

Московский государственный технический университет
имени Н.Э.Баумана

А.С.Романов, А.В.Семиколенов

ИНТЕНСИВНЫЙ ПЕРЕНОС

*Рекомендовано редсоветом МГТУ им. Н.Э.Баумана
в качестве методического пособия
по курсу «Нелинейные процессы переноса»*

Москва

Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана

2012

Предисловие

Настоящее учебное пособие посвящено изложению основных положений теории интенсивных процессов переноса. Последнее означает, что рассматриваются процессы переноса различной физической природы, объединяемые их «интенсивностью», которая приводит к вырождению соответствующих уравнений переноса.

Учебное пособие представляет часть курса «Нелинейные процессы переноса», читаемого студентам МГТУ им. Н.Э.Баумана, обучающимся по специальности «Техническая физика».

В разделе рассматривается нелинейный перенос, описываемый уравнением типа турбулентной фильтрации, особенностью которого является вырождение при малой интенсивности процесса переноса. Демонстрируются возможности анализа процесса переноса, основанные на принципе максимума и на асимптотических соотношениях, связанных с пространственной ограниченностью интенсивного процесса переноса.

Оглавление

Глава 7. Интенсивные процессы переноса

7.1. Интенсивные возмущения в нелинейной среде.

В основе общего подхода к анализу интенсивного переноса в нелинейных системах различной физической природы лежит единство их математического описания. На феноменологическом уровне процесс переноса описывается дифференциальными уравнениями, которые являются специфическими выражениями законов сохранения (энергии, импульса, вещества и т.д.) и имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{q}) \quad (7.1)$$

где $u(\vec{r}, t) \geq 0$ - переносимая величина (потенциал переноса), $\vec{q}(\vec{r}, t)$ - вектор плотности потока переносимой величины в точке пространства, определяемой радиус-вектором $\vec{r}$ в момент времени t .

Если процесс переноса происходит вдоль прямой $x \in R$, то уравнение переноса упрощается

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad \vec{q} = \{q(x, t), 0, 0\} \quad (7.1')$$

Для потока $q(x, t)$ постулируется феноменологическое соотношение

$$q = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x},$$

причем коэффициент переноса λ в достаточно общем случае является функцией переносимой величины и модуля её градиента

$$\lambda = \lambda\left(u, \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right).$$

В частности, можно рассматривать степенную функцию

$$\lambda = k \cdot u^{k-1} \cdot \left|\frac{\partial u^k}{\partial x}\right|^{n-1}, \quad k \geq 1, \quad n \geq 1. \quad (7.2)$$

как обобщённую форму многих известных законов переноса. Например, $n = 1, k > 0$ соответствует лучистой ($3,5 \leq k \leq 6,5$) и электронной ($k = 3,5$) теплопроводности; $k = 1, n \geq 1$ соответствует одномерному сдвиговому течению неньютоновской дилатантной жидкости со степенным реологическим законом (см. раздел 2.6). В общем случае соотношение (7.2) описывает перенос импульса при турбулентной фильтрации.

При анализе процессов, описываемых соотношениями (7.1'), (7.2), особый интерес представляет выявление специфических нелинейных эффектов, отсутствующих в линейной теории, и их физическая интерпретация. Наибольшее количество исследований в этом направлении основывается именно на этих соотношениях.

Простейшим частным решением уравнения (7.1') с законом (7.2) является решение типа «простой» волны. Будем считать, что переносимая величина является функцией одной переменной $u = u(\eta)$, где $\eta = x - vt$, где $v = \text{const}$ - скорость волны, величина которой ограничена $0 < |v| < \infty$. Тогда уравнение (7.1') переписывается в виде

$$-v \frac{du}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left[\frac{d(u^k)}{d\eta} \left| \frac{d(u^k)}{d\eta} \right|^{n-1} \right]. \quad (7.3)$$

Уравнение (7.3) необходимо дополнить граничными условиями при $\eta \rightarrow +\infty$ или $\eta \rightarrow -\infty$. Для определённости будем считать, что

$$u = 0, \quad \eta \rightarrow \infty \quad (7.4)$$

Кроме граничного условия (7.4) искомое решение должно также удовлетворять условию непрерывности переносимой величины $u(\eta)$ и её потока $q(\eta)$:

$$u(\eta) \in C(R), \quad q(\eta) \in C(R). \quad (7.5)$$

Интегрируя уравнение (7.3) при условии (7.4), найдем искомую функцию $u(\eta)$ в виде

$$u = \left[v^{1/n} \frac{(kn-1)}{kn} (\eta_f - \eta) \right]^{\frac{n}{kn-1}}, \quad \eta_f = \text{const}.$$

Эта действительная функция определена при $\eta \leq \eta_f$, при этом $u(\eta_f) = 0$, $q(\eta_f) = 0$, если только $k \cdot n > 1$. Функция $u \equiv 0$ также является (тривиальным) решением уравнения (7.3). Поэтому решение, имеющее место во всей области определения $\eta \in R$, можно представить в «составном» виде

$$u = \begin{cases} \left[v^{1/n} \frac{(k \cdot n - 1)}{k \cdot n} (\eta_f - \eta) \right]^{\frac{n}{kn-1}}, & \eta \leq \eta_f \\ 0, & \eta > \eta_f \end{cases} \quad (7.6)$$

Из (7.6) следует, что требуемое физическое условие непрерывности переносимой величины $u(\eta)$ и потока $q(\eta)$ выполнено при $kn > 1$, так как в данном случае из (7.3) следует, что $q = v \cdot u$.

Найдем производную

$$\frac{du}{d\eta} = - \left[v^{1/n} \frac{(kn-1)}{n} \right]^{\frac{n}{kn-1}} (\eta_f - \eta)^{\frac{n+1-kn}{kn-1}}$$

Как видно при $\eta \rightarrow \eta_f - 0$, $\frac{du}{d\eta} \rightarrow 0$, если $k < \frac{n+1}{n}$ (напомним, что всегда $kn > 1$), и $\frac{du}{d\eta} \rightarrow \infty$ при $\eta \rightarrow \eta_f - 0$, если $k > \frac{n+1}{n}$. Несмотря на это, поток $q = v \cdot u$ всегда непрерывен, если непрерывно решение.

Таким образом, в рассматриваемом случае характерной особенностью нелинейного переноса является его пространственная ограниченность, математически выражающаяся наличием фронта волны $\eta = \eta_f$, на котором обращаются в ноль, как переносимая величина $u(\eta_f) = 0$, так и поток $q(\eta_f) = 0$.

Для физической интерпретации принципиально важно отметить, что коэффициент переноса $\lambda(u, |u'_x|)$ также обращается в ноль на фронте волны. Это означает, что на фронте волны вырождается сам процесс переноса. Строго говоря, формула (7.2) в этом случае будет неверной, так как необходимо учитывать процессы переноса, имеющие другую физическую природу и не вырождающиеся при малой интенсивности процесса переноса. Следовательно, можно назвать рассматриваемые здесь процессы переноса интенсивными, т.е. преобладающими или «включающимися» при достаточной интенсивности самого процесса переноса. К

таким интенсивным процессам следует отнести, например, лучистый теплоперенос и турбулентный перенос импульса.

Из вида решения (7.6) вытекает необходимое условие $v > 0$, которое означает, что в отсутствие объёмного поглощения может существовать только волна «нагрузки», когда фронт волны, положение которого определяется соотношением $\eta = \eta_f$ (или в других переменных $x_f(t) = \eta_f + vt$, где $x_f(t)$ - координата фронта) движется в сторону невозмущённой области пространства.

Если в среде имеется объёмное поглощение (объёмные стоки) или выделение (объёмные источники) переносимой величины, мощность которых зависит от самой переносимой величины, то в уравнениях (7.1) и (7.1') это будет учтено наличием дополнительного слагаемого

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + f(u), \quad (7.1'')$$

где функция $f(u)$ называется функцией источника и равна мощности распределённых (объёмных) стоков и источников. Положительный знак функции $f(u)$ определяет наличие источников, а отрицательный - стоков.

Физическая природа функции источника может быть самой разнообразной. Например, в случае теплопередачи она описывает действие различных экзо- и эндотермических реакций, излучение через «окна прозрачности» из нагретой области атмосферного воздуха и т.п.

При переносе импульса источником может служить взаимодействие движущегося вещества с внешними силовыми полями. Так, при поперечном переносе импульса при сдвиговом магнитогидродинамическом течении дилатантной жидкости со степенным реологическим законом процесс описывается уравнением (7.1'') с учётом закона (7.2) при $k=1$ и линейной функцией источника $f \sim u$.

При фильтрации аналогичным образом описываются процессы адсорбции и десорбции.

Для определённости возьмём функцию источника в виде $f(u) = -\gamma \cdot u^m$, $\gamma = \text{const}$, $m = \text{const} > 0$. Тогда уравнение переноса (7.1'') с учётом закона (7.2) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left| \frac{\partial(u^k)}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial(u^k)}{\partial x} \right] - \gamma u^m. \quad (7.1''')$$

Положим также $\gamma > 0$, что соответствует случаю, когда в среде действуют стоки переносимой величины, степенным образом зависящие от самой величины. По аналогии с указанным выше решением типа «простой» волны в отсутствии стоков, будем искать решение уравнения (7.1'''), с учётом условий (7.4), (7.5), в виде

$$u = a \cdot (\eta_f - \eta)^\alpha, \quad \eta_f = \text{const}, \quad a = \text{const} > 0, \quad \alpha = \text{const} > 0$$

(напомним, что $\eta = x - vt$).

Решение задачи выглядит наиболее просто в случае, когда при подстановке решения заданного вида в уравнение (7.1''') показатели степени при бинOME $(\eta_f - \eta)$ всех трех слагаемых равны. Откуда найдем, что $m = 1 + \frac{1}{n} - k$ и решение, как и прежде, имеет составной вид

$$u = \begin{cases} a(\eta_f - \eta)^{\frac{n}{kn-1}}, & \eta \leq \eta_f, \\ 0, & \eta > \eta_f \end{cases}$$

где постоянная $a > 0$ определяется в зависимости от скорости волны из уравнения:

$$v = a^{kn-1} \cdot \left(\frac{kn}{kn-1} \right)^n - a^{\frac{1-kn}{n}} \cdot \gamma \cdot \frac{(kn-1)}{n}. \quad (7.7)$$

Из этого соотношения следует, что если $a > a^*$, $a^* = \gamma^{\frac{n}{kn-1}} \left[\frac{kn-1}{n} \right]^{\frac{n}{kn-1}} \left[\frac{kn}{kn-1} \right]^{-n^2}$, то $v > 0$. Если

же $a < a^*$, то $v < 0$. То есть существуют как волна нагрузки $v > 0$, так и волна разгрузки $v < 0$. В последнем случае, фронт движется в сторону возмущенной среды, где $u > 0$.

Здесь, так же как и для случая $\gamma = 0$, необходимо выполнение условия $kn > 1$, которое приводит к неравенству $m < 1$ (то есть $0 < m < 1$).

Существование волны разгрузки $v < 0$ не означает изменения направления потока, определяемым знаком функции $q(\eta)$. Этот эффект связан исключительно с действием распределённого стока (поглощения) переносимой величины. Подтверждением этому является возможность исчезновения переносимой величины за конечный промежуток времени в однородно возмущённой среде при действии в ней объёмных стоков переносимой величины (напомним, что в этом случае $\gamma > 0$ в уравнении (7.1''')).

Однородное по пространству состояние среды описывается функцией $u = u(t)$. В этом случае уравнение (7.1''') приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\gamma u^m.$$

Откуда после интегрирования получим, что функция

$$u = \left[\frac{\gamma}{1-m} (t_0 - t) \right]^{\frac{1}{1-m}}, \quad t \in [0, t_0], \quad t_0 = \text{const} > 0$$

является решением уравнения (7.1''') на ограниченном интервале времени $0 \leq t < t_0$.

За этот промежуток времени вещество из однородно возмущённого состояния переходит в невозмущённое $u \equiv 0$, $t \geq t_0$.

Необходимым условием существования полученного однородного решения является неравенство $m < 1$, которое также является необходимым условием существования волны разгрузки.

Таким образом, на примере простой волны установлено, что интенсивные процессы переноса протекают в ограниченной области пространства, и что существует фронтовая поверхность, строго разделяющая возмущённую и невозмущённую области пространства. При наличии объёмных стоков может существовать как волна нагрузки ($v > 0$) так и волна разгрузки ($v < 0$). Очевидно, что возможно и стационарное состояние вещества ($v = 0$) при $a = a^*$ (см. формулу (7.7)). Несмотря на это, неподвижность фронта возможна и по другой причине. Для иллюстрации такой возможности обратимся к уравнению (7.1''') без функции источника $\gamma = 0$.

Будем искать решение уравнения (7.1''') методом разделения переменных, когда искомая функция имеет вид произведения двух функций от разных аргументов $u = T(t) \cdot X(x)$, $T(t) > 0$, $X(x) > 0$. После подстановки в уравнение без источников ($\gamma = 0$) получим соотношение

$$T^{-kn} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{X} \frac{d}{dx} \left[\left| \frac{d(X^k)}{dx} \right|^{n-1} \frac{d(X^k)}{dx} \right] = A,$$

где $A = \text{const}$ - постоянная разделения. Из этих уравнений найдём частное решение

$$u = \begin{cases} \left[A^2 (kn-1)^2 \frac{1}{(k+1)n} \left(\frac{kn-1}{(k+1)n} \right)^n (t_0 - t) \right]^{\frac{1}{1-kn}} (-x)^{\frac{n+1}{kn-1}}, & x \leq 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}, \quad (7.8)$$

для которого оказываются выполненными условия непрерывности (7.5).

При $kn > 1$ функция (7.8) определена в интервале времени $0 \leq t < t_0$. При $t \rightarrow t_0$ решение $u(x, t) \rightarrow \infty$ в полупространстве $x < 0$. Во всяком случае, фронт останется неподвижным в течение указанного интервала времени. Назовём состояние фронта метастабильным, если он неподвижен в течение конечного интервала времени.

Процесс эволюции интенсивного возмущения в нелинейной среде со стоком может проходить различные стадии, сопровождающиеся как волной нагрузки, так и волной разгрузки. Для иллюстрации приведём автомодельное решение задачи о точечном «взрыве» для плоской симметрии. Начальное распределение переносимой величины задаётся в момент времени $t = 0$ в начале координат: $u(x, 0) = Q \cdot \delta(x)$, где $\delta(x)$ - дельта-функция.

В ходе решения подберём показатель степени m у функции источника в (7.1''') так, чтобы решение можно было бы получить аналитически.

Решение будем искать в виде

$$u(x, t) = A \cdot t^\sigma \cdot \left(|x_f|^\varepsilon - |x|^\varepsilon \right)^\alpha. \quad (7.9)$$

После подстановки (7.9) в (7.1''') получим тождество

$$\begin{aligned} & A \cdot \sigma t^{\sigma-1} \cdot \left(|x_f|^\varepsilon - |x|^\varepsilon \right)^\alpha + A \cdot t^\sigma \cdot \left(|x_f|^\varepsilon - |x|^\varepsilon \right)^{\alpha-1} \alpha \frac{d(x_f)^\varepsilon}{dt} = \\ & = A^{kn} \cdot t^{\sigma kn} (k\alpha)^n (k\alpha-1)n \varepsilon^{n+1} x^{(n+1)(\varepsilon-1)} \cdot \left(|x_f|^\varepsilon - |x|^\varepsilon \right)^{(k\alpha-1)n-1} + \\ & + A^{kn} \cdot t^{\sigma kn} (k\alpha)^n \varepsilon^n n (1-\varepsilon) x^{n(\varepsilon-1)-1} \cdot \left(|x_f|^\varepsilon - |x|^\varepsilon \right)^{(k\alpha-1)n} - \gamma A^m \left(|x_f|^\varepsilon - |x|^\varepsilon \right)^{\alpha m}. \end{aligned}$$

Решение нетривиально, если показатели степени двучлена $\left(|x_f|^\varepsilon - |x|^\varepsilon \right)$ в последнем соотношении одинаковы. Откуда найдём $\alpha-1 = n(k\alpha-1)-1$, $\alpha-1 = \alpha m$, следовательно $\alpha = \frac{n}{kn-1}$,

$m = 1 + \frac{1}{n} - k$. Сокращая, получим

$$\begin{aligned}
& A \cdot \sigma t^{\sigma-1} \cdot \left(|x_f|^\varepsilon - |x|^\varepsilon \right) + A \cdot t^\sigma \cdot \alpha \frac{d(x_f)^\varepsilon}{dt} = \\
& = A^{kn} \cdot t^{\sigma kn} (k\alpha\varepsilon)^n (k\alpha-1)n\varepsilon x^{(n+1)(\varepsilon-1)} - A^{kn} \cdot t^{\sigma kn} (k\alpha\varepsilon)^n n(\varepsilon-1)x^{n(\varepsilon-1)-1} \cdot \left(|x_f|^\varepsilon - |x|^\varepsilon \right) - \gamma A^{m-1} t^{\sigma m}.
\end{aligned}$$

Если приравнять в этом тождестве показатели при $|x|$ в первом и третьем слагаемых $\varepsilon = (n+1)(\varepsilon-1)$, то $\varepsilon = \frac{n+1}{n}$, $n(\varepsilon-1)-1=0$. Таким образом тождество распадается на дифференциальное уравнение и тождество

$$\begin{cases} A\sigma t^{\sigma-1} |x_f|^\varepsilon + A t^\sigma \alpha \frac{d(x_f)^\varepsilon}{dt} = A^{kn} \cdot t^{\sigma kn} (k\alpha)^n \varepsilon^n n \cdot (1-\varepsilon) - \gamma A^m \cdot t^{\sigma m} \\ -A\sigma t^{\sigma-1} = A^{kn} t^{\sigma kn} (k\alpha)^n (k\alpha-1)n \cdot \varepsilon^{n+1} - A^{kn} \cdot t^{\sigma kn} (k\alpha)^n n \cdot (1-\varepsilon) \end{cases}$$

Из второго соотношения системы: $\sigma = -\frac{1}{kn-1}$ и амплитуда $A = \left[\left(\frac{k(n+1)}{kn-1} \right)^n n(k+1) \right]^{\frac{1}{1-kn}}$.

Первое уравнение системы является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка относительно функции $(x_f)^\varepsilon$ (предполагается, что $x_f > 0$)

$$\frac{d(x_f)^\varepsilon}{dt} - (x_f)^\varepsilon t^{-1} \left[\frac{n+1}{n^2(k+1)} \right] = -\frac{\gamma}{\alpha} A^{m-1} t^{\sigma(m-1)} \quad (7.11)$$

Решение этого обыкновенного неоднородного уравнения (7.11) может быть найдено как сумма решений соответствующего однородного уравнения $(x_f)^\varepsilon_g$ и частного решения неоднородного уравнения $(x_f)^\varepsilon_p$.

Решение однородного уравнения имеет вид

$$(x_f)^\varepsilon_g = C t^\beta, \quad \beta = \frac{n+1}{n^2(k+1)} > 0,$$

где $C = \text{const} > 0$ - постоянная интегрирования.

Частное решение будем искать в виде $(x_f)^\varepsilon_p = -p t^\omega$. Подставим это выражение в уравнение (7.11) и найдём, что $p = \gamma A^{m-1} [\alpha(\omega-\beta)]^{-1}$, $\omega = \sigma(m-1)+1 = \frac{(n+1)}{n} > 0$.

Можно показать, что выполнено неравенство $\omega > \beta > 0$, откуда $p > 0$.

Таким образом, закон движения фронта принимает окончательный вид

$$x_f(t) = \left[C t^\beta - p t^\omega \right]^{\frac{n}{n+1}} \geq 0, \quad (7.12)$$

Постоянная $C > 0$ определяется интегральной величиной начального распределения переносимой величины, то есть значением $Q > 0$.

Пусть $\eta = \frac{x}{x_f}$, тогда формулу (7.9) можно записать в виде

$$u(\eta, t) = A t^\sigma (x_f)^{\varepsilon\alpha} \left(1 - |\eta|^\varepsilon \right)^\alpha$$

При малых значениях t выполняется асимптотическое равенство $(x_f(t))^\varepsilon = Ct^\beta$, поэтому при $t \rightarrow 0$:

$$u(\eta, t) = At^\sigma C^\alpha t^{\alpha\beta} (1 - |\eta|^\varepsilon)^\alpha.$$

Решение (7.9) является слабым решением задачи, то есть удовлетворяет начальному условию, заданному в классе обобщённых функций

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) \cdot \chi(x) dx = Q \cdot \chi(0)$$

для любой финитной функции $\chi(x) \in C^\infty(R)$. Таким образом, получаем

$$AC^{\frac{n}{kn-1}} \int_0^1 \left(1 - \eta^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{n}{kn-1}} d\eta = \frac{Q}{2}.$$

Соответственно для коэффициента $C > 0$

$$C = Q^{\frac{kn-1}{n}} \left[2A \cdot \int_0^1 \left(1 - \eta^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{n}{kn-1}} d\eta \right]^{\frac{n}{kn-1}}.$$

Построенное автомодельное решение показывает, что при точечном «взрыве» в среде с распределёнными стоками переносимой величины, движение фронтальной поверхности, разграничивающей невозмущённую область, где $u = 0$, и возмущённую область пространства с $u > 0$, может иметь сложный характер. В рассматриваемом автомодельном случае скорость фронтальной поверхности определяется формулой

$$\dot{x}_f = \frac{n}{n+1} \cdot (x_f)^{-\frac{1}{n}} \cdot [C\beta \cdot t^{\beta-1} - p\omega \cdot t^{\omega-1}].$$

Это величина больше нуля ($\dot{x}_f > 0$) при $0 < t < t_1$, где $t_1 = (\beta C / \omega p)^{\frac{1}{\omega-1}}$, что соответствует волне нагрузки, и меньше нуля ($\dot{x}_f < 0$) при $t_1 < t < t_2$, $t_2 = (C/p)^{\frac{1}{\omega-\beta}}$, что соответствует волне разгрузки.

При $t > t_2$, $u(x, t) = 0$, то есть переносимая величина исчезает за конечное время. Процесс нелинейного переноса в данном случае оказывается ограниченным в пространстве и во времени, несмотря на неограниченность начального условия.

7.2. Обобщённое решение. Задача Коши. Теоремы сравнения решений.

Наличие фронтовых поверхностей при распространении переносимой величины по нулевому фону физически связано с вырождением уравнения переноса при $u = 0$. На самом деле, выполняя дифференцирование, уравнение (7.1'') с учётом (7.2) можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \left(u, \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \right) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \left(u, \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \right) \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f(u).$$

Если принять, что $\lambda = 0$ и $\frac{\partial \lambda}{\partial x} \neq 0$ при $u = 0$, то уравнение переноса становится эквивалентным уравнению первого порядка вблизи фронтальной поверхности. Поверхность фронта

является поверхностью слабого разрыва функции $u(x, t)$, так как на ней могут не существовать производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ и производные более высоких порядков. Поэтому, если включить в область определения одновременно и область, где $u > 0$, и область, где $u = 0$, то классического решения, вообще говоря, не существует.

Поэтому необходимо определить обобщенное решение для уравнения переноса (7.1), избегая требования гладкости, налагаемые на решения дифференциального уравнения. Самым естественным способом является переход от дифференциального уравнения (7.1) к интегральному закону сохранения. То есть вместо (7.1) можно рассматривать интегральные соотношения вида

$$\frac{d}{dt} \iiint_V u d\Omega = - \oint_S (\vec{q}, d\vec{S})$$

для произвольного неподвижного объема V , ограниченного замкнутой поверхностью S . Ясно, что в этом случае требования гладкости, налагаемые на решения, не являются необходимыми. Достоинством такого «физического» подхода является его высокая наглядность. С математической точки зрения наглядность часто не является достоинством, а «физический» подход к решению проблемы имеет недостаток – уменьшение размерности области, на котором определяется решение в правой части последнего соотношения.

Другой подход к определению обобщенного решения также строится на переходе от дифференциального соотношения (7.1) к интегральному. Основная идея такого перехода состоит в применении формулы интегрирования по частям после умножения обеих частей уравнения (7.1) на произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(\vec{r}, t)$. Таким образом, для некоторой области Ω пространства независимых переменных получаем

$$\int_{\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} \varphi \cdot \operatorname{div}(\vec{q}) d\Omega.$$

Откуда, после интегрирования по частям, получим

$$\int_{\Omega} \left[u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\operatorname{grad} \varphi, \vec{q}) \right] d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} (u\varphi) + \operatorname{div}(\varphi \vec{q}) \right] d\Omega. \quad (7.13)$$

Как видно, в левой части (7.13) требования к гладкости решения $u(\vec{r}, t)$ смягчены.

Очевидно также, что правая часть соотношения (7.13) должна вычисляться только на границах области Ω (естественно, после интегрирования по времени и применения формулы Гаусса-Остроградского). Поэтому возникающие проблемы могут быть решены за счёт соответствующего выбора функции $\varphi(\vec{r}, t)$ и формы области Ω . Например, там, где граница области Ω не совпадает с поверхностью, на которой известны переносимая величина $u(\vec{r}, t)$ и ее поток $q(\vec{r}, t)$, можно принять $\varphi(\vec{r}, t) = 0$, не снижая общности соотношения (7.13).

Корректность определения решения, в конечном итоге, обуславливается соответствующими теоремами существования и единственности.

Вернёмся от общих рассуждений к изучению уравнения (7.1''). Решение проблемы определения обобщенного решения упрощается, если заранее учесть его дифференциальные свойства. Назовём носителем решения $\operatorname{supp}(u(x, t))$ замыкание множества пар (x, t) , таких, что $u(x, t) > 0$ и будем считать множество $\operatorname{supp}(u(x, t))$ односвязным, а границу носителя

$l(x,t) = \partial(\text{supp}(u(x,t)))$ - кусочно-гладкой. Будем считать, что решение удовлетворяет уравнению (7.1'') внутри носителя, то есть при $(x,t) \in \omega$, где $\omega = \text{supp}(u(x,t)) \setminus l(x,t)$, в классическом смысле, и что решение вместе со своим потоком непрерывно во всей области определения. В соответствии с этими предположениями будем говорить, что $u(x,t) \in \hat{H}(\Omega)$, если $u(x,t) \in C^{2,1}(\omega) \cap C(\Omega)$ и $q(x,t) \in C(\Omega)$.

Назовём функцию $u(x,t) \in \hat{H}(\Omega)$ решением задачи Коши для уравнения переноса вида (7.1'')

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + f(u), \quad q = -\frac{\partial u^k}{\partial x} \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{n-1}, \quad (x,t) \in \Omega, \quad f(u) \in C(R_0), \quad R_0 = R_+ \cup \{0\}, \quad f(0) = 0 \quad (7.14)$$

если выполнены начальные условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R, \quad (7.15)$$

где

$$u_0(x) \in C(R), \quad u_0 \geq 0, \quad \int_R u_0(x) dx = E_0 < \infty, \quad (7.16)$$

граничные условия

$$u(x,t) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad q \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0 \quad (7.17)$$

и условие ограниченности интеграла

$$\int_R u(x,t) dx < \infty, \quad t \in R_+. \quad (7.18)$$

Следует отметить, что второе «потоковое» условие из (7.17) является следствием приведённой формулировки задачи Коши. Несмотря на это, если его учесть заранее (также как дифференциальные свойства решения), то это существенно упрощает исследования.

Вернёмся к определению обобщённого решения, основанного на формуле (7.13) для сформулированной задачи Коши (7.14) – (7.18). Выберем в качестве области Ω прямоугольник $\Omega = \{(x,t) | (x,t) \in (0,T) \times (x_1,x_2)\}$, $T = \text{const} > 0$, $x_1, x_2 = \text{const} > 0$, $x_2 > x_1$ и получим

$$\int_0^T \int_{x_1}^{x_2} \left[u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial(u^k)}{\partial x} \left| \frac{\partial(u^k)}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \cdot f(u) \right] dx dt = \int_0^T \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} (u \varphi) dx dt + \int_0^T \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{\partial(u^k)}{\partial x} \left| \frac{\partial(u^k)}{\partial x} \right|^{n-1} \right) dx dt.$$

Если теперь определить финитную функцию $\varphi(x,t)$ равной нулю при $t = 0$, $t = T$, $x = x_1$, $x = x_2$, то правая часть этого равенства окажется равной нулю и, окончательно, получим

$$\int_0^T \int_{x_1}^{x_2} \left[u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial(u^k)}{\partial x} \left| \frac{\partial(u^k)}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \cdot f(u) \right] dx dt = 0. \quad (7.19)$$

Таким образом, обобщённым решением задачи Коши (7.14) - (7.18) следует считать непрерывную неотрицательную функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (7.19) для любых $T > 0$, $x_1, x_2 \in R$.

Качественное исследование свойств обобщённых решений уравнения (7.1'') может быть основано на теоремах сравнения, являющихся обобщением принципа максимума,

сформулированного в теории уравнений математической физики для уравнений параболического типа.

В этой связи, назовём функцию $\theta(x, t) \in \hat{H}(\Omega)$ суперрешением уравнения (7.14), если выполнено неравенство

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \geq \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial(\theta^k)}{\partial x} \left| \frac{\partial(\theta^k)}{\partial x} \right|^{n-1} + f(\theta) \right]. \quad (7.20)$$

Во многих случаях суперрешение $\theta(x, t)$ удаётся построить аналитически и использовать затем для выяснения качественных особенностей решения, базируясь на теоремах сравнения по начальным данным и функциям источника $f(u)$. Ниже приводится формулировка теоремы сравнения, объединяющая различные её варианты.

Теорема (сравнения) 7.1. Пусть функция $\theta(x, t) \in \hat{H}(\Omega)$ является суперрешением уравнения (7.19) с функцией источника $f_1(\theta)$, такой, что $f_1(0) = 0$, $f_1(\theta) \in C(R_0)$, и выполнено одно из условий:

- (i) $f_1(z) > f(z)$, $z \in R_+$, причём $f_1(z) \in C^1(R_0)$, то есть существует непрерывная производная $f_1'(z)$, либо существует $a_0 = \text{const} > 0$, такая, что $f_1(z) \leq 0$ при $z \in [0, a_0]$, т.е. функция источника непрерывная и неположительная при малых значениях переносимой величины;
- (ii) $f_1(z) = f(z)$, $f(z_1) \geq f(z_2)$ при $z_2 > z_1$, $z \in R_+$, то есть функция источника невозрастающая.

Тогда, если $\theta(x, 0) \geq u_0(x)$, $x \in R$, то $\theta(x, t) \geq u(x, t)$, $(x, t) \in \Omega$.

Замечание. Если определить функцию $\theta_1(x, t) \in \hat{H}(\Omega)$ как субрешение уравнения (7.19) при выполнении неравенства

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} \leq \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial(\theta_1^k)}{\partial x} \left| \frac{\partial(\theta_1^k)}{\partial x} \right|^{n-1} + f(\theta_1) \right], \quad (7.20')$$

то для него выполняются все выводы теоремы 7.1 с заменой соответствующих неравенств на противоположные.

Следует отметить, что условия (i) или (ii), налагаемые на функцию источника, не являются избыточными. Отказ от этих условий приводит, например, к неединственности решения краевой задачи (подробнее смотри в монографии [1]), что в конечном итоге противоречит теореме сравнения.

В качестве примера укажем на возможность неединственности решения для рассматриваемой здесь задачи Коши (7.14) – (7.18), при отказе от условий (i) и (ii) теоремы сравнения (7.1).

Если у функции источника в правой части уравнения (7.1''') поменять знак, то получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left| \frac{\partial(u^k)}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial(u^k)}{\partial x} \right] + \gamma u^m, \gamma > 0, m > 0.$$

Ясно, что в этом случае функция источника $f(u) = \gamma u^m$ при $0 < m < 1$ не удовлетворяет условиям теоремы сравнения 7.1.

Также как в задаче о точечном «взрыве» (см. раздел 7.1) примем для получения автомодельного решения $m = 1 + \frac{1}{n} - k$, $kn > 1$ и найдем автомодельное решение в виде (7.9). Для функции x_f , определяющей положение фронтовой поверхности, также получим соотношение (7.12), где в отличие от точечного «взрыва» $p = [\gamma A^{1-m} \alpha(\omega - \beta)]^{-1} < 0$, а остальные неравенства сохраняют свою силу.

Если теперь принять величину C , определяющую мощность точечного взрыва, равной нулю $C = 0$, то оказывается, что искомое автомодельное решение не равно тождественно нулю, а имеет вид

$$u(x, t) = A \cdot (-pt)^{\frac{n}{kn-1}} \cdot \left(1 - |\eta|^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{n}{kn-1}}, \quad \eta = \frac{x}{x_f(t)}, \quad x_f = (-p)^{\frac{n}{n+1}} \cdot t. \quad (7.9')$$

Тем самым автомодельное решение задачи оказывается независимым от пространственного положения точечного «взрыва». В силу этого можно утверждать, что наряду с (7.9') решением автомодельной задачи является также функция

$$u(x, t) = A \cdot t^\sigma \cdot \left(|x_f + \Delta|^\varepsilon - |x + \Delta|^\varepsilon\right)^\alpha$$

для любой постоянной $|\Delta| < \infty$, что, естественно, противоречит теореме сравнения 7.1, так как в начальный момент все эти решения равны нулю.

В связи с нетривиальным влиянием функции источника на качественный характер процесса переноса, представляет интерес обобщение теоремы сравнения 7.1 на функцию источника более общего вида.

Теорема (сравнения) 7.2. Пусть функции $u_i(x, t) \in \hat{H}(\Omega)$, $i = 1, 2$ являются решениями двух задач Коши (7.14) – (7.18), отличающиеся начальными условиями $u_i(x, 0) = u_{0i}(x)$, причем $u_{01}(x) \geq u_{02}(x)$, $x \in R$. Тогда $u_1(x, t) \geq u_2(x, t)$, $(x, t) \in \Omega$, если выполнены условия

(I): $f(z)$ - кусочно-монотонная функция,

(II): $f(z) < 0$, $0 < z < a_0$, $a_0 = \text{const} > 0$,

(III): $f(z) \in \text{Lip}(R_+) \cap C^m(R_0)$, $m > 0$, причём существует постоянная $A = \text{const} > 0$, такая, что $f_1(z) = f(z) + A \cdot z^m \in \text{Lip}(R_0)$.

Доказательство *Теоремы 7.2* основывается непосредственно на *Теореме 7.1* и не требует дополнительных сведений, кроме неравенства Гронуолла-Беллмана (см., например, [2]). Рассмотрим две вспомогательные задачи Коши, отличающиеся от сформулированных в *Теореме 7.2*, заменой функции источника $f(u_i)$ на $f_{\lambda i}(u_{\lambda i}) = f(u_{\lambda i}) - \lambda \cdot u_{\lambda i}$, $\lambda = \text{const} > 0$, где $u_{\lambda i}(x, t)$, $i = 1, 2$ - решения полученных таким способом двух задач Коши. Из теоремы 7.1 следует, что $u_i(x, t) \geq u_{\lambda i}(x, t)$, $(x, t) \in \Omega$.

Обозначим $U_i = u_i - u_{\lambda i}$, $i = 1, 2$. Выберем полосу $\Omega_1 \subset \Omega$, $\Omega_1 = \{(x, t) | x \in R, 0 \leq t \leq t^*\}$, где $t^* = \text{const} > 0$. Если по полосе Ω_1 проинтегрировать два уравнения (7.14), каждому из ко-

торых соответствует своя функция источника $f_{\lambda 1}$ и $f_{\lambda 2}$, затем применить формулу Грина, а затем вычесть их, то получим выражение

$$\oint_{\partial \Omega_1} U_i dx + \oint_{\partial \Omega_1} \left[\frac{\partial(u_i^k)}{\partial x} \left| \frac{\partial(u_i^k)}{\partial x} \right|^{n-1} - \frac{\partial(u_{\lambda i}^k)}{\partial x} \left| \frac{\partial(u_{\lambda i}^k)}{\partial x} \right|^{n-1} \right] dt + \lambda \iint_{\Omega_1} u_{\lambda i} dx dt + \iint_{\Omega_1} [f(u_i) - f(u_{\lambda i})] dx dt = 0.$$

Переходя в этом соотношении от двойного интеграла к повторному с учётом граничных условий (7.17) получим

$$\int_R U_i(x, t^*) dx - \int_0^{t^*} \int_R [f(u_i) - f(u_{\lambda i})] dx dt - \lambda \int_0^{t^*} \int_R u_{\lambda i} dx dt = 0.$$

При $0 < m < 1$, условия (I) – (III) теоремы 7.2 позволяют определить функцию

$$\bar{f}(z) = f(z) + A \cdot z^m,$$

($A > 0$ - некоторая постоянная), такую, что $\bar{f}(z) \in Lip(R_0)$. Т.к. функция $A \cdot z^m$ монотонно возрастающая, из последнего равенства получаем

$$\int_R U_i(x, t^*) dx - \int_0^{t^*} \int_R [\bar{f}(u_i) - \bar{f}(u_{\lambda i})] dx dt - \lambda \int_0^{t^*} \int_R u_{\lambda i} dx dt \leq 0.$$

Это неравенство будет справедливо и в случае $m \geq 1$, только надо принять $A = 0$, т.е.

$\bar{f}(z) = f(z)$. Используя далее произвольность выбора величины $t^* \in R_+$ и определение функции $\bar{f}(z)$, из этого неравенства получим

$$\int_R U_i(x, t) dx \leq M \int_0^t \int_R U_i(x, \xi) dx d\xi - \lambda M_1 \cdot t$$

(Здесь $M = \text{const} > 0$, $M_1 = \sup_{t \in R_+} \int_{R_+} u_{\lambda i} dx < \infty$ (см. условие (7.18))).

Из неравенства Гронуолла-Беллмана получаем оценки

$$\int_R U_i(x, t) dx \leq \lambda M_1 \frac{\exp(M \cdot t)}{M}.$$

Следовательно, $\int_R U_i(x, t) dx \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$.

По теореме 7.1 при любом $\lambda > 0$ выполняются неравенства $u_1(x, t) \geq u_{\lambda 1}(x, t)$, $i = 1, 2$ и $u_2(x, t) \geq u_{\lambda 2}(x, t)$. Поэтому, в силу непрерывности функций $u_i(x, t) \in C(\Omega)$, $i = 1, 2$, получаем искомое утверждение $u_1(x, t) \geq u_2(x, t)$, $(x, t) \in \Omega$.

Замечание 1. В Теоремах 7.1 и 7.2 предполагается ограниченность решения $u(x, t)$ во всей полуплоскости $(x, t) \in \Omega$. Если решение становится неограниченным при $t > T$,

$T = \text{const} > 0$, то в качестве области определения можно рассматривать полосу

$\{(x, t) | |x| < \infty, 0 < t < T\}$. Все выводы при этом остаются справедливыми.

Теоремы сравнения 7.1 и 7.2 позволяют эффективно исследовать качественные особенности эволюции начального распределения переносимой величины. Для примера рассмотрим возможность существования стационарных пространственно локализованных (имеющих ограничительный носитель или *финитных*) решений задачи Коши (7.14) – (7.18).

Стационарные пространственно локализованные решения задачи Коши существуют, если функция источника удовлетворяет условию (II) *Теоремы 7.2*. Эти решения могут реализовываться для всех $t > 0$ при специальном подборе начальных условий, или как предел эволюции решений задачи Коши при $t \rightarrow \infty$.

Стационарное решение определяется из уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{d(u_s)^k}{dx} \left| \frac{d(u_s)^k}{dx} \right|^{n-1} \right] + f(u_s) = 0 \quad (7.21)$$

$k, n > 0$, $f(0) = 0$, $u_s(x) \geq 0$, $x \in R$. Граничными условиями для уравнения (7.21) являются

$$u_s|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad q_s|_{|x| \rightarrow \infty} = 0. \quad (7.22)$$

Не теряя общности, решения задачи (7.21), (7.22) будем считать симметричными относительно плоскости $x = 0$. Тогда уравнение (7.21) сводится к виду:

$$\frac{dw}{dx} = \left[\pm \int_{w(0)}^w \frac{n+1}{n} f_k(\varepsilon) d\varepsilon \right]^{\frac{1}{n+1}}, \quad (7.23)$$

где $w = u^k$, $f_k(w) = f(u)$. Интегрированием (7.23) получаем решение в квадратурах

$$x = \int_{w(0)}^w \left[\pm \int_{w(0)}^{\xi} \frac{n+1}{n} f_k(\varepsilon) d\varepsilon \right]^{\frac{1}{n+1}} d\xi. \quad (7.24)$$

Непосредственно из уравнения (7.21) с учётом граничных условий (7.22) можно вывести условие существования стационарного решения (7.24), накладываемое на функцию источника. Для этого проинтегрируем уравнение (7.21) по независимой переменной и получим

$$\int_R f_k(w) dx = 0.$$

Откуда с учётом (7.23), найдём

$$\int_{w(0)}^0 f_k(w) \left[\pm \int_{w(0)}^w \frac{n+1}{n} f_k(\varepsilon) d\varepsilon \right]^{\frac{1}{n+1}} dw = 0.$$

Из последнего соотношения, после интегрирования и возвращения к переменной u получается условие, налагаемое на функцию источника $f(u)$, необходимое для существования стационарного решения (7.24):

$$\int_0^{u_m} u^{k-1} f(u) du = 0, \quad u_m = u_s(0) \quad (7.25)$$

соответственно, в этих обозначениях $w(0) = (u_m)^k$.

Пространственная локализация (ограниченность носителя) стационарного решения (7.24) возможна, если выражение в правой части (7.24) остаётся ограниченным при $w \rightarrow +0$. Обозначим

$$x_\phi = \int_{(u_m)^k}^0 \left[\int_{(u_m)^k}^{\xi} \frac{n+1}{n} f_k(\varepsilon) d\varepsilon \right]^{\frac{1}{n+1}} d\xi,$$

тогда решение стационарной задачи должно быть записано в составном виде

$$\begin{cases} u_s > 0, & |x| < x_\phi \\ u_s = 0, & |x| > x_\phi \end{cases}.$$

Найдём условие, налагаемое на асимптотическое поведение функции источника $f(u)$ при $u \rightarrow +0$, необходимое для локализации стационарного решения. Для этого предположим, что для функции источника справедливо асимптотическое представление:

$$f(u) \sim -\gamma u^m \text{ при } u \rightarrow +0,$$

где $m = \text{const} > 0$.

Асимптотическое представление решения $u_s(x)$ при $|x| \rightarrow x_\phi - 0$ удобно также искать в виде степенной зависимости

$$u_s \sim a \cdot (x_\phi - |x|)^\alpha,$$

$a, \alpha = \text{const} > 0$. Подставляя это асимптотическое представление непосредственно в уравнение (7.21), получим

$$a^{kn} \cdot n \cdot (k\alpha)^n \cdot (k\alpha - 1) \cdot (x_\phi - |x|)^{n(k\alpha - 1)} - \gamma \cdot a^m \cdot (x_\phi - |x|)^{\alpha m} = 0.$$

Отсюда находим выражение для величин α и a :

$$\alpha = \frac{(n+1)}{(kn-m)}, \quad a = \left[\gamma^{-1} \cdot n \cdot (k\alpha)^n \cdot (k\alpha - 1) \right]^{\frac{1}{(m-kn)}}.$$

Таким образом, стационарное решение существует, если выполнено условие (7.25) и оно оказывается пространственно локализованным, если функция источника имеет асимптотическое представление $f(u) \sim -\gamma u^m$, причём $m < kn$.

Наличие стационарного пространственно локализованного решения еще не означает, что оно может реализовываться как результат эволюции начального распределения переносимой величины. Класс начальных условий, для которых возможно $u(x, t) \rightarrow u_s(x)$ при $t \rightarrow \infty$ достаточно узок, как это следует из следующего утверждения.

Утверждение. Пусть выполнены условия *теоремы 7.2*, накладываемые на функцию источника (I) – (III). Пусть также задача Коши имеет локализованное стационарное решение $u_s(x)$ (см. выше), причем начальное условие $u(x, 0) = u_0(x) \geq u_s(x)$ (либо $u_0(x) \leq u_s(x)$), $x \in R$. Тогда, если найдется такое $\varepsilon = \text{const}, 0 < |\varepsilon| < \infty$, что функция $u_0(x) \geq u_s(x + \varepsilon)$ (либо $u_0(x) \leq u_s(x + \varepsilon)$), $x \in R$, стационарное локализованное решение $u_s(x)$ не может быть пределом эволюции решения $u(x, t)$, в том числе и при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство непосредственно следует из *теоремы сравнения*, если учесть, что функция $u_s(x + \varepsilon)$ также является стационарным решением задачи Коши. Поэтому на основании *теоремы 7.2* одновременно $u(x, t) \geq u_s(x)$, $u(x, t) \geq u_s(x + \varepsilon)$ (либо $u(x, t) \leq u_s(x)$, $u(x, t) \leq u_s(x + \varepsilon)$), $(x, t) \in \Omega$. Откуда и следует доказываемое утверждение.

7.3. Асимптотический анализ процесса переноса в окрестности фронтовой поверхности.

Наличие фронтовой поверхности определяет качественные особенности интенсивного переноса. Об этом свидетельствуют частные решения, приведённые в разделе 7.1. Во всех случаях вид решения уравнения (7.1) однозначно связан с режимом движения фронтовой поверхности. Естественно предположить, что при эволюции произвольного распределения пе-

реносимой величины такая связь также существует, но лишь в окрестности фронтовой поверхности. Поэтому само уравнение переноса (7.14) должно упрощаться вблизи фронта.

Рассмотрим уравнение вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(u), \quad u(x, t) \geq 0, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (7.26)$$

где функция $u(x, t) \in C^{1,1}(\omega) \cap C(\Omega)$ (например, удовлетворяет задаче Коши (7.14) – (7.18), напомним, что $\omega = \text{supp } u \setminus \partial \text{supp } u$), а $L(u)$ – некоторый оператор. Будем считать, что фронтовая поверхность задана уравнением $x = x_f(t)$, где $x_f(t) \in C^1(R_+)$ и для определённости будем также считать, что $u(x, t) > 0$ при $x > x_f(t)$ и $u(x, t) = 0$ при $x \leq x_f(t)$.

Замена переменных $(x, t) \mapsto (x_1 = x - x_f(t), \quad t_1 = t)$, приводит уравнение (7.26) к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} - \dot{x}_f \frac{\partial u}{\partial x_1} = L(u) \quad (7.27)$$

Уравнение фронтовой поверхности в новых переменных примет вид $x_1 = 0$.

Очевидно, что $\lim_{x_1 \rightarrow +0} \frac{\partial u}{\partial t_1} = 0$ в силу того, что $u(0, t_1) = 0$ и непрерывности самой производной. Тогда, предполагая, что $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(0, t_1) \neq 0$, получим искомое асимптотическое представление для левой части уравнения (7.27)

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} - \dot{x}_f \frac{\partial u}{\partial x_1} \sim -\dot{x}_f \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad x_1 \rightarrow +0, \quad \dot{x}_f \neq 0. \quad (7.28)$$

Если все же $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(0, t_1) = 0$, то уточним поведение этой производной в окрестности фронта $x_1 \rightarrow +0$. Предположим, что функция $u_1(x_1, t_1) \in C^{1,1}(\omega) \cap C^{\alpha,1}(\Omega)$, и рассмотрим функцию $u_1 = u^{\frac{1}{\beta}}$, причём $\beta > 0$ выберем так, чтобы $u_1(x_1, t_1) \in C^{1,1}(\omega) \cap C^{\frac{\alpha}{\beta},1}(\Omega)$. При этом положим $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ и рассмотрим отношение: $\xi(x_1, t_1) = \left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right| \left/ \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| \right|$, $(x_1, t_1) \in \Omega$. Замечая, что $\frac{\partial u_1}{\partial t_1} \rightarrow 0$ при $x_1 \rightarrow 0$, а $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \rightarrow \infty$ при $x_1 \rightarrow +0$, $(x_1, t_1) \in \Omega$, получим

$$\lim_{x_1 \rightarrow +0} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right| \left/ \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| \right| \right) = 0.$$

Отсюда так же следует искомое асимптотическое представление (7.28).

Асимптотическое представление (7.28) является достаточно грубым, поскольку нет оценки величины остатка. Его вид не зависит от вида оператора $L(u)$. Более точное асимптотическое представление можно получить, конкретизируя вид оператора $L(u)$.

С учётом (7.28) уравнение (7.14) вблизи движущейся фронтовой поверхности оказывается асимптотически эквивалентным уравнению

$$-\dot{x}_f \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial(u)^k}{\partial x_1} \left| \frac{\partial(u)^k}{\partial x_1} \right|^{n-1} \right] + f(u), \quad \dot{x}_f \neq 0. \quad (7.29)$$

Соотношение (7.29) позволяет определить главный член асимптотического представления решения вблизи фронтовой поверхности.

Положим в (7.29) для определенности $f(u) = -\gamma \cdot u^m$, $\gamma = \text{const} > 0$, $m = \text{const} > 0$.

Порядок уравнения (7.29) можно понизить, если в качестве зависимой переменной выбрать $p = \frac{\partial w}{\partial x_1}$, считая её функцией $p = p(w)$, где $w = u^k$. Уравнение (7.29) тогда принимает вид

$$\frac{dp}{dw} = \frac{-\frac{\dot{x}_f}{k} w^{\frac{1-k}{k}} p + \gamma \cdot w^{\frac{m}{k}}}{n \cdot p^n}, \quad (7.30)$$

$k > 0$, $n > 0$, $m \geq 0$, $\dot{x}_f \neq 0$.

Нас интересует интегральная кривая, проходящая через точку $p = w = 0$ и лежащая в I квадранте плоскости (w, p) . Из (7.30) видно, что эта точка является особой.

Асимптотическое представление решения (7.30) при $w \rightarrow 0$ будем искать в виде изолированных соприкасающихся парабол:

$$p = b \cdot w^\beta, \quad b > 0, \quad \beta > 0. \quad (7.31)$$

В рамках этого метода имеется возможность не только определить вид искомого асимптотического представления, но и исследовать единственность соответствующей интегральной кривой. Для выяснения единственности интегральной кривой рассмотрим функцию

$$\Psi(b_1, w) = w^{-\beta} \cdot \left[\frac{-\frac{\dot{x}_f}{k} \cdot w^{\frac{1-k}{k}} \cdot p_1 + \gamma \cdot w^{\frac{m}{k}}}{n \cdot p_1^n} - b_1 \cdot \beta \cdot w^{\beta-1} \right],$$

где $p_1 = b_1 w^\beta$. Смысл этой функции становится ясен, если учесть, что выражение в скобках есть «невязка», возникающая в уравнении (7.30) при замене коэффициента b на b_1 в представлении (7.31). Знак производной $\frac{\partial \Psi}{\partial b_1}(b_1, w)$ при $b_1 \rightarrow b$ и $w \rightarrow 0$ определяет количество

интегральных кривых. Подробности можно найти в работе [3].

Для определения конкретного вида асимптотического представления интегральной кривой подставим (7.31) в (7.30) и получим

$$b^{n+1} \cdot n \cdot \beta \cdot w^{\beta(1+n)-1} = -\frac{\dot{x}_f}{k} b \cdot w^{\beta+\frac{1-k}{k}} + \gamma \cdot b^{\frac{m}{k}} \cdot w^{\frac{m}{k}}. \quad (7.32)$$

Анализ соотношения (7.32) можно провести для трёх случаев в зависимости от величины показателя m .

Если $m > m_1$, $m_1 = 1 + \frac{1}{n} - k$, то из (7.32) получаем две возможности: всегда при значении показателя $m \geq 0$ возможна волна нагрузки

$$\beta = \frac{1}{kn}, \quad b = (-\dot{x}_f)^{\frac{1}{n}}, \quad \dot{x}_f < 0, \quad (7.33)$$

при значении показателя $m < 1$ возможна и волна разгрузки

$$\beta = 1 + \frac{(m-1)}{k}, \quad b = \frac{\gamma k}{\dot{x}_f}, \quad \dot{x}_f > 0. \quad (7.34)$$

При этом $\frac{\partial \Psi}{\partial b_1}(b, 0) = -\frac{1}{k} < 0$ в случае (7.33) и $\frac{\partial \Psi}{\partial b_1}(b, 0) = -\left(\frac{\gamma \cdot k}{\dot{x}_f}\right) < 0$ в случае (7.34).

Тем самым устанавливается единственность обоих соответствующих интегральных кривых.

Если $m = m_1$, то из (7.32) следует

$$\beta = \frac{1}{kn}, \quad b \cdot (b^n + \dot{x}_f) = \gamma. \quad (7.35)$$

При этом возможны два варианта: если $b^{n+1} > \gamma$, то $\dot{x}_f > 0$ (волна разгрузки); если $b^{n+1} < \gamma$, то $\dot{x}_f < 0$ (волна нагрузки). В обоих вариантах $\frac{\partial \Psi}{\partial b_1}(b, 0) = -\left[\gamma \cdot b^{-n-1} \frac{m}{k} + \frac{1}{k}\right] < 0$ и, следовательно, соответствующие интегральные кривые единственны.

Если $m < m_1$, то асимптотическое представление (7.31) не зависит от скорости фронта $\dot{x}_f$:

$$\beta = \frac{(m+k)}{k(1+n)}, \quad b = \left(\frac{\gamma \cdot k}{n \cdot \beta}\right)^{\frac{1}{(n+1)}}. \quad (7.36)$$

При этом производная $\frac{\partial \Psi}{\partial b_1}(b, 0) = -\frac{n+1}{\beta} < 0$, что также гарантирует единственность интегральной кривой.

Полученных таким образом формул (7.33) – (7.36) вполне достаточно для определения асимптотического представления переносимой величины $u(x, t)$ вблизи фронта, если его скорость $\dot{x}_f \neq 0$. На самом деле, из соотношения (7.31) следует

$$u = a \cdot x_1^\alpha, \quad a(t) = [b \cdot (1-\beta)]^{\frac{n}{kn-1}}, \quad \alpha = \frac{1}{k(1-\beta)}. \quad (7.37)$$

Тогда из (7.33) – (7.37) определяются искомые асимптотические соотношения для переносимой величины $u(x, t)$ вблизи фронта.

В соответствии с разобранными выше случаями для значений показателя m получаем, что если $m > m_1$, то возможны два варианта:

$$\dot{x}_f(t) = -(k\alpha_1)^n \cdot a^{kn-1} < 0, \quad \alpha = \alpha_1 = \frac{n}{(kn-1)}. \quad (7.38)$$

Это асимптотическое представление вида (7.31), то есть когда $\dot{x}_f \neq 0$, единственно, если показатель $m > 1$. Если же $m < 1$, то появляется вторая возможность

$$\dot{x}_f(t) = (1-m) \cdot \gamma \cdot a^{m-1} > 0, \quad \alpha = \alpha_1 = \frac{1}{(1-m)}, \quad m < 1. \quad (7.39)$$

Если $m = m_1$, то $\alpha = \alpha_s = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{(n+1)}{(kn-m)}$,

$$\dot{x}_f(t) = \frac{\gamma}{\alpha_3 \cdot a^{\frac{1}{\alpha_3}}} - (k \cdot \alpha_3)^n \cdot a^{kn-1} < 0. \quad (7.40)$$

Следовательно, если ввести обозначение $a_s = \left[\frac{(kn-1)^{n+1} \gamma}{k^n n^{n+1}} \right]^{\frac{\alpha_1}{(n+1)}}$, то при $m = m_1$

$$\begin{cases} \dot{x}_f < 0, & a(t) < a_s \\ \dot{x}_f > 0, & a(t) > a_s \end{cases} \quad (7.41)$$

Поэтому при $m = m_1$, в принципе, возможны оба режима движения фронта: и $\dot{x}_f < 0$, и $\dot{x}_f > 0$. При этом в асимптотическом представлении (7.37) значение $a(t)$ различно для разных режимов, но показатель α одинаковый: $\alpha = \alpha_s$.

Наконец, если $m_1 > m \geq 0$, то из соотношения (7.37) нельзя выразить $\dot{x}_f(t)$, однако можно утверждать, что в этом случае $\alpha = \alpha_3$ и

$$a(t) = a_c = \left[\frac{\gamma(n+1)}{nk^n \alpha_3^{n+1} (k+m)} \right]^{\frac{1}{(kn-m)}}. \quad (7.42)$$

При $m = m_1$ постоянная a_c в (7.42) совпадает с a_s из (7.41).

Остановимся теперь на возможности существования неподвижного положения фронта: $\dot{x}_f \equiv 0$, по крайней мере, в течение некоторого промежутка времени. Проведённый асимптотический анализ, основанный на уравнении (7.30), не исчерпывает всех возможностей для уравнения (7.14), так как выражение (7.30) не имеет места при $\dot{x}_f \equiv 0$. Поэтому обратимся непосредственно к уравнению (7.14), предполагая, как и ранее, $u(x, t) = a \cdot x_1^\alpha$ при $x_1 \rightarrow +0$. Подставляя это асимптотическое представление в (7.14) и полагая $\dot{x}_f \equiv 0$, получим

$$\dot{a} \cdot x_1^\alpha = a^{kn} \cdot n \cdot (k\alpha)^n \cdot (k\alpha - 1) \cdot x_1^{n(k\alpha-1)-1} - \gamma \cdot a^m \cdot x_1^{m\alpha}. \quad (7.43)$$

Из (7.43) следует, что при $m < 1$ фиксированное положение фронта возможно для $\alpha = \alpha_3$ и $a(t) = a_c = \text{const}$ из (7.42) в асимптотическом представлении решения $u(x, t)$.

При $m = 1$ режим движения $\dot{x}_f \equiv 0$ возможен при $\alpha = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{(n+1)}{(kn-m)}$ и $\alpha > \alpha_4$:

$$a(t) = e^{-\gamma t} \cdot \alpha_4^{-\alpha_1} \cdot \left[n \cdot (k+1) \cdot k^n \cdot (\Theta - \theta(t)) \right]^{\frac{1}{1-kn}}, \quad \theta(t) = \frac{1 - \exp(-\gamma \cdot (kn-1) \cdot t)}{\gamma \cdot (kn-1)} \quad (7.44)$$

и

$$a(t) = a_0 e^{-\gamma t}. \quad (7.45)$$

Здесь $\Theta, a_0 = \text{const} > 0$.

При $m > 1$ из (7.43) следует, что режим $\dot{x}_f = 0$ имеет место при $\alpha = \alpha_4$ и

$$a(t) = \alpha_4^{-\alpha_1} \cdot \left[n \cdot (k+1) \cdot k^n \cdot (T-t) \right]^{\frac{1}{1-kn}}, \quad T = \text{const} > 0. \quad (7.46)$$

Следует особо отметить случай $m = 0$. Уравнение вида (7.14) с функцией источника $f = -\gamma$ и $k = 2$ соответствует МГД-течению степенной жидкости в поперечном магнитном

поле в ламинарном пограничном слое. Надо иметь в виду, что в этом случае уравнение переноса типа (7.14) возникает из уравнения вида

$$u \frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial(u^2)}{\partial x} \left| \frac{\partial(u^2)}{\partial x} \right|^{n-1} \right) - \gamma u$$

после сокращения на u . То есть тривиальное решение $u = 0$ является алгебраическим корнем этого уравнения.

Проведённый асимптотический анализ совместно с теоремами сравнения решений по начальным данным и функциям источника (раздел 7.2) позволяет эффективно анализировать процессы, происходящие в системах, описываемых уравнением (7.14). В качестве примера рассмотрим поперечную передачу импульса в дилатантной электропроводной жидкости в поперечном постоянном магнитном поле.

Пусть электропроводная дилатантная жидкость занимает полупространство $+\infty < x < 0$, однородное магнитное поле $B_0 = \text{const}$ направлено вдоль оси x , пластина ($x=0$) движется поступательно в своей плоскости с постоянной по направлению скоростью $U_0(t)$. В безындукционном приближении нестационарная краевая задача, описывающая сдвиговое МГД-течение дилатантной жидкости, записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \omega \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{n-1} \right) - \omega \cdot \gamma \cdot u, \quad x \in R_+, \quad t \in R_+ \quad (7.47)$$

$$u(x, 0) = \Phi(x), \quad u(0, t) = U_0(t), \quad u(\infty, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\infty, t) = 0.$$

Здесь $u(x, t)$ - скорость жидкости, $\omega = \frac{A}{\rho}$, $\gamma = \frac{\sigma \cdot B_0^2}{\omega \cdot \rho}$, σ - электропроводность жидкости, ρ - её плотность, $A > 0$, $n > 1$ - реологические характеристики жидкости.

Положим $U_0(t) = U_{01} = \text{const}$ и $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, тогда соответствующая задача имеет решение

$$u_{s1}(x) = \begin{cases} U_{01} \cdot \left(1 - \frac{x}{x_{\phi 1}} \right)^{\frac{n+1}{n-1}}, & 0 < x < x_{\phi 1}, \\ 0, & x > x_{\phi 1}. \end{cases} \quad (7.48)$$

$$x_{\phi 1} = \left[\frac{2n(n+1)^n U_{01}^{n-1}}{\gamma(n-1)^{n+1}} \right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

Как видно, стационарное решение (7.48) имеет компактный носитель. Положение фронтовой поверхности определяется равенством $x = x_{\phi 1}$.

На основании теоремы сравнения 7.1 можно заключить, что решение задачи (7.48) с $0 \leq U_0(t) < \infty$ и ограниченным начальным условием $\Phi(x) < \infty$, $x \in R_+$ с компактным носителем

$$\begin{cases} \Phi(x) > 0, & 0 \leq x < x_f(0), \\ \Phi(x) = 0, & x \geq x_f(0), \end{cases}$$

также имеет ограниченный по координате x носитель:

$$\begin{cases} u(x, t) > 0, & 0 \leq x < x_f(t), \\ u(x, t) = 0, & x \geq x_f(t), \end{cases}$$

где поверхность $x = x_f(t)$ является фронтовой поверхностью.

Замена переменной $t \rightarrow \frac{t}{\omega}$ сводит уравнение (7.47) к виду (7.14). Тогда в новых переменных на основании проведенного анализа можно получить асимптотическое представление решения при $x \rightarrow x_f + 0$

$$u(x, t) = a(t) \cdot (x_f - x)^{\frac{n}{n-1}}, \quad a(t) > 0$$

для движущегося фронта $\dot{x}_f > 0$. Решения для $\dot{x}_f < 0$ не существует. Т.е. область с отличными от нуля сдвиговыми возмущениями не может уменьшаться. Этот факт соответствует необратимости процессов переноса, частным случаем которых является гидродинамика неньютоновских дилатантных жидкостей.

Рассмотрим переход решения с одного стационарного решения для соответствующего $U_{01} = \text{const}$ на другое $U_{02} = \text{const}$, $U_{02} > U_{01} > 0$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция

$$u_*(x, t) = \begin{cases} U_{02} \cdot \left[\left(1 - \frac{x}{x_{\phi 1}} \right)^{n+1} / \left(1 - \frac{t}{T} \right) \right]^{\frac{1}{n-1}}, & 0 < x < x_{\phi 1}, \\ 0, & x \leq x_{\phi 1}, \end{cases}$$

является решением краевой задачи (7.47) при $U_0(t) = \frac{U_{02}}{(1-t/T)^{\frac{1}{n-1}}} > U_{02}$ для $\gamma = 0$, т. е. при

отсутствии функции источника, с неподвижным фронтом $x = x_{\phi 1} = \text{const}$ в течение времени

$0 \leq t < T$, $T = \frac{(U_{01}/U_{02})^{n-1}}{\gamma \cdot (n-1)}$. На основании *Теоремы 7.1* можно утверждать, что решение указанной задачи о перестройке стационарных режимов течения жидкости при $U_{02} > U_{01}$ метастабильно локализовано, по крайней мере, в течение времени $0 \leq t < T$. Применяя *Теоремы 7.1 и 7.2*, можно показать, что фронт обязательно придёт в движение, начиная с момента $t = T_1 > T$.

Для наглядности полученных теоретических утверждений приведем результаты численного исследования первой краевой задачи в безразмерных переменных для одного частного случая перестройки двух стационарных режимов движения жидкости.

Выберем в качестве характерных величин T^* – характерное время, U^* – характерную скорость, X^* – характерную длину. Сохраняя для зависимых и независимых безразмерных переменных те же обозначения, что и для размерных, получим краевую задачу формально полностью совпадающую с (7.47). Лишь только параметры ω и γ становятся безразмерными

$$\omega = \frac{AT^*(U^*)^{n-1}}{\rho(X^*)^{n+1}}, \quad \gamma = \frac{\sigma B_0^2 T^*}{\rho}.$$

Для конкретного расчета примем показатель $n = 2$, и параметры $\omega = 1$, $\gamma = 36$. Выберем также начальное условие в виде

$$u(x, 0) \equiv u_{s1}(x) = \begin{cases} (1-x)^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Это начальное условие $u_{s1}(x)$ является стационарным решением уравнения (7.41), при выбранных значениях параметров ω , γ и показателя n , в чем нетрудно убедиться подстановкой его в уравнение (7.47).

В качестве краевого условия примем $u(0, t) = 2$. Этому краевому условию соответствует стационарное решение

$$u(x, 0) \equiv u_{s2}(x) = \begin{cases} \left(2^{\frac{1}{3}} - x\right)^3, & 0 < x < 2^{\frac{1}{3}} \\ 0, & x \geq 2^{\frac{1}{3}} \end{cases}.$$

Таким образом, рассматриваемая задача на самом деле является задачей о перестройке стационарных режимов $u_{s1}(x)$ и $u_{s2}(x)$.

Для численного решения используется сеточная аппроксимация искомой функции $u_k^m = u(k\Delta x, i\tau)$, Δx - шаг по координате, k - номер узла по координате, τ - шаг по времени, i - номер слоя по времени.

Рассматриваемое уравнение является нелинейным, поэтому решение на $i+1$ слое по времени ищется последовательными приближениями для неявного сеточного уравнения точности порядка $O(\tau + \Delta x^2)$

$$\frac{(\tilde{u}^j)_k^{i+1} - u_k^i}{\tau} = 2 \left(\left(\left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right| \right)_k^{j-1} \right)^{i+1} \frac{(\tilde{u}^j)_{k+1}^{i+1} - 2(\tilde{u}^j)_k^{i+1} + (\tilde{u}^j)_{k-1}^{i+1}}{\Delta x^2} - 36(\tilde{u}^j)_k^{i+1},$$

где j - номер итерации, а $\left(\left(\left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right| \right)_k^{j-1} \right)^{i+1}$ - значение модуля первой производной в узле с номером k на временном слое $i+1$, вычисленное по значениям функции предыдущей итерации с номером $j-1$. При этом $\left(\left(\left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right| \right)_k^0 \right)^{i+1} = \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \right)_k^i$. На каждом слое по времени сходимость итераций проверялась по условию $u_k^{i+1} = \lim_{j \rightarrow \infty} (\tilde{u}^j)_k^{i+1}$.

Выбор именно такой схемы счета связан с соображениями ее устойчивости.

Результаты расчетов приведены на рис. 7.1. Как видно, решение всегда финитно. Вначале решение метастабильно, причем носитель совпадает с носителем стационарного решения u_{s1} , и лишь с некоторого момента времени граница носителя начинает перемещаться.

На рис. 7.2 приведены результаты аналогичного расчета обратной перестройки течения с большего стационарного решения u_{s2} на меньшее u_{s1} при изменении скачком граничного условия при $x = 0$.

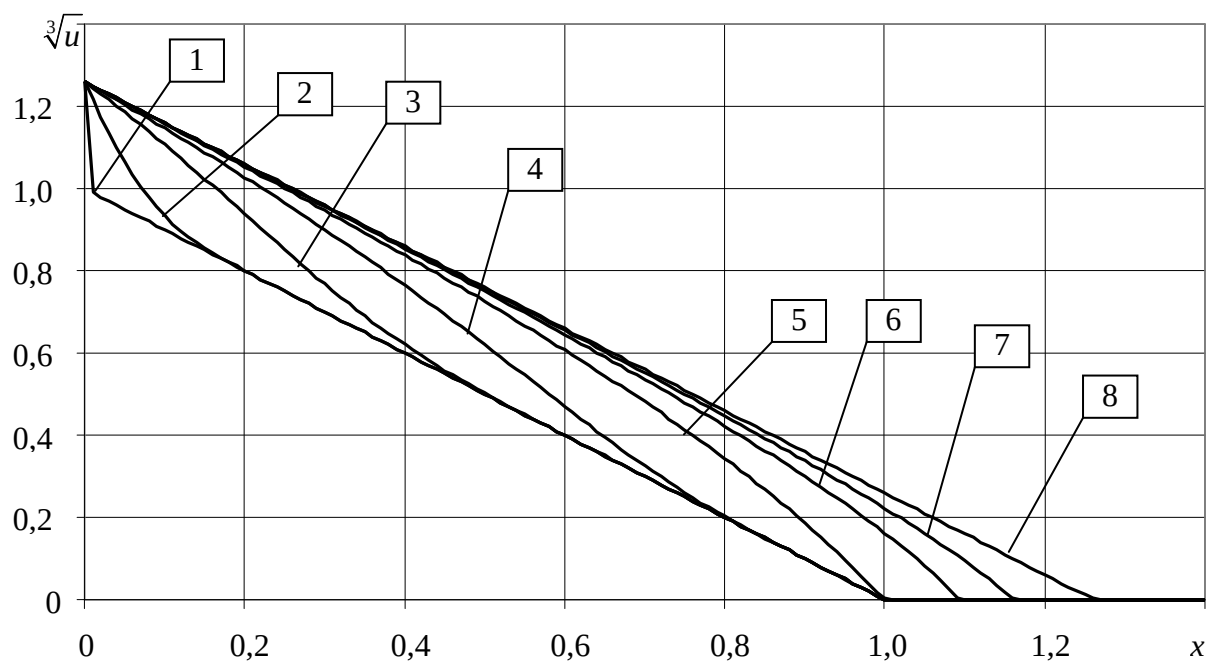


Рис. 7.1. Перестройка с меньшего стационарного решения на большее.

- 1) $t=0$, 2) $t=1 \cdot 10^{-4}$, 3) $t=2.1 \cdot 10^{-3}$, 4) $t=9.3 \cdot 10^{-3}$, 5) $t=2.69 \cdot 10^{-2}$, 6) $t=4.93 \cdot 10^{-2}$,
7) $t=7.49 \cdot 10^{-2}$, 8) $t \rightarrow \infty$.

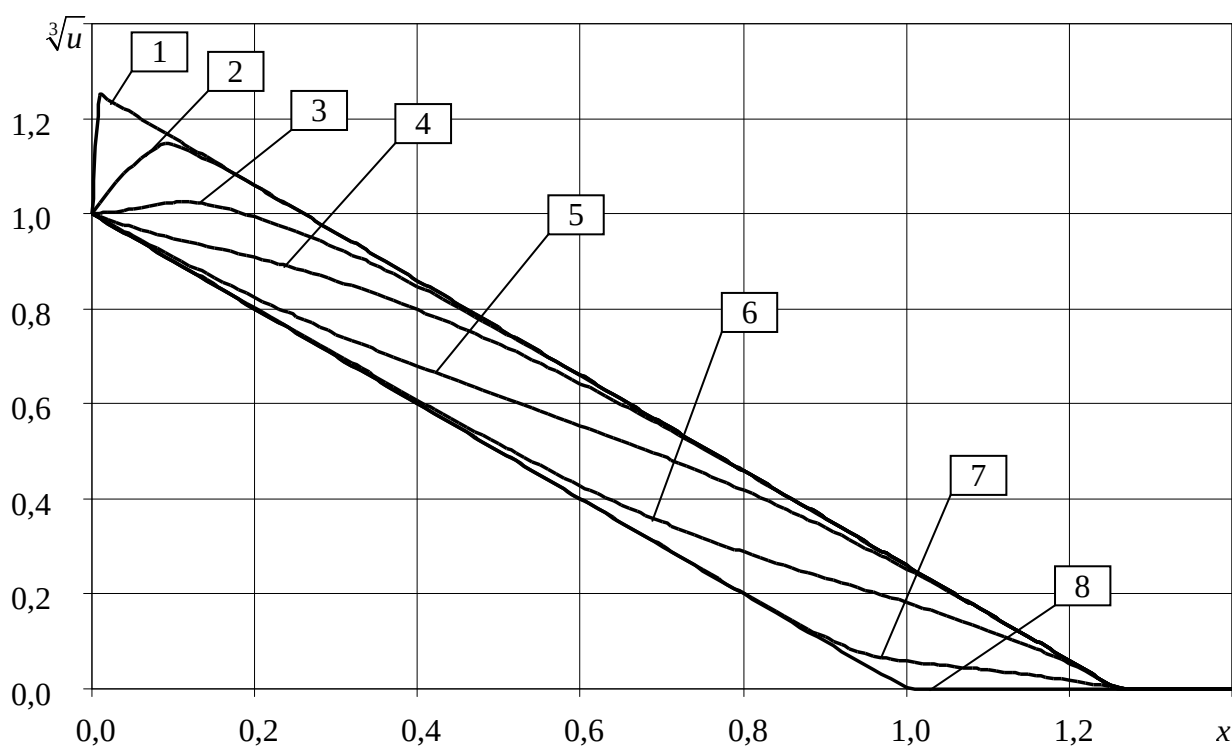


Рис. 7.2. Перестройка с большего стационарного решения на меньшее.

- 1) $t=0$, 2) $t=2.75 \cdot 10^{-4}$, 3) $t=3.64 \cdot 10^{-3}$, 4) $t=9.21 \cdot 10^{-3}$, 5) $t=2.52 \cdot 10^{-2}$, 6) $t=6.52 \cdot 10^{-2}$,
7) $t=1.65 \cdot 10^{-1}$, 8) $t \rightarrow \infty$.

Причиной разобранных особенностей движения фронтальной поверхности при перестройке стационарных режимов является альтернативный характер асимптотического поведения решения вблизи фронта. Именно перестройка асимптотики решения вблизи фронта происходит за конечное время, тогда как скорость распространения сдвиговых напряжений по возмущённому фону (при $u > 0$) бесконечна.

7.4. Асимптотические законы движения фронтальной поверхности.

Процесс эволюции возмущения переносимой величины на начальном этапе представляет особый интерес. Интенсивность и, следовательно, нелинейность процесса переноса во многих случаях определяется именно уровнем интенсивности начального возмущения. При дальнейшей эволюции в результате диссипации процесс переноса становится менее интенсивным, так что само уравнение (7.14) может оказаться неприменимым.

Динамика движения фронтальной поверхности при $t \rightarrow 0$ определяет реализацию конкретного режима фронтального решения задачи Коши (7.14) – (7.18). Начальное условие будем считать финитным и, для простоты, симметричным относительно плоскости $x=0$:

$$u(x,0) = \begin{cases} u_0(x) > 0, & |x| < -x_\phi \\ 0, & |x| \geq -x_\phi \end{cases}$$

где $x_\phi = \text{const} < 0$. Положим

$$u_0(x) \sim U_0 \cdot (x - x_\phi)^\omega, \quad x \rightarrow x_\phi + 0, \quad (7.49)$$

$U_0 > 0$, $\omega > 0$ - некоторые постоянные.

Асимптотический характер движения фронтальной поверхности при $t \rightarrow +0$ определяется начальным распределением переносимой величины вблизи поверхности фронта (7.49). Действительно, дифференцируя по времени тождество $u(x_f(t), t) \equiv 0$ и используя затем уравнение (7.14), получим выражение

$$\dot{x}_f = - \lim_{x \rightarrow x_f + 0} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial(u^k)}{\partial x} \right)^n - \gamma \cdot u^m \right] / \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} \quad (7.50)$$

определяющее режим движения фронта для всех $t > 0$. Подставив асимптотическое представление (7.49) в соотношение (7.50) найдём

$$\dot{x}_f(0) = - \lim_{x \rightarrow x_f + 0} \left[U_0^{kn-1} \cdot (\omega k)^n \cdot (\omega k - 1) \cdot \frac{n}{\omega} \cdot (x - x_\phi)^{n(\omega k - 1) - \omega} - \frac{\gamma}{\omega} \cdot U_0^{m-1} \cdot (x - x_\phi)^{\omega(m-1)-1} \right], \quad (7.51)$$

откуда и следует указанная зависимость.

Это положение проиллюстрируем сначала в случае $m > 1$, для которого определим закон движения фронта $x_f(t)$ при $t \rightarrow 0$. Будем исходить из естественного условия непрерывного перехода асимптотического представления решения $u(x, t)$ (7.37) в начальное распределение (7.49) при $t \rightarrow 0$. Предполагая, что фронт движется при $t > 0$ (а при $m > 1$ может иметь место режим движения фронта только с $\dot{x}_f < 0$), получим

$$a(t) \cdot (x - x_\phi)^{\alpha_1} \sim U_0 \cdot (x - x_\phi)^\omega, \quad t \rightarrow +0, \quad x \rightarrow x_\phi + 0.$$

Учитывая, что $(x - x_f)^\omega \sim (x - x_\phi)^\omega$ при $t \rightarrow +0$, $x \rightarrow x_\phi + 0$ и $(x_f - x_\phi) = -\int_0^t \dot{x}_f(\xi) d\xi$,

получим уравнение для определения асимптотического представления функции $x_f(t)$ при $t \rightarrow 0$:

$$a(t) \cdot \left[-\int_0^t \dot{x}_f(\xi) d\xi \right]^{\alpha_1 - \omega} = U_0, \quad x_f(0) = x_\phi \quad (7.52)$$

Учитывая далее выражение (7.38) для $a(t) = \left[(k\alpha_1)^{-n} (-\dot{x}_f) \right]^{\frac{1}{kn-1}}$, уравнение (7.52) преобразуется к виду

$$(-\dot{x}_f)^{\frac{1}{kn-1}} \cdot \left[-\int_0^t \dot{x}_f(\xi) d\xi \right]^{\frac{n}{kn-1} - \omega} = U_0 \cdot (k\alpha_1)^{\frac{n}{kn-1}}.$$

Это уравнение сводится к линейному уравнению первого порядка относительно функции

$$\varphi(t) = \left[\int_0^t \dot{x}_f(\xi) d\xi \right]^{\beta_1}, \quad \beta_1 = 1 + n + \omega - kn\omega.$$

Решая его, найдём

$$\dot{x}_f = A_1 \cdot t^{\sigma_1} \quad (7.53)$$

где $A_1 = -\left[\beta_1^{1-\beta_1} \cdot U_0^{kn-1} \cdot \left(\frac{kn}{kn-1} \right)^n \right]^{\frac{1}{\beta_1}}$, $\sigma_1 = \frac{1}{\beta_1} - 1$. Зависимость показателя σ_1 от ω (см. формулу (7.49)) качественно показана на рис.7.3 (кривая 1).

Если $\omega < \alpha_1$, то $\dot{x}_f \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow +0$, но, тем не менее, $|x_f - x_\phi| < \infty$, поскольку $\sigma_1 > -1$, $A_1 < \infty$.

Если $\omega = \alpha_1$, то $\dot{x}_f = -\alpha_1^n \cdot U_0^{kn-1} = \text{const}$ при $t \rightarrow +0$.

Наконец, если $\alpha_1 < \omega < \alpha_4$, то $\dot{x}_f \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$.

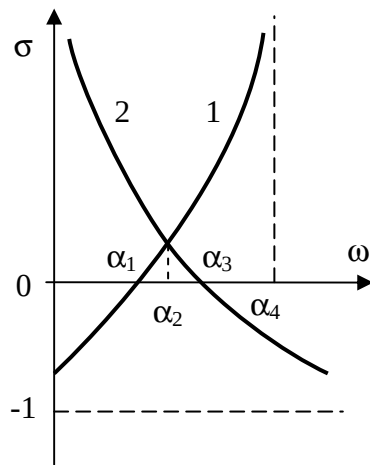


Рис. 7.3

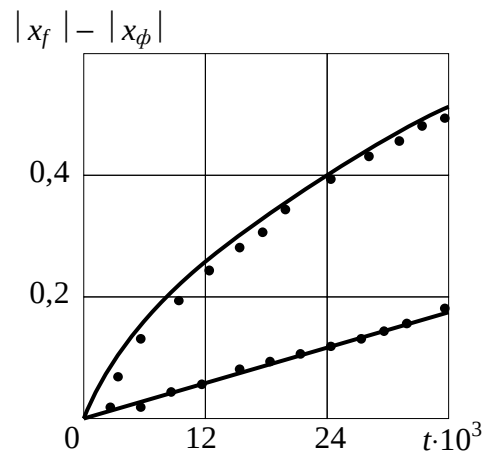


Рис. 7.4

Любопытен предельный переход $\omega \rightarrow \alpha_4 - 0$, при котором из (7.53) следует, что производные всё более высоких порядков от функции $x_f(t)$ обращаются в ноль при $t \rightarrow 0$. Замечая это, можно предположить, что в пределе $\omega = \alpha_4$ фронт остаётся неподвижным, по крайней мере, в течение конечного интервала времени: $x_f = x_\phi$, $0 < t < T < \infty$. Напомним в этой связи, что при $m > 1$ значение показателя $\alpha = \alpha_4 = \frac{n+1}{kn-1}$ в асимптотическом представлении решения $u(x, t)$ (7.37) с $a(t)$, задаваемой формулой (7.46), соответствует метастабильному режиму, при котором $x_f = \text{const}$ в течение конечного интервала времени $0 < t < T$.

Таким образом, при $m > 1$ выбор режимов движения фронта $x = x_f(t)$ однозначно зависит от показателя ω в асимптотическом представлении (7.49). Если $\omega < \alpha_4$, то при $t \rightarrow 0$ реализуется режим движения фронта с $\dot{x}_f(t) < 0$ и размер носителя решения увеличивается с течением времени. Если $\omega \geq \alpha_4$, то фронт $x = x_f(t)$ неподвижен, по крайней мере, в течение конечного промежутка времени.

В случае линейного стока $m = 1$ сохраняются все выводы о характере движения фронта $x = x_f(t)$, полученные при $m > 1$.

При $\omega = \alpha_3$, $1 \leq m < kn$ можно дополнительно указать, что фронт может оставаться неподвижным для любого промежутка времени: $x_f = \text{const}$, $t \in R_+$. Для этого достаточно сравнить начальное условие (7.49) с решением (7.10). Из сравнения следует, что для реализации такой ситуации необходимо выполнение неравенства:

$$\gamma \geq U_0^{kn-m} \cdot \left(\frac{kn-m}{k(n+1)} \right)^n \cdot \frac{(kn-m)}{n(k+m)}.$$

В области изменения параметра $m_1 \leq m < 1$ возможны три режима движения фронта: $\dot{x}_f(t) < 0$, $\dot{x}_f(t) = 0$, $\dot{x}_f(t) > 0$.

Закон движения фронта в случае режима $\dot{x}_f(t) < 0$ по-прежнему описывается выражением (7.53). Аналогично может быть определён закон движения фронта при $t \rightarrow +0$ в случае $\dot{x}_f(t) > 0$:

$$\dot{x}_f = B \cdot t^{\sigma_2}, \quad B = \left(\frac{\gamma \cdot (1-m)}{U_0} \right)^\xi, \quad \sigma = -1 + \xi, \quad \xi = \frac{1}{\omega(1-m)}.$$

Зависимость σ_2 от параметра ω приведена на рис. 7.3 (кривая 2). Важно отметить, что в рассматриваемой области изменения параметра $m_1 \leq m < 1$ справедливы неравенства

$\alpha_1 \leq \alpha_3 \leq \alpha_2$, $\alpha_3 \leq \alpha_4$, что учтено на рис. 7.3. Кривые 1 и 2 пересекаются при значении $\omega = \alpha_3$. Применяя теорему сравнения можно показать, что при $\omega < \alpha_3$ выполняется $\dot{x}_f < 0$, если же $\omega > \alpha_3$, то $\dot{x}_f > 0$ при $t \rightarrow +0$. При $\omega = \alpha_3$ вопрос о направлении движения фронта не может быть однозначно решён на основе проводимого асимптотического анализа. По-видимому, при $\omega = \alpha_3$ могут реализоваться все три режима, которые возможны при $m_1 \leq m < 1$.

При $0 \leq m < m_1$, исходя из соотношения (7.51), определяются значения $\dot{x}_f(0)$. Оказывается, что в случае $\omega < \alpha_3$ выполняется $\dot{x}_f(0) = -\infty$, в случае $\omega > \alpha_3$ выполняется $\dot{x}_f(0) = \infty$. При $\omega = \alpha_3$ значение $\dot{x}_f(0)$ определяется величиной U_0 : если $U_0 > a_c$, то $\dot{x}_f(0) = -\infty$; если $U_0 < a_c$, то $\dot{x}_f(0) = \infty$; и наконец, если $U_0 = a_c$, то для определения $\dot{x}_f(0)$ необходимо уточнить асимптотическое представление (1.49) (постоянная a_c определена в (1.42)).

Для подтверждения полученных асимптотических представлений проведены численные расчёты задачи Коши по уравнению (7.14) в частном случае $\gamma = 0$, $k = 1$, $n = 2$ с начальным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} (1 - |x|)^\omega, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Поставленная задача Коши дополнялась при расчётах граничными условиями $u(l, t) = 0$, $l = \pm 2$, что возможно, если $|x_f(t)| < 2$. Дифференциальное выражение (7.14) после квазилинеаризации аппроксимировалось по неявной разностной схеме второго порядка точности. Положение фронта $|x| = |x_f(t)|$ определялось приближённо по условию:

$$u(x_f, t) = 10^{-5} \cdot u(0, t). \text{ Достаточная точность достигалась при выборе шага сетки } \Delta x = 0,02, \Delta t = \frac{10^{-3}}{3} \text{ по } x \text{ и } t \text{ соответственно.}$$

Некоторые результаты сравнения теоретических зависимостей с результатами численного моделирования приведены на рис. 7.4, где показано движение фронта локализации $|x_f| - |x_\phi|$, $x_\phi = x_f(0)$ во времени. Кривые 1, 2 на рис. 7.4 рассчитаны по формуле (7.53) и соответствуют значениям показателя $\omega = 1,5$ и $\omega = 2,0$. Положение фронта, полученное численными методами, указано точками. Для случая $\omega \geq 3$ теоретически установлена метастабильная локализация решения. При численных расчётах фронт оставался неподвижным в течение всего времени счёта до момента $t = 20 \cdot \Delta t$. Проведенные расчёты в области изменения показателя $0 \leq \omega < 3$ полностью подтверждают соотношение (7.53).

В этой связи отметим также инвариантные решения вида (7.9), в которых происходит обращение направления движения фронтовой поверхности по уравнению (7.11). Эти решения находятся в соответствии с развитой выше асимптотической теорией.

7.4. Затопленная струя дилатантной жидкости.

Задача о затопленной струе, истекающей из отверстия конечного размера, не является автомодельной даже в приближении пограничного слоя. Поэтому теоретический и прикладной интерес представляет сама возможность получения оценок, носящих асимптотический характер, позволяющих судить о качественной картине течения. Известно, что система уравнений плоского пограничного слоя в ньютоновской жидкости в переменных Мизеса сводится к уравнению нелинейной теплопроводности, являющимся частным случаем уравнения (7.14) (при $k = 2$, $n = 1$, $f(u) = 0$). Постановка соответствующей задачи совпадает с (7.14) – (7.18) для финитного начального условия. Существование в этом случае фронтовой поверх-

ности (границы струи) просто означает ограниченность расхода жидкости через поперечное сечение струи, что связано с особенностью переменных Мизеса.

Для неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом система уравнений плоского пограничного слоя в переменных Мизеса также сводится к (7.14) при $k = 2$, $n > 0$, $f(u) = 0$. Если $n > 1$ (что соответствует дилатантной жидкости), то перенос импульса поперёк струи имеет фронтовой характер и в физических переменных. Это означает конечную скорость распространения возмущений касательного напряжения по невозмущенной жидкости.

Условие $n > 1$ означает увеличение кажущейся вязкости при увеличении скорости сдвига. Такое реологическое поведение жидкости называется дилатансией. Свойство дилатансии наблюдается у жидкостей, имеющих сложную физико-химическую структуру. Как правило, дилатансия имеет место в жидкостях, в которых образуются периодические коллоидные структуры. К таким физико-химическим системам относятся, в частности, различного рода дисперсии с высокой и низкой концентрацией (например, гидродисперсии кремнезёма или кварцевого стекла, дисперсии глинозёма в воде, железа в четырёххлористом углероде и др.) и растворы высокомолекулярных соединений. Заметим, что закон нарастания кажущейся вязкости с увеличением скорости сдвига может быть достаточно быстрым в широком интервале скоростей сдвига. Так, в дисперсиях кварцевого стекла указанная связь близка к экспоненциальной.

Будем основываться на степенной реологической модели дилатантной жидкости, а задачу о форме затопленной струи будем рассматривать непосредственно в физических переменных.

Пусть из щелевого отверстия $|y| < y_\phi$, где $y_\phi > 0$, расположенного в плоскости $x = 0$, вдоль оси x истекает плоская симметричная струя дилатантной жидкости (рис. 7.5). Уравнение переноса импульса в такой струе в приближении пограничного слоя может быть записано в виде:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{A}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right]. \quad (7.54)$$

Здесь $u(x, y) \geq 0$, $v(x, y)$ - проекции скорости жидкости (рис. 7.5), $A = \text{const} > 0$ - показатель consistency, ρ - плотность жидкости, $n > 1$ - индекс течения.

Уравнение (1.4.1) необходимо дополнить уравнением неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

и распределением продольной скорости в плоскости $x = 0$ (на срезе щели или сопла):

$$u(0, y) = u_0(y), \quad u_0(y) = \begin{cases} U \cdot (y_\phi - |y|)^\omega, & |y| < y_\phi \\ 0, & |y| > y_\phi \end{cases} \quad (7.55)$$

где $\omega \geq 0$, $U > 0$.

Как указывалось ранее, особенностью описываемого процесса является наличие границы струи $|y| = y_f(x)$, $y_f(0) = y_\phi$ (см. рис. 7.5), такой, что

$$\begin{cases} u(x, y) = 0, & |y| \geq y_f(x) \\ u(x, y) > 0, & |y| < y_f(x) \end{cases}.$$

Следуя изложенной выше теории, будем искать продольную скорость $u(x, y)$ в виде асимптотической зависимости

$$u(x, y) \sim a(x) \cdot (y_f - y)^\alpha \text{ при } y \rightarrow y_f - 0, \text{ где } a > 0, \alpha > 0 \quad (7.56)$$

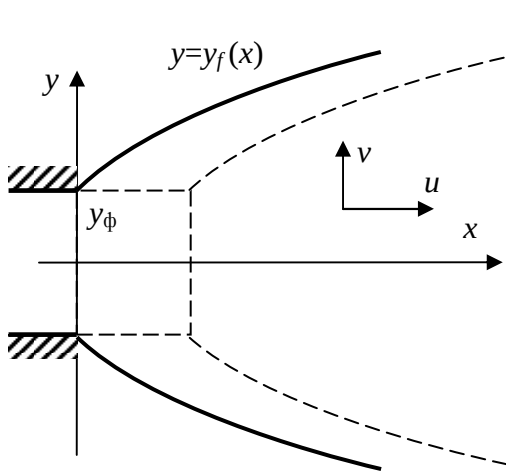


Рис. 7.5

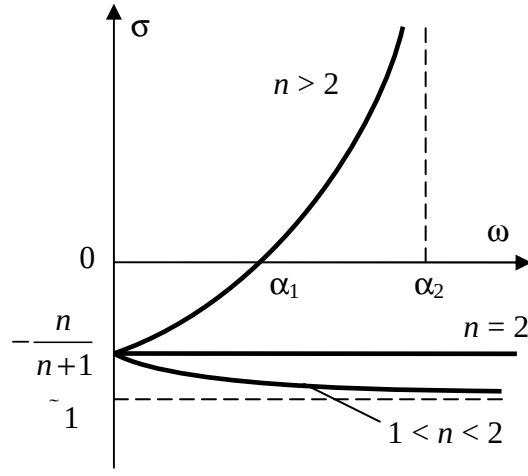


Рис. 7.6.

Если определить функцию тока $\psi = \psi(x, y)$ так, что $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, то, исходя из определения и выражения (7.56), её можно представить в виде

$$\psi = \psi_f - \frac{a}{\alpha + 1} \cdot (y_f - y)^{\alpha+1} \text{ при } y \rightarrow y_f - 0, \text{ где } \psi_f = \psi(x, y_f).$$

Отсюда, дифференцируя, найдём асимптотическое представление для проекции скорости $v = v(x, y)$:

$$v(x, y) = -\dot{\psi}_f + \dot{y}_f \cdot a \cdot (y_f - y)^\alpha + \frac{\dot{a}}{\alpha + 1} \cdot (y_f - y)^{\alpha+1} \text{ при } y \rightarrow y_f - 0 \quad (7.57)$$

(точка обозначает производную по координате x).

Подстановка асимптотических равенств (7.56), (7.57) в уравнение (7.54) приводит к соотношению

$$\dot{\psi}_f \cdot (y_f - y)^{\alpha-1} + \frac{\dot{a}}{\alpha(\alpha+1)} \cdot (y_f - y)^{2\alpha} = \frac{A}{\rho} \cdot (a\alpha)^{n-1} n \cdot (\alpha-1) \cdot (y_f - y)^{n(\alpha-1)-1} \quad (7.58)$$

Если считать, что $\dot{\psi}_f \neq 0$, то из (7.58) следует, что $\alpha = \alpha_1 = \frac{n}{n-1}$, $\dot{\psi}_f = \frac{A}{\rho} a^{n-1} \alpha_1^n$.

Вблизи среза щелевого отверстия $x \rightarrow 0$ ширина струи $y_f \rightarrow y_\phi$ и $\psi_f \rightarrow \psi_\phi = \psi(0, y_\phi)$, поэтому приращение расхода в струе определяется асимптотическим соотношением

$$\psi_f - \psi_\phi = a \cdot \frac{n-1}{2n-1} (y_f - y_\phi)^{\alpha_1+1} \text{ при } x \rightarrow +0.$$

Отсюда следует асимптотическое представление при $x \rightarrow +0$

$$\dot{\psi}_f = \dot{a} \cdot \frac{n-1}{2n-1} (y_f - y_\phi)^{\alpha_1+1} + a \cdot \dot{y}_f (y_f - y_\phi)^{\alpha_1}. \quad (7.59)$$

Соотношение (7.59) необходимо дополнить условием непрерывного перехода представления (7.56) в равенство (7.55)

$$a(x) \cdot (y_f - y)^{\alpha_1} = U \cdot (y_\phi - y)^\omega \text{ при } y \rightarrow y_f - 0 \text{ и } x \rightarrow +0.$$

Учитывая, что $y_\phi - y = y_f - y$ при $y \rightarrow y_f - 0$ и $x \rightarrow +0$ из этого асимптотического равенства можно получить

$$a(x) \cdot (y_f - y)^{\alpha_1 - \omega} = U \text{ при } x \rightarrow +0. \quad (7.60)$$

Асимптотические соотношения (7.58) – (7.60) определяют функции $a(x)$, $\psi_f(x)$ и $y_f(x)$. В частности, для границы струи получается зависимость

$$\dot{y}_f = A_1 x^\sigma, \text{ где } \sigma = -1 + \frac{1}{1 + n - n\omega + 2\omega}, A_1 = \left[\frac{A}{\rho \cdot (\sigma + 1)} \cdot \left(\frac{2n-1}{n\omega - n - \omega} \right) \alpha_1^n U^{n-1} \right]^{\sigma+1}.$$

Зависимость $\sigma(\omega)$ представлена на рис.7.6. Как видно, форма струи существенно зависит от неоднородности скорости на срезе сопла (показателя ω).

Если значение постоянной n лежит в интервале $1 < n < 2$, то для значения σ получаем интервал $-1 < \sigma \leq -\frac{n}{n+1}$ и $\dot{y}_f \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow +0$, но ширина струи при этом конечная:

$$y_\phi \leq y_f(x) < \infty, \text{ так как } \sigma > -1.$$

При $n > 2$ форма струи особенно сильно зависит от ω . Если $0 \leq \omega < \alpha_1$, то $\dot{y}_f \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow +0$, но ширина струи остаётся конечной; если $\omega = \alpha_1$, то $0 < \dot{y}_f < \infty$; если $\alpha_1 < \omega < \alpha_2$, где $\alpha_2 = \frac{n+1}{n-2}$, то $\dot{y}_f(0) = 0$. При $\omega > \alpha_2$ и $n > 2$ полученные асимптотические представления оказываются несправедливыми. Естественнее предположить, что в этом случае $y_f(x) = y_\phi$ по крайней мере в интервале $0 \leq x < C$, где $C = \text{const} > 0$.

Асимптотическое представление продольной скорости $u(x, y)$ вблизи границы струи $y \rightarrow y_\phi - 0$ следует из соотношения (7.58), где необходимо положить $\dot{\Psi}_f = 0$:

$$u(x, y) = \left[\frac{A}{\rho} \cdot \frac{1}{(2n-1)} \cdot \alpha_2^n \cdot \frac{3n}{(n-2)} \cdot (\chi - x) \right]^{\frac{1}{2-n}} \cdot (y_\phi - y)^{\frac{n+1}{n+2}} \text{ при } y \rightarrow y_\phi - 0.$$

Здесь $\chi = \text{const} > 0$, $0 \leq x < \chi$. Отметим, что функция в правой части этого асимптотического равенства является точным решением уравнения (7.54), удовлетворяющим начальному условию:

$$u(0, y) = \begin{cases} 0, & y \geq y_\phi \\ \left[\frac{A}{\rho} \cdot \frac{3n}{(2n-1)(n-2)} \cdot \alpha_2^n \cdot (\chi - x) \right]^{\frac{1}{2-n}} \cdot (y_\phi - y)^{\frac{n+1}{n+2}}, & y < y_\phi \end{cases}.$$

Указанное точное решение уравнения (7.54) можно использовать в качестве мажорирующего при $\omega \geq \alpha_2$, $n > 2$. На основании теорем сравнения (см. раздел 7.2) этим самым доказывается наличие у струи метастабильного участка $y_f = y_\phi$ при $\omega \geq \alpha_2$, $n > 2$ по крайней мере, в интервале $0 \leq x < \chi$. Форма струи в этом случае указана на рис.7.5. пунктирной линией. Факт

наличия метастабильного участка у затопленной струи дилатантной жидкости подтверждается экспериментальными данными.

7.5. Затопленная турбулентная струя, истекающая из отверстия конечного размера.

Достоверность развиваемой асимптотической теории в применении к задачам, описывающим реальные физические объекты, определяется подтверждением её выводов экспериментальными данными. Одну из таких возможностей даёт теория затопленных струй ньютоновской жидкости, хорошо подтверждённая экспериментально. Как указывалось, в переменных Мизеса задача о затопленной ламинарной струе в приближении пограничного слоя сводится к анализу уравнения нелинейной теплопроводности, которое является частным случаем (7.14). В данном разделе рассматривается турбулентная затопленная струя несжимаемой жидкости. Соответствующее уравнение турбулентного переноса импульса в приближении пограничного слоя в переменных Мизеса несколько отличается от (7.14), но развитый асимптотический метод может быть применен и здесь.

Задача о форме турбулентной струи является классической. Начальный участок струи, истекающей из щелевого отверстия, рассматривается как слой смешения. По сравнению с таким подходом анализ соответствующей задачи Коши в переменных Мизеса позволяет учесть степень неравномерности профиля скорости на срезе сопла, а также, распространить теорию на осесимметричную струю.

В приближении теории пограничного слоя турбулентный перенос импульса описывается системой уравнений (обозначения указаны на рис.7.7):

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{z^i} \frac{\partial}{\partial z} \left[z^i \frac{\tau}{\rho} \right] \quad (7.61)$$

$$\frac{\partial(z^i u)}{\partial x} + \frac{\partial(z^i v)}{\partial z} = 0, \quad \tau = \rho \cdot l_T^2 \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \cdot \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Здесь $i = 0, 1$ соответствует плоской и осевой симметрии задачи соответственно, ρ - плотность жидкости, τ - напряжение турбулентного трения, определённое по Прандтлю, l_T - длина турбулентного перемешивания. В рассматриваемом случае затопленной струи $l_T = c \cdot y$, c - эмпирическая константа теории.

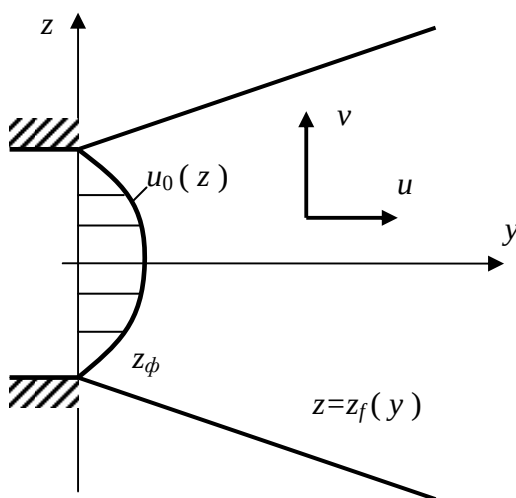


Рис. 7.7

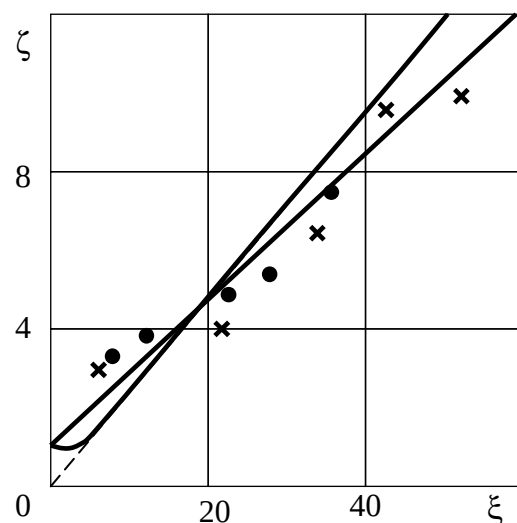


Рис. 7.8.

В плоскости сечения сопла $y = 0$ (рис.7.7) скорость жидкости зададим в виде степенной функции:

$$u(0, z) = u_0(z) = \begin{cases} W \cdot (|z_\phi| - |z|)^\beta, & |z| < |z_\phi| \\ 0, & |z| \geq |z_\phi| \quad (z_\phi < 0), \end{cases} \quad (7.62)$$

где $W = \text{const} > 0$, $\beta = \text{const} > 0$.

Особенностью задачи о турбулентной затопленной струе в данной постановке является конечная ширина струи. Иными словами, в любом сечении струи существует граница струи $z = z_f(y)$, $z_f(0) = z_\phi$ такая, что $u(y, z) > 0$ при $|z| < |z_f(y)|$ и $u(y, z) = 0$ при $|z| \geq z_f(y)$ (см. рис. 7.7.). На границе струи $|z| = |z_f(y)|$ выполняются физически очевидные условия отсутствия скорости жидкости $u(y, \pm z_f) = 0$ и напряжения турбулентного трения $\tau(y, \pm z_f) = 0$.

Если перейти к новым независимым переменным, являющимся обобщением переменных Мизеса $(y, z) \mapsto (t, x)$, где

$$dt = \frac{1}{4} c^2 y^2 \left[(i+1) \cdot \int_0^{x_f} \frac{dx}{u} \right]^{\frac{3i}{i+1}} dy, \quad dx = z^i \cdot u \cdot dz, \quad (7.63)$$

то исходная задача (7.61), (7.62) в области $0 > x > x_f$ сводится к задаче:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[1 + \int_{x_f}^x \frac{dx}{u} \left(\int_0^{x_f} \frac{dx}{u} \right)^{-1} \right]^{\frac{3i}{i+1}} \left(\frac{\partial(u^2)}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (7.64)$$

$$u(0, x) = u_0(x) = U_0 \cdot (x - x_\phi)^\omega \quad (7.65)$$

и $u = 0$, $x \leq x_f$.

Здесь $U_0 = W \cdot [W \cdot z_\phi^i]^{-1} \cdot (1+\beta)^\omega$, $\omega = \frac{\beta}{1+\beta}$, $x_f = x(y, z_f)$. Из условия ограниченности начального распределения скорости: $0 \leq \beta < \infty$ следует, что $0 \leq \omega < 1$.

Ограничиваясь областью струи вблизи её границы $x \rightarrow x_f + 0$, имеем

$$\int_{x_f}^x \frac{dx}{u} \left(\int_0^{x_f} \frac{dx}{u} \right)^{-1} \rightarrow 0.$$

Тогда уравнение (7.64) преобразуется к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\partial(u^2)}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (7.66)$$

совпадающему с (7.14) для $\gamma = 0$, $k = n = 2$.

Обратный переход к физическим переменным (y, z) осуществляется исходя из соотношений (7.63).

После тривиальных вычислений для плоской струи ($i = 0$) получим

$$z_f \sim z_\phi + \sqrt[3]{6} \cdot \alpha \cdot (1 - \omega) \cdot y, \quad y \rightarrow +0, \quad \alpha^3 = 2c^2 \quad (7.67)$$

и для осесимметричной струи ($i=1$):

$$z_f \sim \sqrt{2} \cdot \left[\frac{z_\phi^2}{2} + 12^{\frac{2}{3}} \cdot (1 - \omega)^{\frac{1}{3}} \cdot t^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad t \rightarrow +0. \quad (7.68)$$

В (7.68) функция $t = t(y)$ вычисляется из соотношения

$$\left[\frac{z_\phi^2}{2} + 12^{\frac{2}{3}} \cdot (1 - \omega)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{8}}{12} \cdot c^2 \cdot d(y^3).$$

Если выполняется неравенство $y \gg y_\phi$, то выражение (7.68) аппроксимируется соотношением

$$z_f \sim 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2 \cdot (1 - \omega)^{\frac{1}{3}} \cdot \alpha \cdot y, \quad y \rightarrow +0, \quad (i=1). \quad (7.69)$$

На рис. 7.8. приведено сравнение полученных теоретических зависимостей для границы струи $z = z_f(y)$ с экспериментальными данными в относительных координатах $\zeta = \frac{z_f}{z_\phi}$ и

$\xi = \frac{y}{z_\phi}$. Кривые 1, 2 построены по формулам (7.67), (7.68). При этом полагалось, что $\omega = 0$,

$\alpha = 0,1$ для $i = 0$ и $\alpha = 0,077$ для $i = 1$ соответственно. Крестиками помечены экспериментальные данные для плоской турбулентной струи ($i = 0$), а кружками – для осесимметричной ($i = 1$). Штриховая линия построена по приближённой зависимости (7.69). (Экспериментальные данные взяты из двух очень старых работ:

Fortman E. Uber turbulente Strahlausbreitung//Ingenier – Arhiv .- 1934.- V.5, N1. – S. 45 – 54.

Trupel T. Uber die Einwirkung eines Luftstrahles auf die umgebende Luft//Z. fur das gesammte Turbinenwesen. – 1915. – Jg.12. – N 5–6.)

Совпадение полученных теоретических зависимостей и экспериментальных данных свидетельствует об эффективности проведённого асимптотического анализа.

Интересно отметить, что для плоской струи её граница сохраняет линейность (т.е. приращение ширины струи пропорционально расстоянию от среза сопла $(z_f - z_\phi) \sim y$) вне зависимости от значения показателя β , определяющего закон распределения скорости жидкости на срезе сопла. Изменение степени неравномерности распределения скорости жидкости при $y = 0$ приводит лишь к изменению угла раскрытия струи.

В случае осесимметричной струи на значительных расстояниях от среза сопла её граница совпадает с поверхностью кругового конуса, вершиной которого является точка пересечения оси струи с плоскостью сопла. Неравномерность начального распределения скорости жидкости, характеризуемая показателем β , влияет лишь на угол при вершине конуса (угол раскрытия струи).

Во всех случаях увеличение степени неравномерности (увеличение показателя β) приводит к уменьшению угла раскрытия струи.

7.6. Проблема быстрого нагрева вещества с поверхности.

Везде выше, за незначительным исключением, рассматривались интенсивные процессы переноса, происходящие в неограниченной среде. Соответствующие задачи математической физики формулировались как задачи Коши.

Существует одна проблема, имеющая важное практическое применение, анализ которой может быть принципиально проведен только в рамках краевой задачи. Эта проблема может быть сформулирована следующим образом – возможно ли нагревать вещество с поверхности так быстро, что при этом область прогрева внутри вещества оказывалась бы пространственно ограниченной, несмотря на то, что температура на поверхности вещества достигала бы очень больших значений или, имея в виду соответствующую математическую абстракцию, становилась бы бесконечно большой.

Соответствующая физическая и техническая проблема может быть переформулирована так – возможно ли нагревать так быстро, чтобы при малых затратах энергии достигать очень высоких температур. Например, для «поджигания» термоядерного горючего необходимо достижения температуры в сто миллионов градусов. В этой связи естественно возникает технический вопрос о подборе удовлетворительного источника энергии. Наиболее привлекательными оказываются лазерные установки с очень высокой энергией в очень коротком импульсе.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим краевую задачу для уравнения нелинейной теплопроводности со степенным коэффициентом переноса (переменные безразмерные):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad u(x, t) \geq 0, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad \sigma = \text{const} > 0, \quad (7.70)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad x > 0, \quad u_0^{\sigma+1} \in C^1(R_+), \quad u(0, t) = u_1(t) \geq 0, \quad t > 0.$$

Быстрый нагрев здесь моделируется видом функции $u_1(t)$, которая неограниченно возрастает при увеличении t .

Следует отметить, что в линейном случае (соответственно, при $\sigma = 0$), рассматриваемых ниже эффектов не существует, то есть если $\sigma = 0$ и $u_1(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0$, $T_0 = \text{const} > 0$, то и $u(x, t) \rightarrow \infty$ для всех $x > 0, t \rightarrow T_0$.

Рассмотрим некоторые характерные автомодельные решения для краевой задачи (7.70). Подробности в полной мере изложены в монографии [1]. Слово «обострение» в названии монографии в данном случае означает обращение в бесконечность функции $u_1(t) \rightarrow \infty$ за конечное время при $t \rightarrow T_0$, $T_0 = \text{const} > 0$.

1. Степенной граничный режим.

Пусть $u_1(t) = (1+t)^m$, $t > 0$, $m = \text{const} > 0$. То есть обострение отсутствует, но температура на поверхности $x = 0$ достигает сколь угодно больших значений с течением времени.

Соответствующее автомодельное решение имеет вид

$$u(t, x) = (1+t)^m \cdot \theta(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(1+t)^{(1+m\sigma)/2}},$$

где функция $\theta(\xi) \geq 0$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(\theta^\sigma \cdot \theta')' + \frac{1+m\sigma}{2} \cdot \theta' \cdot \xi - m \cdot \theta = 0, \quad \xi > 0$$

с краевыми условиями $\theta(0)=1$, $\theta(\infty)=0$.

При $m = \frac{1}{\sigma}$ автомодельное решение совпадает с решением типа простой волны, рассматриваемой в разделе 7.1.

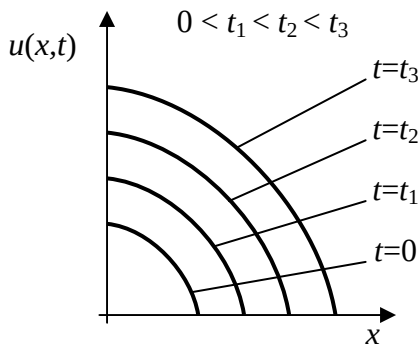


Рис. 7.10

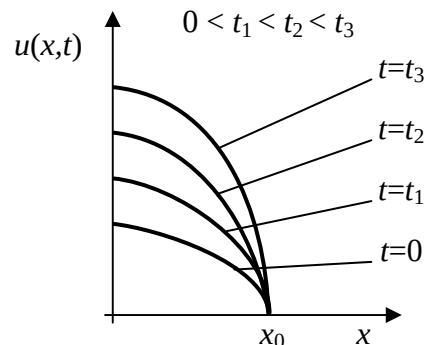


Рис. 7.11

Решение поставленной задачи финитно. То есть существует фронт тепловой волны $x_f(t) = \xi_f (1+t)^{\frac{1+m\sigma}{2}}$, что $u(x,t) = 0$, $x > x_f(t)$, где $\xi_f = \text{mes}(\text{supp}(\theta)) < \infty$. Физически это означает пространственную ограниченность тепловых возмущений, идущих от стенки.

Качественный вид получающегося решения приведен на рис. 7.10. Как видно, при $t \rightarrow \infty$ всё пространство $x > 0$ нагревается до $u \rightarrow \infty$.

2. Экспоненциальный граничный режим.

Пусть $u_1(t) = e^t$, $t > 0$. Соответствующее автомодельное решение имеет вид

$$u(x,t) = e^t \cdot \theta(\xi), \xi = xe^{\frac{\sigma t}{2}},$$

где функция $\theta(\xi)$ удовлетворяет краевой задаче

$$(\theta^\sigma \theta')' + \frac{\sigma}{2} \theta' \xi - \theta = 0, \xi > 0, \theta(0)=1, \theta(\infty)=0.$$

Решение этой автомодельной задачи также финитно. То есть существует поверхность, фронт тепловой волны, $x_f = \xi_f \cdot \exp\left(\frac{\sigma t}{2}\right)$, $t > 0$, $\xi_f = \text{mes}(\text{supp}(\theta)) < \infty$.

Качественный вид решения указан на рис. 7.10. Сравнивая автомодельные решения со степенным и экспоненциальным граничным режимом можно сделать вывод, что наличие фронтовой поверхности не связано с видом граничного режима. Тогда как напротив, глубина проникновения тепла отслеживает скорость нагрева границы.

Заметим, что принцип максимума позволяет обобщить эти выводы на широкий круг неавтомодельных задач.

Естественно задаться вопросом: можно ли нагревать так быстро, чтобы область нагрева была ограничена даже при $u_1 \rightarrow \infty$. Для ответа на этот вопрос рассмотрим еще один пример автомодельного решения краевой задачи (7.70).

3. Степенной граничный режим с обострением.

Пусть $u_1(t) = (T_0 - t)^{-\frac{1}{\sigma}}$, где $T_0 = \text{const} > 0$ - постоянная величина, которую естественно назвать временем обострения. Искомое автомодельное решение имеет вид

$$u(x, t) = (T_0 - t)^{-\frac{1}{\sigma}} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{2\sigma},$$

где $x_0 = \left[\frac{2 \cdot (\sigma + 2)}{\sigma}\right]^{1/2} > 0$. За всё время обострения тепловые возмущения не проникают в окружающее пространство за пределы $x = x_0$, то есть за все время $0 < t < T_0$, $u(x, t) = 0$ при $x > x_0$ (см. рис. 7.11). Следуя монографии [1], назовем такой режим нагрева «S» - режимом.

Важно отметить, что не всякий граничный режим с обострением обеспечивает локализацию теплового воздействия. Например, пусть $u_1(t) = (T_0 - t)^n$, $0 < t < T_0$, где $n < -\frac{1}{\sigma}$.

Этому режиму отвечает автомодельное решение $u(x, t) = (T_0 - t) \cdot \theta(\xi)$, $\xi = \frac{x}{(T_0 - t)^{(1+n\sigma)/2}}$, где $\theta(\xi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению. Точка фронта движется по закону $x_f(t) = \xi \cdot (T_0 - t)^{(1+n\sigma)/2}$, причём $x_f(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0 - 0$. Назовём этот режим «HS».

Напротив, если $n \in \left(-\frac{1}{\sigma}, 0\right)$, то это «LS»-режим с обострением. В данном случае нагрев с обострением происходит только в точке $x = 0$. Во всех остальных точках пространства ($x > 0$) температура равномерно ограничена сверху при $t \in (0, T_0)$.

Рекомендуемая литература

1. *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений/ А.А.Самарский, В.А.Галактионов, С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов. – М.: Наука, 1987. – 487 с.*
2. *Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 400 с.*
3. *Фроммер М. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер//УМН. – 1941. – Вып. 9. – С. 212 – 253.*