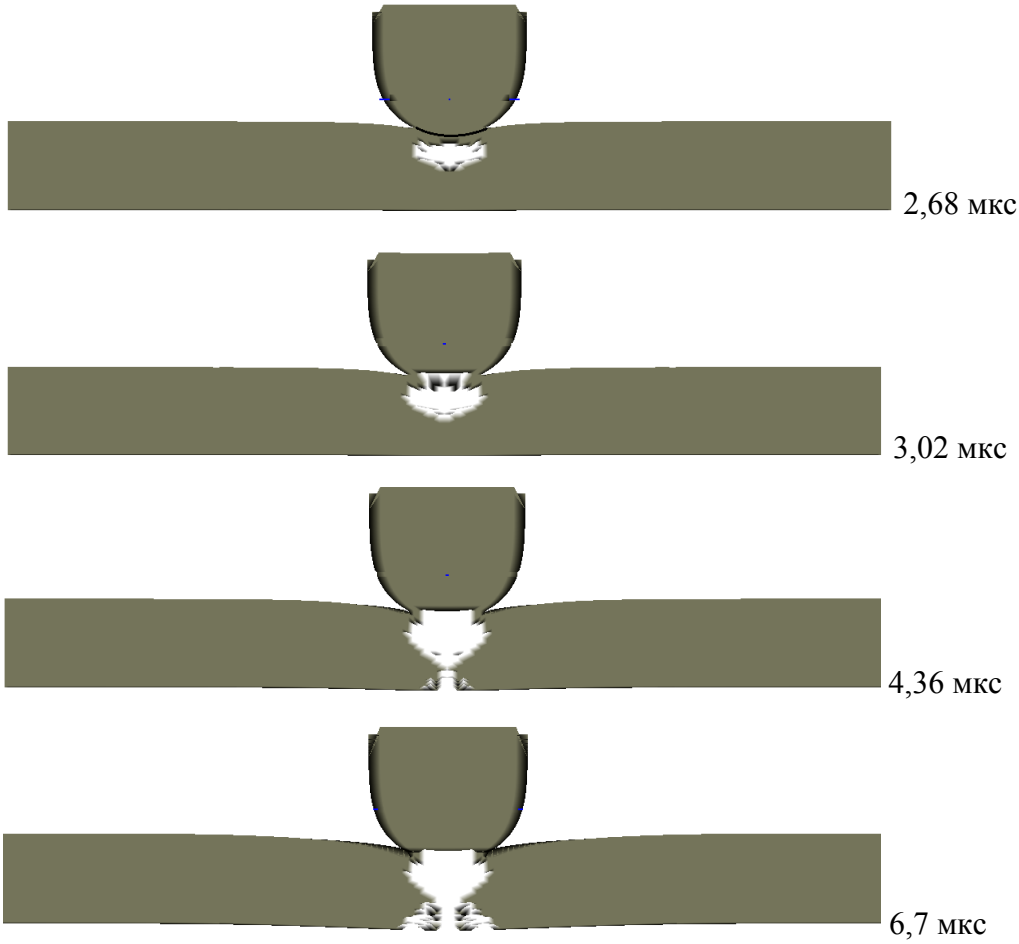


Рис. 20

Картина разрушения преграды из ГБКМ толщиной 8 мм при воздействии ударника со скоростью 700 м/с

3.7 Анализ баллистической эффективности преград из ГБКМ, рассчитанной с помощью численного моделирования

В инженерной практике создания защитных преград применяется параметр их баллистической эффективности [73]:

$$\beta_E = \frac{\Delta E_k}{S_M \rho_0 h_0},$$

где ΔE_k – поглощенная кинетическая энергия ударника:

$$\Delta E_k = \frac{m_1}{2}(V_0^2 - V_k^2),$$

m_1 – масса ударника, V_0 – начальная скорость ударника, V_k – конечная скорость ударника после пробивания преграды, S_M – площадь миделя ударника, $\overset{0}{\rho}$ – начальная плотность материала преграды (ГБКМ), $\overset{0}{h}$ – начальная толщина преграды.

Было проведено вариантное численное моделирование пробивания преград из ГБКМ ударником массой m_1=4 г. Варьировались толщина $\overset{0}{h}$ преграды и скорость V_0. Характеристики материала ГБКМ представлены выше. Были использованы значения S_M = 50 мм^2. В Таблице 1 представлены результаты численного моделирования, в том числе значения ΔE_k и β_E.

На Рис. 21 показаны графики зависимости параметра баллистической эффективности β_E от начальной скорости V_0 ударника, рассчитанные с помощью разработанной модели. Показана также область разброса экспериментальных значений зависимости $\beta_E(V_0)$, полученная для ГБКМ на основе ткани Русар [1]. Результаты расчетов для скоростей 500 и 700 м/с достаточно хорошо попадают в область разброса экспериментальных значений.

Таблица 1. Параметры баллистической эффективности преграды из ГБКМ, рассчитанные с помощью разработанной модели

№	Толщина, $\overset{0}{h}$, мм	V_0, м/с	V_k, м/с	ΔE_k, Дж	β_E, кДж/кг
1	2,5	300	138	140	745
2	2,5	500	340	268	1425
3	2,5	700	570	330	1755
4	5	300	40	176	468
5	5	500	260	364	968
6	5	700	380	691	1838
7	8	500	60	492	820
8	8	700	220	883	1471

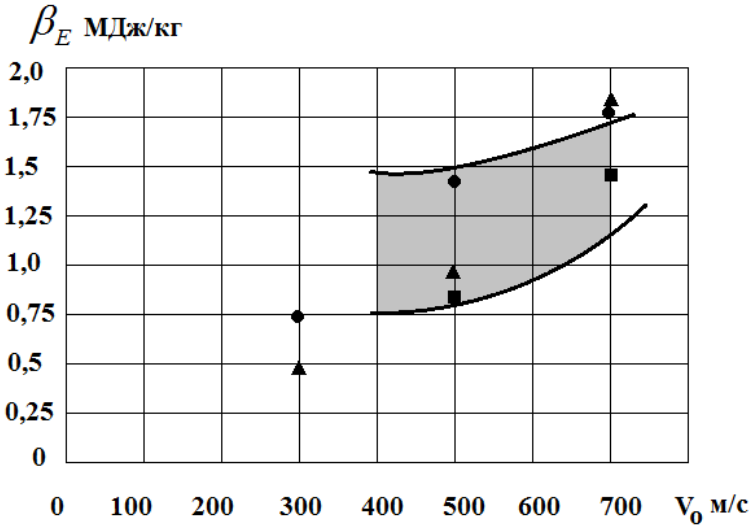


Рис. 21

Расчетные значения параметра β_E баллистической эффективности преграды из ГБКМ в зависимости от начальной скорости ударника V_0 : ● – преграда толщиной $\overset{0}{h}$=2,5 мм, ■ – $\overset{0}{h}$=5 мм, ▲ – $\overset{0}{h}$= 8мм. Заштрихована область разброса экспериментальных значений [1] для ГБКМ на основе ткани Русар

4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант № 1

Используя программу ShockLarge провести расчеты ударно-волнового взаимодействия ударника и композитной преграды при следующих наборах значений параметров, приведенных в таблице 2.

Таблица 2. Значения параметров моделей

№ варианта	σ_{1T}, МПа	σ_{4S}, МПа	M_{1111}, ГПа	M_{3333}, ГПа	M_{1313}, ГПа	σ_{1S}, МПа	σ_{3S}, МПа

1	0,5	100	100	0,5	2,5	10	0,1
2	0,1	10	100	0,5	2,5	10	0,1
3	0,5	100	50	0,5	2,5	10	0,1
4	0,5	100	50	0,2	1,0	10	0,1
5	0,5	100	50	0,5	2,5	40	0,1
6	0,5	100	50	0,5	2,5	10	0,5
7	0,1	10	50	0,2	1,5	2	0,1
8	1,0	100	100	1,0	2,5	10	1,0

Построить графики баллистической эффективности преграды для выбранного набора параметров в диапазоне скоростей V_b = 100...1000 м/с и значений толщин преграды z_t =2...10 мм.

Вариант № 2

Записать постановку (20)...(22) для двумерной задачи о прямом ударе для различных моделей гибкого композитного материала при следующих значениях параметра:

а) n=I, б) n=II, в) n=IV,

Применить численный алгоритм решения двумерной задачи для указанных моделей материалов. Провести численное моделирование ударно-волновых процессов при значениях параметров, приведенных в таблице 2.

5. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ЗАЩИТЫ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

5.1 Порядок выполнения курсовой работы

5.1.1 Ознакомление с теоретической частью курсовой работы

5.1.2 Ознакомление с заданием и исходным данными по соответствующему варианту курсовой работы.

5.1.3 Ознакомление со структурой программы ShockLarge.

5.1.4 Введение исходных данных из соответствующего набора значений (для варианта 1) в программу ShockLarge.

5.1.5 Проведение расчетов задачи об ударно-волновых процессах в прегради из ГБКМ при различных скоростях ударника в заданном диапазоне скоростей.

5.1.6 Анализ баллистической эффективности преград в заданном диапазоне скоростей ударника от 100 до 800 м/с.

5.1.7. Оформление отчета о выполнении курсовой работы, с включением в него всех разделов по курсовой работе, образец выполняется согласно примеру из п.4.

5.2 Порядок защиты курсовой работы

5.2.1 К защите курсовой работы предъявляется отчет о выполнении курсовой работы, оформленный согласно п.5.1.

5.2.2 Защита курсовой проводится в форме презентации результатов курсовой работы.

5.2.3 Для выступления на защите курсовой работы студент готовит:

- презентацию и текст доклада по презентации,
- ответы на вопросы для самоконтроля.

5.2.4 По результатам выполнения курсовой работы, а также по результатам выступления на защите курсовой работы студенту выставляется оценка по курсовой работе.

6. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

6.1 Что такое правый тензор деформации Коши-Грина?

6.2 Что такое тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа? Является ли он симметричным?

6.3 Запишите инварианты тензора упругих деформаций относительно группы ортотропии.

6.4 Запишите закон градиентальности для скоростей пластических деформаций.

6.5 Запишите закон градиентальности для ортотропных сред.

6.6 Запишите выражение для 3-х пластических потенциалов гибких композиционных материалов при продольных сжатия, при поперечном сжатии и при сдвиге.

6.7 Запишите общую постановку динамической задачи взаимодействия ударника с гибкими композиционными материалами. Сколько независимых скалярных уравнений в этой системе уравнений?

6.8 Что такое ленточная адаптивная сетка? Запишите разностный оператор правой производной на этой сетке.

6.9 Перечислите основные этапы численного моделирования распространения трещин в упруго-пластической среде.

6.10 Что такое параметр баллистической эффективности?

ЛИТЕРАТУРА

1. Харченко Е.Ф., Ермоленко А.Ф. Композитные, текстильные и комбинированные бронематериалы.- М.: ОАО ЦНИИСМ.-2013.- 294 с.
2. Материалы и защитные структуры для локального и индивидуального бронирования/В.А.Григорян, И.Ф.Кобылкин, В.М.Миринин, Е.Н.Чистяков. Под ред.В.А.Григоряна.-М.:Изд-во.РадиоСофт. 2008. 406 с.
3. Zhu D., Mobaster B., Rajan S.D. Dynamic testing of Kevlar-49 fabric//Journal of Materials in Civil Engeneering. 2011. V.23. P.230-239.
4. Tan V.B., Zeng X.S., Shim V.P.W. Characterization and constitutive modeling of aramid fibers at high strain rates// International Journal of Impact Engineering. 2008. V.35. №1. P.1303-1313.
5. Koh C.P., Shim V.P.W., Tan V.B.C., Tan B.L. Response of a high-strength flexible laminate to dynamic tension// International Journal of Impact Engineering. 2008. V.35. P.559-568.
6. Shim V.P.W., Lim C.T.,Foo K.J. Dynamic mechanical properties of fabric armor// International Journal of Impact Engineering. 2001. V.25. P.1-15.
7. Lee Y.S.,Wetzel E.D.,Erges R.G.,Wagner N.J. The ballistic impact characteristics of Kevlar woven fabrics impregnated with a colloidal shear thickening fluid// Journal of Materials Science. 2003. V.3. P.2825-2833.
8. Mossakovsky P.A.,Bragov A.M., Kolotnikov M.E., Antonov F.K. Investigation of shear thickening fluid dybamic properties and its influence on the impact risistance of multilayered fabric composite barrier//11-th LS-DYNA users Conference-2010.
9. Димитриенко Ю.И. Анизотропная теория конечных упруго-пластических деформаций//Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Естественные науки. 2003. №2. С.47-61.
10. Димитриенко Ю.И., Дзагания А.Ю., Беленовская Ю.В., Воронцова М.А. Численное моделирование проникания ударников в анизотропные упруго-пластические преграды// Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. 2008. №4. С.100-117.
11. Димитриенко Ю.И. Нелинейная механика сплошной среды. М.:Физматлит. 2009. 610с.
12. Dimitrienko Yu.I. Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations. Springer. 2010. 722 p.
13. Димитриенко Ю.И. Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды / Механика сплошной среды.Т.2.Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана. 2011. 560 с.
14. Димитриенко Ю.И. Основы механики твердых сред / Механика сплошной среды. Т.4. Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана. 2014. 624 с.
15. Кондауров В.И., Кукуджанов В.Н. Об определяющих уравнениях и численном решении некоторых задач динамики упруго-пластической среды с конечными

деформациями//В кн. "Численные методы в механике твердого деформируемого тела. М.: ВЦ АН СССР. 1978. С.84-121.

16. Поздеев А.А., Трусов П.В.,Няшин Ю.И. Большие упруго-пластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.:Наука. 1986. 232с.

17. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление. М.: Высшая школа. 2001. 576 с.

18. Димитриенко Ю.И. Тензорный анализ/ Механика сплошной среды.Т.1. Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана. 2011. 463 с.

19. Димитриенко Ю.И., Котенев В.П., Захаров А.А. Метод ленточных адаптивных сеток для численного моделирования в газовой динамике. М.:Физматлит. 2011. 280 с.

20. Димитриенко Ю.И., Захаров А.А. Автоматизированная система для моделирования газовых потоков методом ленточных адаптивных сеток // Информационные технологии. 2009. №6. С. 12—16.

21. Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А., Сыздыков Е.К. Развитие метода ленточно-адаптивных сеток на основе схем TVD для решения задач газовой динамики // Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Сер.Естественные науки. 2011. № 2. С.87-97.

22. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П., Шпакова Ю.В. Численное моделирование процессов разрушения тканевых композитов //Вычислительная механика сплошной среды. 2013. №4. С.389-401.

23. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П.,Садовничий Д.Н., Гафаров Б.Р. Численнное и экспериментальное моделирование прочностных характеристик сферопластиков//Композиты и наноструктуры. 2013. №3. С.35-51.