

МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА
НУК «Фундаментальные Науки»

Кафедра «Физика» (ФН-4)

А.С.Романов, А.В.Семиколонов, С.Н.Тараненко, А.П.Шахорин

УДК 532.135:532.5(075.8)

ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТИ.
ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Электронное учебное издание

Методические указания к подготовке и изучению курса лекций
по дисциплине «Нелинейные процессы переноса»

*Рекомендуется Учебно-методической комиссией
НУК «Фундаментальные Науки» МГТУ им.Н.Э. Баумана
в качестве методических указаний*

Москва

(С) 2011 МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
3. Теория подобия и размерности.....	5
3.1. Размерности физических величин и пи-теорема.....	5
3.2. Параметры, определяющие класс явлений. Пример применения теории размерностей.....	8
3.3. Динамическое подобие и моделирование явлений.....	13
4. Пограничный слой в ньютоновской несжимаемой жидкости.....	17
4.1. Уравнения ламинарного плоского пограничного слоя в вязкой несжимаемой жидкости.....	17
4.2. Ламинарный пограничный слой при обтекании несжимаемой жидкостью плоской пластинки (задача Блазиуса).....	21
4.3. Плоская затопленная струя.....	23
4.4. Ламинарный пограничный слой на границе раздела двух потоков.....	28
4.5. Преобразование системы уравнений стационарного пограничного слоя в уравнение нелинейной теплопроводности.....	29
5. Пограничный слой в неньютоновской несжимаемой жидкости со степенным реологическим законом.....	33
5.1. Плоская затопленная струя в неньютоновской жидкости.....	33
5.2. Один класс автомодельных решений теории пограничного слоя в неньютоновской дилатантной жидкости.....	37
Список рекомендуемой литературы.....	48

Аннотация

Данные методические указания являются второй частью курса «Нелинейные процессы переноса» и предназначены для студентов, обучающихся по специальности «Техническая физика».

Содержат основы физической теории размерности и подобия в приложении к механике сплошной среды с иллюстрациями ее применения на примере пограничного слоя в ньютоновских и неньютоновских нелинейно-вязких жидкостях. В данных методических указаниях рассмотрены классические автомодельные задачи о ламинарном пограничном слое на плоской пластине (задача Блазиуса), задача о затопленной струе, истекающей из узкой щели, и задача о слое смешения.

Введение.

Нелинейные процессы переноса, как показывают эксперименты и теория, обладают особенностями, которые принципиально отсутствуют в линейном случае. Поэтому соответствующие экспериментальные и теоретические проблемы, вообще говоря, в этих случаях не могут быть адекватно разрешены в рамках линейного анализа, так как в нелинейном случае в разных частях рассматриваемых нелинейных систем процесс переноса может происходить на физически разных масштабах.

В этой связи основополагающую роль приобретает теория размерности и подобия, позволяющая провести факторологический анализ физических явлений и на этой основе существенно упростить проблему. Основу теории размерности составляет π -теорема, физические основания для формулировки которой представляют собственный интерес. В некоторых случаях теория размерности позволяет сократить число независимых переменных, так что соответствующая задача математической физики оказывается автомодельной.

Широкие возможности для применения теории размерности и подобия дает проблема ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. С другой стороны, проблема переноса импульса в пограничном слое является нелинейной. Тем самым на примере пограничного слоя удастся проиллюстрировать применение теории размерности и подобия и, одновременно, нелинейные эффекты.

В случае ньютоновской жидкости нелинейность проблемы пограничного слоя физически возникает в связи с тем, что поперечный перенос импульса осуществляется одновременно за счет вязкости и за счет субстанционального переноса импульса. В случае неньютоновской жидкости проблема усложняется из-за нелинейности реологического соотношения. При этом возникают отсутствующие для ньютоновской жидкости нелинейные эффекты.

Настоящее учебное пособие является второй частью курса «Нелинейные процессы переноса», в которой приводятся основы теории размерности и подобия в применении к механике сплошной среды. Рассмотрены несколько примеров, нелинейных в своей основе, из теории ламинарного пограничного слоя для ньютоновской и неньютоновской жидкостей. В заключение пособия приводится полный качественный анализ одного класса течений неньютоновской дилатантной жидкости.

Нумерация разделов является продолжением нумерации издания тех же авторов «Идеальная и вязкая жидкости»: Учебное пособие, М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008.

3. Теория подобия и размерности.

3.1. Размерности физических величин и пи-теорема.

Тот факт, что физические соотношения имеют скалярный, векторный или тензорный характер, отражает свойство инвариантности физических законов относительно системы координат.

С другой стороны, для того, чтобы задать значения какой-либо физической величины, необходимо задать единицы ее измерения, и, вообще говоря, систему единиц измерения. Очевидно, что смысл физических соотношений не должен зависеть от выбора системы единиц измерений.

При этом нет необходимости для каждой физической величины задавать строго особую единицу измерения, т.к. физические определения и соотношения позволяют выражать размерности одних физических величин через другие.

Например, определение скорости $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ позволяет выразить размерность скорости через размерности перемещения ds и времени dt .

В любой системе единиц измерения вводятся основные единицы измерения. Они вводятся из опыта с помощью эталонов. Например, в СИ основными считаются метр, секунда, килограмм, Ампер, Кельвин, моль, кандела.

Выражение произвольной единицы измерения через основные единицы измерения называется размерностью. Для каждой основной величины вводится обозначение: L – длина, M – масса, T – время и т.д.

Любая произвольная размерность обозначается квадратными скобками от соответствующей величины. Например, $[v]$ – размерность скорости, $[E]$ – размерность энергии и т.д.

Формула размерности. В теории размерности доказывается, что размерность любой величины представляет собой степенные одночлены вида $[N] = L^l \cdot T^t \cdot M^m \dots$ и называется *формулой размерности*. Иногда в формулах размерности используют не символы основных величин, а их единиц измерения $[v] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$, $[E] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$ и т.д.

Искомое утверждение следует из очевидного факта, что отношение двух численных значений физической величины a не должно зависеть от выбора масштабов для основных единиц измерения. На самом деле, пусть величина a является функцией нескольких переменных a_i , $i=1, 2, 3, \dots, n$, имеющих для простоты одинаковую размерность, которая выбрана

в качестве основной. Зафиксируем значения a_i и обозначим соответствующее значение функции $a(1)$. Зафиксируем другие значения переменных a'_i и снова обозначим соответствующее значение функции как $a'(1)$. Теперь изменим масштаб размерности в α раз и обозначим те же самые значения функции как $a(\alpha)$ и $a'(\alpha)$. Как указывалось, должно быть

$$\frac{a(1)}{a'(1)} = \frac{a(\alpha)}{a'(\alpha)} \text{ или}$$

$$\frac{a(\alpha)}{a(1)} = \frac{a'(\alpha)}{a'(1)} = \varphi(\alpha). \quad (3.1)$$

То есть, отношение численных значений произвольной физической величины, измеренной в разных масштабах основных единиц измерения, зависит только от отношения масштабов.

Из соотношения (3.1) следует, что для двух разных масштабов α_1 и α_2 отношение

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{\varphi(\alpha_2)} = \frac{a(\alpha_1)/a(1)}{a(\alpha_2)/a(1)} = \frac{a(\alpha_1)}{a(\alpha_2)} = \frac{a(\alpha_1/\alpha_2)}{a(1)} = \varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right).$$

Если теперь считать, что

$$\alpha_1 = \alpha + d\alpha \text{ и } \alpha_2 = \alpha,$$

то получаем дифференциальное соотношение для определения функции $\varphi(\alpha)$:

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)} \frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} \right)_{\alpha=1} \quad (3.2)$$

Интегрируя (3.2) и учитывая, что при $\alpha = 1$ функция $\varphi = 1$, получим искомое утверждение

$$\varphi = \alpha^m,$$

где обозначено $m = \left(\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} \right)_{\alpha=1} = \text{const.}$

Очевидно, что этот результат справедлив, если размерная величина a является функцией от нескольких основных величин, при изменении масштаба только одной из них. Если же изменяются масштабы нескольких основных величин, то получается *формула размерности*.

Также как уравнения, выражающие физические законы, должны быть инвариантны относительно выбора системы координат, так и соотношения, выражающие физические закономерности должны быть инвариантны относительно выбора единиц измерения. Необходимо выяснить, какие ограничения накладывает эта инвариантность на возможные функциональные связи между физическими величинами.

Пусть мы имеем некоторую величину a , которая является функцией независимых между собой размерных величин $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n),$$

величины a_i могут быть как постоянными, так и переменными. Переменные величины должны быть отличны от 0 и ∞ , либо функция f непрерывна при обращении аргументов в 0 или ∞ .

Принципиально важно, чтобы в исследуемой функциональной связи были учтены все постоянные и переменные величины, от которых зависит величина a .

Найдем структуру функции f , в предположении, что эта функция выражает некоторый физический закон, не зависящий от выбора системы единиц измерения.

Пусть среди размерных величин a_i первые k ($k \leq n$) имеют независимые размерности (число основных единиц измерения должно быть больше или равно k).

Независимость размерностей означает, что размерность ни одной из этих величин не может быть представлена в виде степенного одночлена размерностей других величин с независимой размерностью.

Например, размерности длины L , скорости LT^{-1} и энергии ML^2T^{-2} независимы, а длины L , скорости LT^{-1} и ускорения LT^{-2} – зависимые $LT^{-2} = (LT^{-1})^2 L^{-1}$.

Размерности других физических величин (т.е. за исключением первых k среди a_i) a , $a_{k+1}, \dots, a_n$ можно выразить через размерности величин $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Примем k величин $a_1, a_2, \dots, a_k$ с независимыми размерностями за основные и введем для их размерностей обозначения $[a_1]=A_1, [a_2]=A_2, \dots, [a_k]=A_k$. Размерности остальных величин будут иметь вид $[a] = A_1^{m_1} \cdot A_2^{m_2} \cdot \dots \cdot A_k^{m_k}$, $[a_{k+1}] = A_1^{p_1} \cdot A_2^{p_2} \cdot \dots \cdot A_k^{p_k}$, ..., $[a_n] = A_1^{q_1} \cdot A_2^{q_2} \cdot \dots \cdot A_k^{q_k}$.

Изменим теперь единицы измерения величин $a_1, a_2, \dots, a_k$ соответственно в $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ раз:

$$a'_1 = \alpha_1 \cdot a_1, a'_2 = \alpha_2 \cdot a_2, \dots, a'_k = \alpha_k \cdot a_k,$$

$$a' = \alpha_1^{m_1} \cdot \alpha_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{m_k} \cdot a, a'_{k+1} = \alpha_1^{p_1} \cdot \alpha_2^{p_2} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{p_k} \cdot a_{k+1}, \dots, a'_n = \alpha_1^{q_1} \cdot \alpha_2^{q_2} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{q_k} \cdot a_n.$$

В новой системе единиц измерения исследуемое соотношение примет вид:

$$a' = \alpha_1^{m_1} \cdot \alpha_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{m_k} \cdot a = \alpha_1^{m_1} \cdot \alpha_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{m_k} \cdot f(\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2, \dots, \alpha_k a_k, \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \dots \alpha_k^{p_k} a_{k+1}, \dots, \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \dots \alpha_k^{q_k} a_n).$$

Это равенство записано в силу законов изменения численного значения величин при изменении масштабов единиц измерения. Ввиду произвольности выбора α_i , выберем их следующими:

$\alpha_1 = \frac{1}{a_1}, \alpha_2 = \frac{1}{a_2}, \dots, \alpha_k = \frac{1}{a_k}$. То есть, учитывая независимость функциональных связей

от выбора единиц измерения, мы выбрали их так, чтобы первые k величин оказались равными единице

$$\Pi = f\left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_k, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}\right),$$

$$\text{где } \Pi = \frac{a}{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}}, \Pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_k^{p_k}}, \dots, \Pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{q_1} a_2^{q_2} \dots a_k^{q_k}}.$$

При этом является очевидным, что все Π, Π_i безразмерные, т.е. $[\Pi]=1, [\Pi_i]=1$.

Пи-теорема. Соотношение, не зависящее от выбора единиц измерения, между $(n+1)$ размерными величинами $a, a_1, a_2, \dots, a_n, k$ из которых имеют независимые размерности, может быть представлено в виде соотношения между $(n+1-k)$ величинами $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}$, представляющими собой безразмерные комбинации $(n+1)$ размерных величин.

Основной смысл пи-теоремы состоит в том, что всякое физическое соотношение между размерными величинами можно сформулировать как соотношение между безразмерными величинами. Этот факт лежит в основе теории подобия, играющей важную роль в механике сплошной среды.

Чем меньше число величин, определяющих изучаемую величину, тем более ограничена форма функциональной зависимости и тем проще исследование этой зависимости.

В частности, если число используемых основных величин равно общему числу величин, определяющих исследуемое явление, которые в этом случае имеют независимые размерности, то с помощью теории размерности эти зависимости полностью определяются с точностью до постоянного множителя. В самом деле, если $n = k$, то из величин $a_1, a_2, \dots, a_n$ нельзя образовать ни одной безразмерной комбинации, и поэтому

$$\Pi = f\left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_k\right) \Rightarrow a = a_1^{m_1} \cdot a_2^{m_2} \cdot \dots \cdot a_k^{m_k} \cdot f\left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_k\right)$$

или $a = C \cdot a_1^{m_1} \cdot a_2^{m_2} \cdot \dots \cdot a_k^{m_k}$, где $C = \text{const}$. Постоянную C при этом можно определить либо экспериментально, либо теоретически из решения соответствующей математической задачи.

3.2. Параметры, определяющие класс явлений. Пример применения теории размерностей.

Применение теории размерностей основывается на пи-теореме. При этом возникает необходимость перечисления всех параметров (величин), определяющих конкретное течение жидкости.

Наиболее простым способом определения всех параметров является постановка соответствующей задачи математической физики.

Первое, и основное, с чего надо начать, это выбрать модель сплошной среды. Возможно значительное разнообразие вариантов:

- идеальная несжимаемая жидкость;

- идеальная сжимаемая жидкость со своим набором термодинамических соотношений;
- вязкая несжимаемая жидкость, удовлетворяющая или не удовлетворяющая гипотезе Ньютона;
- вязкая сжимаемая жидкость;
- и т.д.

Выбор модели фиксирует систему уравнений, описывающую движение среды.

Далее необходимо выбрать подходящую систему координат с учетом предполагаемой симметрии течения, что совместно с уравнениями движения определит независимые переменные и класс искомых функций.

Следующим шагом является формулировка начальных и граничных условий для движения жидкости.

Желательно добиться того, чтобы сформулированная задача математической физики имела единственное устойчивое решение. Едва ли можно требовать от исследователя доказательства соответствующих теорем, но здесь должен пригодиться его опыт и понимание проблемы.

Независимые переменные, физические постоянные, определяющие механические и термодинамические свойства среды, геометрические характеристики области определения, величины, входящие в состав граничных и начальных условий, – все это должно быть включено в систему определяющих параметров.

Определяющие параметры это все данные, которые надо задать для вычисления значений искомых функций на ЭВМ. При постановке экспериментов – это все параметры, которые надо явно указать для повторения эксперимента.

Следует отметить, что возможности получения конкретной информации с помощью пи-теоремы, по существу, ограничены и недостаточны, так как с ее помощью невозможно полностью установить функциональную связь $f(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$.

Основная польза теории размерностей связана с возможностью изучения физических закономерностей в безразмерном виде, не зависящим от выбора систем единиц измерения. Результаты анализа проблемы в безразмерном виде применимы сразу к целому классу явлений.

Пример. Движение математического маятника.

Не будем пока выписывать решения уравнений динамики. Из физических соображений естественно считать, что существует функциональная связь $\varphi = \varphi(t, \varphi_0, g, m, l)$ (рис. 3.1). Размерности параметров $[t] = T$, $[\varphi_0] = 1$ (безразмерная величина), $[g] = LT^{-2}$, $[m] = M$. Выберем в качестве основных единиц l, g, m . Тогда

$$\varphi = \varphi \left(t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}, \varphi_0, 1, 1, 1 \right) = \varphi \left(t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}, \varphi_0 \right),$$

где φ_0 - максимальное значение угла отклонения маятника от вертикали. Как видно, угол отклонения не зависит от массы подвешенного тела, а зависит только от безразмерного пара-

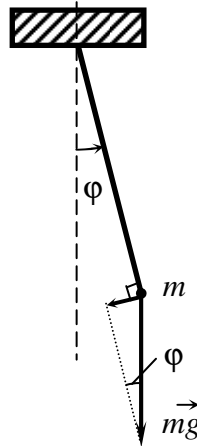


Рис. 3.1. Описание колебаний математического маятника

метра $t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}$ и максимального отклонения φ_0 . Известно, что движение маятника – периодическое:

$$\varphi \left(t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}, \varphi_0 \right) = \varphi \left((t + T_0) \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}, \varphi_0 \right)$$

для любых моментов времени при движении маятника. Это равенство возможно только при вполне определенных значениях величины $T_0 \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = C(\varphi_0)$, минимальным из которых является периодом колебаний математического маятника. Для малых колебаний

$T_0 = C|_{\varphi_0=0} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$. Величину $C|_{\varphi_0=0}$ можно найти экспериментально.

Обратимся теперь к основному уравнению динамики вращательного движения:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi, \quad (3.3)$$

которое будет рассматриваться с начальными условиями, например,

$$\varphi = \varphi_0 \text{ и } \frac{d\varphi}{dt} = 0, \text{ при } t = 0,$$

означающими, что в начальный момент времени маятник находился в крайнем положении.

Независимость закона движения математического маятника от массы m следует непосредственно из уравнения динамики.

Если теперь перейти в уравнении (3.3) к новым безразмерным зависимым и независимым переменным $\varphi^* = \varphi / \varphi_0$, $t^* = t / T$, то уравнение динамики в безразмерных переменных примет вид

$$\frac{d^2 \varphi^*}{dt^{*2}} = -\frac{g}{T^2 l \varphi_0} \sin(\varphi_0 \varphi^*),$$

с соответствующими начальными условиями

$$\varphi^* = 1 \text{ и } \frac{d\varphi^*}{dt^*} = 0 \text{ при } t^* = 0.$$

Примем в качестве основной (иногда говорят «характерной») величины времени $T = \sqrt{l/g}$. Тогда уравнение динамики принимает вид

$$\frac{d^2 \varphi^*}{dt^{*2}} = -\frac{1}{\varphi_0} \sin(\varphi_0 \varphi^*).$$

И из уравнения и из начальных условий для безразмерных переменных следует, что колебания математических маятников полностью *подобны*, то есть описываются одинаковыми функциями $\varphi^*(t^*)$, если у них одинаковая амплитуда колебаний φ_0 .

Пример. Установившееся обтекание шара идеальной несжимаемой жидкостью.

Рассмотрим стационарное обтекание неподвижного шара однородным набегающим

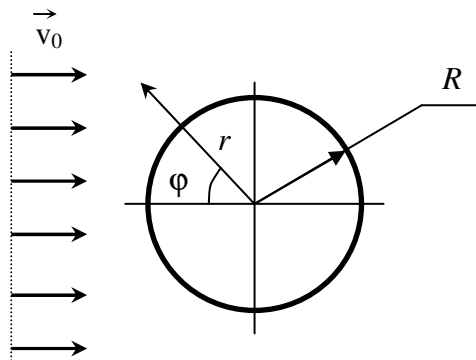


Рис. 3.2. Стационарное обтекание неподвижного шара однородным набегающим потоком невязкой несжимаемой жидкости.

потоком невязкой несжимаемой жидкости (рис. 3.2). Движение жидкости в этом случае описывается стационарным уравнением Эйлера:

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0, \quad (3.4)$$

с граничными условиями:

$$v = v_0 \text{ при } \varphi = 0, r = \infty \text{ и } (\vec{v}, \vec{r}) = v_n = 0 \text{ при } r = R \text{ для любых } 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Первое из граничных условий описывает однородный набегающий поток жидкости, а второе является условием «непротекания» жидкости через твердую поверхность шара. Непосредственно из постановки задачи следует, что $v = f_1(v_0, R, r, \varphi)$, $\frac{p}{\rho} = f_2(v_0, R, r, \varphi)$. В качестве основных параметров выберем v_0, R . Тогда $[v_0] = LT^{-1}$, $[R] = L$.

Заметим, что давление не может быть отнесено к системе определяющих параметров, т.к. по закону Паскаля изменение давления в какой-либо одной точке несжимаемой жидкости приводит к такому же изменению в других точках жидкости. Поэтому говорят об избыточном давлении, условно принимая значение давления в набегающем потоке равным нулю.

Предполагаемые функциональные зависимости примут вид:

$$v = v_0 \cdot f_1\left(1, 1, \frac{r}{R}, \varphi\right)$$

и с учетом размерности отношения давления к плотности $\left[\frac{p}{\rho}\right] = L^2 T^{-2} = [v_0^2]$ получаем:

$$\frac{p}{\rho} = v_0^2 \cdot f_2\left(1, 1, \frac{r}{R}, \varphi\right).$$

Из уравнения (3.4) следует, что сумма $\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}$ должна описываться единой функциональной зависимостью

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = v_0^2 \cdot f\left(\frac{r}{R}, \varphi\right).$$

На поверхности шара $\frac{r}{R} = 1$, поэтому там должно выполняться

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = v_0^2 \cdot f(1, \varphi).$$

Например, в лобовой точке ($\varphi=0$):

$$v=0, \quad p = C\rho v_0^2$$

где $C = f(1, 0) = \text{const}$. Переход к безразмерным переменным позволяет в данном случае установить, что все течения в рассматриваемом приближении подобны.

3.3. Динамическое подобие и моделирование явлений.

Теория размерности имеет большое значение при моделировании явлений.

Моделирование – это замена изучения интересующего нас явления в его естественном проявлении изучением аналогичного явления на модели меньшего или большего масштаба.

Основной смысл моделирования – по результатам исследований в лабораторных условиях судить о естественных свойствах явления.

Физическое подобие можно рассматривать как обобщение геометрического подобия. Две геометрических фигуры подобны, если отношение всех соответствующих размеров одинаково. Если масштаб известен, то по размерам одной фигуры можно легко найти размеры другой. Аналогично, два физических явления подобны, если по заданным характеристикам одного можно получить характеристики другого простым пересчетом, который соответствует переходу от одной системы единиц измерения к другой системе единиц.

После установления полного набора параметров, определяющих рассматриваемое явление, можно сформулировать условия подобия.

Пусть явление определяется n величинами, часть из которых является безразмерными постоянными (например, величина угла) или размерными постоянными (параметрами). Пусть также размерности переменных и постоянных величин (параметров) выражены через k основных параметров ($k \leq n$) с независимыми размерностями. В общем случае, очевидно, что из n величин можно составить не более $(n - k)$ независимых безразмерных комбинаций. Все безразмерные характеристики явления необходимо рассматривать как функции этих $(n - k)$ безразмерных комбинаций. То есть среди всех безразмерных величин, составленных из характеристик явления, всегда можно указать некоторую базовую систему безразмерных комбинаций параметров, определяющую все явление.

Необходимым и достаточным условием подобия двух явлений будет постоянство численных значений безразмерных комбинаций параметров (критериев), образующих базовую систему.

Пример. Рассмотрим стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости в полуограниченном канале прямоугольного сечения (рис. 3.3).

На входе в канал зададим постоянную скорость жидкости, то есть

$$v(0, y, z) = v_0 = \text{const при } x = 0.$$

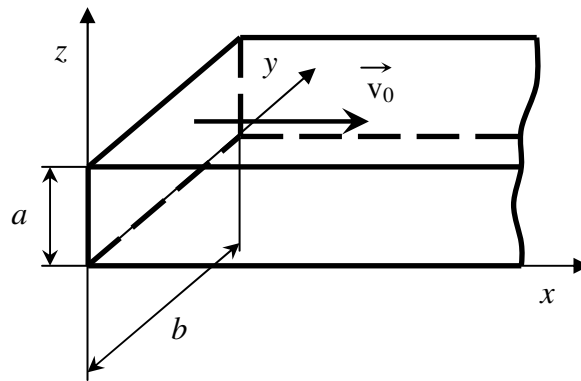


Рис. 3.3. Стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости в полуограниченном канале прямоугольного сечения.

Ширина и высота канала обозначены как a и b соответственно. Плотность жидкости ρ , динамическая вязкость η . Тогда $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, v_0, \rho, \eta, a, b)$, где x, y, z, a, b имеют размерность длины, $[\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ и $[\eta] = \text{Па} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$. Если в качестве основных параметров выбрать v_0, a, ρ , имеющие независимые размерности, то можно записать

$$\vec{v} = v_0 \cdot \vec{f}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}, 1, 1, \frac{\eta}{\rho v_0 a}, 1, \xi\right), \text{ где } \xi = \frac{b}{a}.$$

Как видно, течение в двух каналах оказывается подобным, если одинаковы геометрические факторы $\xi_1 = \xi_2$ и одинаковы безразмерные критерии $\left(\frac{\eta}{\rho v_0 a}\right)_1 = \left(\frac{\eta}{\rho v_0 a}\right)_2$.

Безразмерный критерий $Re = \frac{\rho \cdot v_0 \cdot a}{\eta} = \frac{v_0 \cdot a}{\nu}$ называют *числом Рейнольдса*. По своему

смыслу это число определяет относительную роль сил инерции и вязких сил:

$$Re = \frac{(\rho v_0^2)}{\left(\eta \frac{v_0}{a}\right)} = \frac{\text{силы инерции}}{\text{силы вязкости}}.$$

Число Рейнольдса играет большую роль при моделировании взаимодействия твердых тел с вязкой жидкостью. Если, например, размер модели уменьшить, то для того, чтобы сохранить подобие, необходимо во столько же раз увеличить скорость. (Либо увеличить плотность и уменьшить вязкость, то есть уменьшить кинематическую вязкость $\nu = \frac{\eta}{\rho}$.)

Если скорость на входе в канал меняется с течением времени, то возникает еще один безразмерный критерий, определяющий подобие.

Пусть, например, $v(0, y, z, t) = v_0(1 + \delta \cdot \cos(\omega t))$, где δ - безразмерный параметр. В данном случае появляется новый параметр – циклическая частота колебаний ω , который необходимо включить в систему основных параметров. При таком же выборе других основных параметров, как и раньше, получаем ещё один безразмерный критерий

$$St = \frac{\omega \cdot a}{v_0},$$

который называется *число Струхали*.

Учитывая, что период колебаний скорости на входе в канал $T_0 \sim \frac{1}{\omega}$, то можно определить число Струхали как

$$St = \frac{a}{v_0 \cdot T_0}.$$

Базовую систему безразмерных комбинаций параметров (критериев), определяющих подобие, в той части, которая не зависит от начальных и граничных условий, можно получить непосредственно из уравнений движения.

Например, запишем уравнение Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v}.$$

Не уточняя конкретные значения, выберем в качестве основных параметров (или, как говорят, «характерных» параметров) следующие: L – длина, T – время, V – скорость, ρ – плотность. Перейдем к безразмерным переменным $\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{V}$, $t' = \frac{t}{T}$, $x'_i = \frac{x_i}{L}$ и после подстановки в уравнение Навье-Стокса получим:

$$\frac{V}{T} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + \frac{V^2}{L} (\vec{v}', \nabla) \vec{v}' = -\frac{1}{\rho L} \nabla p + \nu \frac{V}{L^2} \Delta \vec{v}',$$

или

$$\left(\frac{V}{T} \frac{L}{V^2} \right) \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + \frac{V^2}{L} (\vec{v}', \nabla) \vec{v}' = -\frac{1}{\rho V^2} \nabla p + \frac{\nu}{VL^2} \Delta \vec{v}'$$

Так как в несжимаемой жидкости для давления не существует характерной величины, то $p = \rho V^2 p'$ и поэтому уравнение примет вид:

$$St \cdot \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + (\vec{v}', \nabla) \vec{v}' = -\nabla p' + \frac{1}{Re} \Delta \vec{v}'.$$

В заключение следует заметить, что учет различных физических сторон анализируемого процесса всегда приводит к появлению некоторых безразмерных комбинаций парамет-

ров или критериев, определяющих относительную роль соответствующих физических явлений. В частности, отметим число Прандтля и число Маха.

Число Прандтля равно отношению кинематической вязкости жидкости ν к коэффициенту ее температуропроводности λ :

$$Pr = \frac{\nu}{\lambda}.$$

Число Прандтля возникает, если при моделировании течения вязкой жидкости учитывается перенос энергии за счёт явления теплопроводности.

Число Маха определяет относительную роль сжимаемости жидкости

$$Ma = \frac{v}{c},$$

где v и c - скорость жидкости и скорость звука в некоторой характерной точке потока.

4. Пограничный слой в ньютоновской несжимаемой жидкости.

4.1. Уравнения ламинарного плоского пограничного слоя в вязкой несжимаемой жидкости.

Теория пограничного слоя играет важную роль в гидромеханике. Дело в том, что применение уравнений Эйлера к описанию полей скоростей вязкой жидкости вблизи поверхности движущихся в жидкости твердых тел оказывается невозможным. На поверхности твердого тела в вязкой жидкости требуется равенство скорости поверхности и жидкости (условие прилипания), а в идеальной жидкости только равенство нормальных к поверхности твердого тела составляющих скорости жидкости и твердого тела (условие не протекания).

Если вязкость относительно невелика, то искажение течения жидкости, связанное с наличием вязкости, часто наблюдается лишь вблизи поверхности твердого тела внутри пограничного слоя (см. рис 4.1).

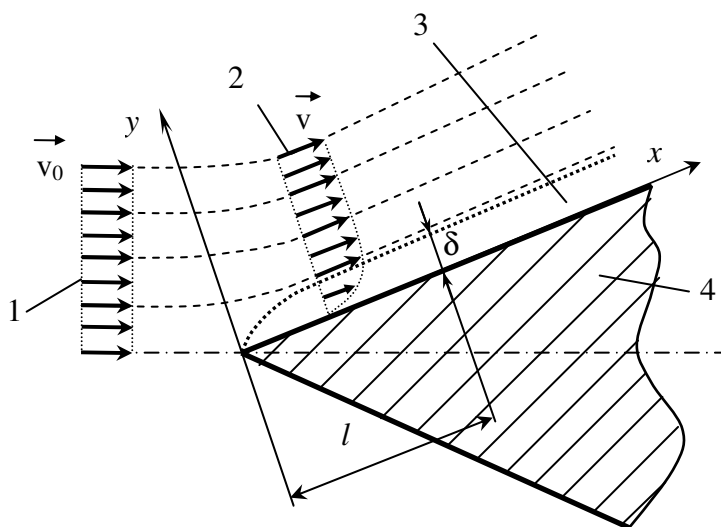


Рис. 4.1. Искажение течения жидкости, связанное с наличием вязкости, вблизи поверхности твердого тела.

- 1 – поле скоростей жидкости в набегающем потоке,
- 2 – поле скоростей в потоке, обтекающем твердое тело,
- 3 – пограничный слой, 4 – твердое тело.

На самом деле, учет вязкости не изменяет поля скоростей, полученного в приближении идеальной жидкости, если реализуется так называемое потенциальное течение, для которого $\Delta \vec{v} = 0$ (потенциальность предполагается во внешнем течении). Это можно объяснить

тем, что уравнения Навье-Стокса отличаются от уравнений Эйлера наличием вязкого слагаемого $\nu \Delta \vec{v}$. Поэтому переход от уравнений Эйлера к уравнениям Навье-Стокса в случае $\Delta \vec{v} = 0$ не изменяет поля скоростей.

Введение представления о пограничном слое оказалось плодотворным по двум причинам:

- для внешнего течения применима теория движения идеальной жидкости;
- внутри пограничного слоя удастся упростить уравнения Навье-Стокса.

Вывод уравнений движения в пограничном слое основан на оценках величин - гипотезах о порядке величины значений различных слагаемых в уравнениях Навье-Стокса и пренебрежением малыми (по оценкам величин) слагаемыми.

Для плоскопараллельного движения жидкости в плоскости (x, y) (см рис. 4.1) имеем следующие уравнения:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (4.3)$$

Пусть l – характерный размер вдоль границы твердого тела, а δ - характерная толщина пограничного слоя на этом расстоянии от кромки твердого тела. Главным положением теории пограничного слоя является гипотеза $\delta \ll l$ или $\frac{\delta}{l} \ll 1$. Это сильное неравенство позволяет оценить величины слагаемых в уравнениях движения.

Очевидны изменения оценок величин функций при их дифференцировании:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{l}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{1}{T},$$

где T - характерное время. Естественной оценкой для продольной скорости является

$$v_x \sim V \text{ и, соответственно, } \frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{V}{l},$$

где V – характерная скорость (как правило, это скорость однородного набегающего потока).

В частности, для производных проекций скорости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{V}{l}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} \sim \frac{v_y}{\delta},$$

тогда из уравнения непрерывности (4.3) получаем оценку для величины поперечной составляющей скорости

$$v_y = V \frac{\delta}{l}.$$

Таким способом получают оценки величин всех слагаемых в рассматриваемых уравнениях. Запишем еще раз уравнения (4.1) и (4.2), проставляя порядок величин под соответствующими слагаемыми:

$$\underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial t}}_{\frac{V}{T}} + \underbrace{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}}_{\frac{V^2}{l}} + \underbrace{v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}}_{\frac{V^2 \delta}{l^2} \frac{1}{\delta}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}_{\frac{V}{l^2}} + \underbrace{\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}_{\frac{V}{\delta^2}} \right), \quad (4.1')$$

$$\underbrace{\frac{\partial v_y}{\partial t}}_{\frac{\delta \cdot V}{l \cdot T}} + \underbrace{v_x \frac{\partial v_y}{\partial x}}_{\frac{V^2 \delta \cdot V}{l^2}} + \underbrace{v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}}_{\left(\frac{\delta \cdot V}{l}\right)^2 \frac{1}{\delta}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}}_{\frac{\delta \cdot V}{l} \cdot \frac{1}{l^2}} + \underbrace{\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}}_{\frac{\delta \cdot V}{l} \cdot \frac{1}{\delta^2}} \right). \quad (4.2')$$

Для того чтобы уравнение (4.1') оказалось нетривиальным, необходимо считать, что

$$\nu \frac{V}{\delta^2} \sim \frac{V^2}{l} \quad \text{или} \quad \delta \sim \sqrt{\frac{\nu \cdot l}{V}} = \frac{l}{\sqrt{Re}}. \quad (4.4)$$

Из соотношения (4.4) вытекает, что уравнения пограничного являются следствиями уравнений Навье-Стокса в пределе $\sqrt{Re} \rightarrow \infty$.

В итоге из системы уравнений (4.1) - (4.3) получаем уравнения плоского пограничного слоя (Прандтль, 1904):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (4.7)$$

которые необходимо рассматривать совместно с условиями прилипания на твердой поверхности

$$v_x = v_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad (4.8)$$

и условием непрерывности продольной составляющей скорости на внешней границе пограничного слоя

$$v_x = V \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \quad (4.9)$$

Система (4.5) - (4.9) должна быть дополнена начальными условиями. Как правило, рассматривается либо развитие во времени пограничного слоя при внезапном начале движе-

ния твердого тела, либо установившееся движение при наличии во внешнем потоке периодических пульсаций. В первом случае используются нулевые начальные условия, а во втором решается задача без начальных данных.

Переход к уравнениям пограничного слоя соответствует изменению области определения функций по продольной переменной, так как вместо $-\infty < x < +\infty$ принимаем что $x > 0$. Эта замена приводит к проблемам, связанным с начальными условиями для пограничного слоя, так как начальные условия для внешнего течения на самом деле должны задаваться во всей области определения функций $-\infty < x < +\infty$.

Принципиально важно отметить, что переход от уравнений Навье-Стокса к уравнениям пограничного слоя изменяет порядок системы уравнений и число граничных условий. Так, кроме условия (4.9) для продольной составляющей скорости в рамках уравнения Навье-Стокса, необходимо потребовать выполнения граничного условия при $y \rightarrow \infty$ и для поперечной составляющей скорости.

Задание граничного условия (4.9) при $y \rightarrow \infty$ приводит к «асимптотическому» пограничному слою. В силу предыдущего замечания, это условие не является полным. Поэтому можно потребовать выполнения каких-либо эквивалентных граничных условий (подобным условием (4.9)) на конечном расстоянии от поверхности твердого тела. Такие условия приводят к предположению о конечной толщине пограничного слоя. Что, в свою очередь, делает возможным приближенные оценки для решения проблемы. Одним из следствий такого подхода является ослабление требований дифференциальной гладкости решения.

Уравнение (4.6) свидетельствует о том, что давление в пограничном слое равно давлению во внешнем потоке. Скорость жидкости во внешнем потоке $v(x)$ может быть определена из соответствующей задачи для идеальной жидкости (без учёта наличия пограничного слоя). Если учесть, что во внешнем потоке справедливо уравнение Бернулли $\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}$,

то можно определить

$$\frac{dp}{dx} = -\rho v \frac{dv}{dx} \quad (4.10)$$

и затем использовать эту, известную таким образом, зависимость продольного градиента давления при анализе уравнений пограничного слоя.

4.2. Ламинарный пограничный слой при обтекании несжимаемой жидкостью плоской пластинки (задача Блазиуса).

Рассмотрим теперь задачу об установившемся пограничном слое на гладкой тонкой неподвижной пластинке – полуплоскости $y = 0, x \geq 0$. Скорость жидкости за пределами пограничного слоя равна скорости набегающего потока $V = \text{const}$ и направлена вдоль оси x (рис. 4.2). Поэтому из уравнений (4.10) и (4.6) следует постоянство давления $p = \text{const}$ также и *внутри* пограничного слоя. Система уравнений пограничного слоя тогда переписывается в виде:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (4.12)$$

с граничными условиями (4.8) и (4.9).

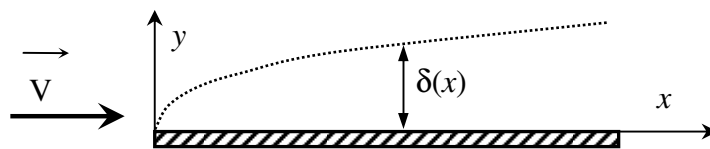


Рис. 4.2. Ламинарный пограничный слой при обтекании несжимаемой жидкостью плоской пластинки (задача Блазиуса).

Определяющими параметрами будут V, ν, y, δ :

$$v_x = V \cdot \varphi(V, \nu, y, \delta),$$

где $\delta(x)$ - толщина пограничного слоя (см. рис 4.2). При выборе определяющих параметров необходимо руководствоваться тем фактом, что они должны быть ограничены *внутри* пограничного слоя. В этой связи, казалось бы, естественным выбрать в качестве определяющего параметра переменную x . Однако это не представляется удачным, так как значения x не ограничены *внутри* пограничного слоя. Именно этот факт использовался при выводе уравнений пограничного слоя (см. раздел 4.1).

Выберем в качестве основных параметров (то есть имеющих независимые размерности): скорость V и величину $\delta = \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{V}}$, имеющую размерность длины и, на основании теории пограничного слоя (с точностью до умножения на постоянную), определяющую толщину пограничного слоя. Тогда получим:

$$v_x = V \cdot \Phi\left(1, \frac{v}{\delta \cdot V}, \frac{y}{\delta}, 1\right) = V \cdot \Phi\left(\frac{v}{\delta \cdot V}, \frac{y}{\delta}\right).$$

В последнем выражении безразмерная переменная $\frac{v}{\delta \cdot V}$ преобразуется к виду

$$\frac{v}{\delta \cdot V} = \sqrt{\frac{v}{V \cdot x}} = \sqrt{\frac{1}{Re_x}},$$

где $Re_x = \frac{V \cdot x}{\nu}$. Как уже отмечалось в разделе 4.1, уравнения пограничного слоя (4.5) и (4.6)

получены в предположении $\sqrt{Re_x} \rightarrow \infty$, что соответствует значению переменной $\frac{v}{\delta \cdot V} \rightarrow 0$

во всех точках *внутри* пограничного слоя. Таким образом, окончательно получаем

$$v_x = V \cdot \Phi\left(0, \frac{y}{\delta}\right) = V \cdot \Phi\left(\frac{y}{\delta}\right).$$

Это означает, что поставленная задача Блазиуса автомодельная и единственной независимой безразмерной переменной является

$$\xi = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{V}}}. \quad (4.13)$$

Для вычисления поперечной составляющей скорости v_y воспользуемся уравнением непрерывности (4.12). Вычислим предварительно частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu}{V}}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} = \left(-\frac{\xi}{2x} \right) \frac{\partial}{\partial \xi}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{V}}} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Проводя соответствующие преобразования в уравнении непрерывности (4.12), получаем

$$\frac{\partial v_y}{\partial \xi} = \sqrt{\frac{\nu V}{x}} \frac{\xi}{2} \frac{d\varphi}{d\xi}.$$

Удобно ввести новую зависимую переменную $\varphi = f'$ (Здесь и далее штрих означает полную производную по переменной ξ). Тогда для поперечной скорости

$$\frac{\partial v_y}{\partial \xi} = \sqrt{\frac{\nu V}{x}} \frac{\xi}{2} f'' = \sqrt{\frac{\nu V}{x}} \frac{1}{2} (\xi f' - f)'$$

или после интегрирования

$$v_y = \sqrt{\frac{vV}{x}} \frac{1}{2} (\xi f' - f). \quad (4.14)$$

Теперь окончательно для проекций скорости и их производных можно записать

$$v_x = V \cdot f'(\xi), \quad v_y = \sqrt{\frac{vV}{x}} \frac{1}{2} (\xi f' - f), \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = V \left(-\frac{\xi}{2x} \right) f''(\xi),$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{\frac{vx}{V}}} \frac{d}{d\xi} (V f'(\xi)) = \frac{V}{\sqrt{\frac{vx}{V}}} f''(\xi), \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{vx}{V}}} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{V}{\sqrt{\frac{vx}{V}}} f''(\xi) \right) = \frac{V^2}{vx} f'''(\xi).$$

Подставим эти выражения в уравнение пограничного слоя (4.11):

$$V f'(\xi) V \left(-\frac{\xi}{2x} \right) f''(\xi) + \sqrt{\frac{vV}{x}} \frac{1}{2} (\xi f' - f) \frac{V}{\sqrt{\frac{vx}{V}}} f''(\xi) = v \frac{V^2}{vx} f'''(\xi).$$

После сокращений получим уравнение

$$2f''' + f \cdot f'' = 0. \quad (4.15)$$

Таким образом, решение автомодельной задачи сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка. Из граничных условий для скорости следуют граничные условия для функции f (которая пропорциональна функции тока):

$$f'(0) = f(0) = 0 \text{ и } f'(\infty) = 1. \quad (4.16)$$

Решение уравнения (4.15) может быть найдено численными методами. Численное решение, например, позволяет оценить касательное напряжение на пластинке:

$$\tau(x) = \eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} = \eta \frac{V}{\sqrt{\frac{vx}{V}}} f''(\xi) \Big|_{\xi=0} = \rho V^{3/2} \cdot v^{1/2} \cdot x^{-1/2} \cdot f''(0).$$

Численное решение приводит к значению $f''(0) \approx 0,332$, поэтому для касательного напряжения

$$\tau(x) \approx 0,332 \sqrt{\frac{\rho \eta V^3}{x}}.$$

Экспериментальные результаты подтверждают эту зависимость.

4.3. Плоская затопленная струя.

Примером течения без ограничивающих стенок, допускающим применение теории пограничного слоя, является истечение струи из длинной узкой щели, находящейся в глубине жидкости (рис. 4.3). Такая струя называется «затопленной» или «свободной» в отличие

например, от струи, бьющей вдоль твердой поверхности (так называемой «пристенной» струи).

В данной задаче, так же как и в задаче Блазиуса, считается, что давление в окружающем пространстве постоянно $p = \text{const}$ и движение жидкости происходит только в результате кинетического воздействия струи на неподвижную жидкость.

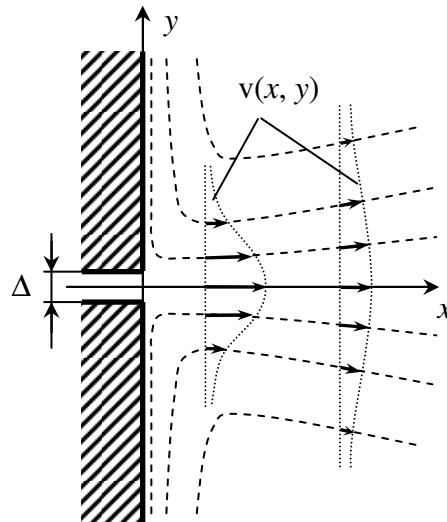


Рис. 4.3. Затопленная струя - истечение струи из длинной узкой щели, находящейся в глубине жидкости.

Струя вносит в окружающую жидкость конечный импульс, который «рассасывается» за счет трения на большом протяженном участке по координате x . Поэтому мы пренебрегаем поперечным размером щели, считая ее бесконечно узкой: $x \gg \Delta$.

Заданной считается величина импульса J (на единицу длины щели), которая в силу отсутствия внешних стенок, остается постоянной вдоль струи

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho v_x^2 dy = \text{const}. \quad (4.17)$$

Запишем уравнение пограничного слоя через функцию тока Ψ (напомним, что

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \text{):}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}. \quad (4.18)$$

Функция тока должна удовлетворять граничным условиям:

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0 \text{ при } y = 0$$

(последнее условие означает симметрию струи относительно плоскости $y = 0$ (см. рис 4.3));

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \infty.$$

Здесь, так же как в задаче Блазиуса (и по той же причине), требуется выполнения граничного условия при $y \rightarrow \infty$ лишь для продольной скорости v_x .

Не проводя подробного анализа размерностей, будем искать автомодельное решение задачи в виде: $\Psi = x^p f\left(\frac{y}{x^q}\right)$. Проведем вычисление частных производных:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = px^{p-1}f - qx^p \frac{y}{x^{q+1}} f' = px^{p-1}f - qx^{p-q-1}yf',$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{1}{x^q} x^p f' = x^{p-q} f', \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{1}{x^{2q}} x^p f'' = x^{p-2q} f'', \quad \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{1}{x^{3q}} x^p f''' = x^{p-3q} f''',$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = (p-q)x^{p-q-1}f' - qx^{p-q}f'' \frac{y}{x^{q+1}} = (p-q)x^{p-q-1}f' - qx^{p-2q-1}yf''.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (4.18), получаем

$$x^{p-q}f'((p-q)x^{p-q-1}f' - qx^{p-2q-1}yf'') - (px^{p-1}f - qx^{p-q-1}yf')x^{p-2q}f'' = vx^{p-3q}f'''$$

или

$$x^{2p-2q-1}((p-q)(f')^2 - pff'') = vx^{p-3q}f'''. \quad (4.18')$$

Из соотношения (4.18') следует, что, ввиду произвольности значений переменной x необходимо выполнения равенства:

$$2p - 2q - 1 = p - 3q. \quad (4.19)$$

Второе соотношение для определения значений постоянных p и q найдем из закона сохранения импульса (4.17). Для этого введем независимую автомодельную переменную

$\xi = \frac{y}{x^q}$. Тогда с учетом выражения для продольной скорости

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = x^{p-q} f'$$

(штрих, как и прежде, означает полную производную по автомодельной переменной ξ) и выражений $y = \xi \cdot x^q$, $dy = x^q d\xi$, соотношение (4.17) можно записать в виде:

$$\frac{J}{\rho} = x^{2p-q} \int_{-\infty}^{+\infty} (f')^2 d\xi = \text{const}.$$

Это равенство возможно, если выполняется

$$2p - q = 0. \quad (4.20)$$

Решением системы (4.19) и (4.20)

$$\begin{cases} p+q=1 \\ 2p-q=0 \end{cases}$$

является пара чисел $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$.

Поэтому функцию тока и автомодельную переменную получаем в виде $\Psi = x^{1/3} f(\xi)$,

$\xi = \frac{y}{x^{2/3}}$. А уравнение (4.18') примет вид

$$-\frac{1}{3}(f')^2 - \frac{1}{3}f \cdot f'' = \nu f''',$$

или

$$(ff' + 3\nu f'')' = 0. \quad (4.21)$$

Проинтегрируем уравнение (4.21) один раз

$$ff' + 3\nu f'' = C.$$

Используем в качестве граничных условий симметрию задачи

$$\Psi = x^{1/3} f = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = f' = 0 \quad \text{при } y = 0$$

или

$$f = 0, f' = 0 \quad \text{при } \xi = 0. \quad (4.22)$$

Следовательно, для постоянной получаем значение $C = 0$ и задача сводится к решению обыкновенного однородного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$ff' + 3\nu f'' = 0. \quad (4.23)$$

Проинтегрируем уравнение (4.23) один раз

$$\frac{f^2}{2} + 3\nu f' = C_1. \quad (4.24)$$

Подстановка первого из граничных условий (4.22) в уравнение (4.23) приводит к соотношению

$$3\nu f'(0) = C_1.$$

Если введем новую зависимую переменную $F = \frac{f}{\sqrt{2C_1}}$ и новую независимую пере-

менную $\xi_1 = \frac{\sqrt{C_1/2}}{3\nu} \xi$, то получим

$$\frac{df}{d\xi} = \frac{df}{d\xi_1} \frac{d\xi_1}{d\xi} = \frac{\sqrt{C_1/2}}{3\nu} \frac{df}{d\xi_1} = \frac{\sqrt{C_1/2}}{3\nu} \sqrt{2C_1} \frac{dF}{d\xi_1} = \frac{C_1}{3\nu} \frac{dF}{d\xi_1}.$$

Тогда уравнение (4.24) в новых переменных примет вид

$$\frac{F^2 2C_1}{2} + 3\nu \frac{\sqrt{2C_1}}{3\nu} \frac{dF}{d\xi_1} = C_1,$$

или после сокращений:

$$F^2 + \frac{dF}{d\xi_1} = 1. \quad (4.25)$$

Уравнение (4.25) известно как *уравнение Риккати* и может быть проинтегрировано в виде:

$$\xi_1 = \int_0^F \frac{dF}{1-F^2} = \frac{1}{2} \int_0^F \left\{ \frac{1}{1+F} + \frac{1}{1-F} \right\} dF = \frac{1}{2} \ln \frac{1+F}{1-F} = \operatorname{Arcth} F,$$

тогда

$$F = \operatorname{th} \xi_1 = \frac{1 - e^{-2\xi_1}}{1 + e^{-2\xi_1}}.$$

Производную $\frac{dF}{d\xi_1}$ определим из уравнения (4.25):

$$\frac{dF}{d\xi_1} = 1 - F^2 = 1 - \operatorname{th}^2 \xi_1,$$

тогда для продольной скорости получаем выражение

$$v_x = x^{-\frac{1}{3}} f' = x^{-\frac{1}{3}} \frac{C_1}{3\nu} \frac{dF}{d\xi_1} = x^{-\frac{1}{3}} \frac{C_1}{3\nu} (1 - \operatorname{th}^2 \xi_1).$$

Максимальная скорость струи достигается на плоскости симметрии $\xi_1 = 0$. Относительное изменение продольной скорости струи $\frac{v_x}{v_x(0)} = 1 - \operatorname{th}^2 \xi_1$ представлено на рис. 4.4.

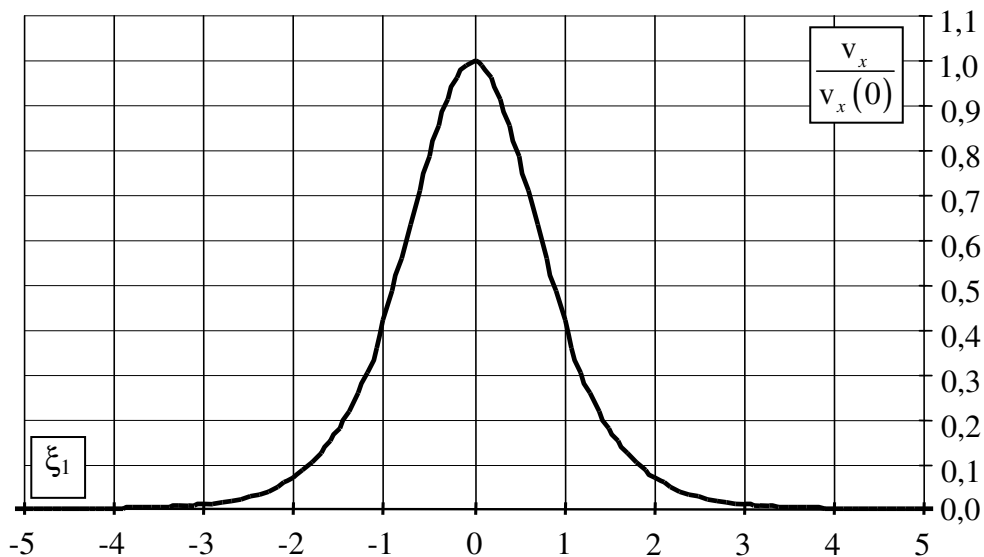


Рис. 4.4. Относительное изменение величины продольной скорости.

Значение постоянной C_1 вычислим из условия постоянства импульса струи

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \left(\frac{C_1}{3v} \frac{dF}{d\xi_1} \right)^2 \frac{3v}{\sqrt{C_1/2}} d\xi_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \left(\frac{C_1}{3v} (1 - \text{th}^2 \xi_1) \right)^2 \frac{3v}{\sqrt{C_1/2}} d\xi_1 = \\ &= 2\sqrt{2}\rho \frac{C_1^{3/2}}{3v} \int_0^{+\infty} (1 - \text{th}^2 \xi_1)^2 d\xi_1 = \sqrt{2}\rho \frac{4}{9} \frac{C_1^{3/2}}{v} = \text{const}. \end{aligned}$$

Откуда

$$C_1 = \sqrt[3]{\frac{81v^2}{32\rho^2} J^2} = 1,363 \left(\frac{v \cdot J}{\rho} \right)^{2/3}.$$

Поэтому функция тока приобретает вид

$$\Psi = x^p f = x^{\frac{1}{3}} \sqrt{2C_1} F = x^{\frac{1}{3}} \sqrt{2C_1} \cdot \text{th} \left(\frac{\sqrt{C_1/2}}{3v} \frac{y}{x^{2/3}} \right).$$

Определим расход струи:

$$Q = \Psi(+\infty) - \Psi(-\infty) = 2(\Psi(+\infty) - \Psi(0)) = 2\Psi(+\infty).$$

С учетом того, что при $y \rightarrow \infty$ переменная $\xi_1 = \frac{\sqrt{C_1/2}}{3v} \frac{y}{x^{2/3}} \rightarrow \infty$ и поэтому $\text{th} \xi_1 \rightarrow 1$, получаем

$$Q = 2\Psi(+\infty) = 2x^{\frac{1}{3}} \sqrt{2 \cdot 1,363 \left(\frac{v \cdot J}{\rho} \right)^{2/3}} \approx 3,302 \left(\frac{v \cdot J}{\rho} x \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Откуда следует, что с увеличением расстояния от отверстия, расход возрастает, то есть струя вовлекает в движение окружающую жидкость.

4.4. Ламинарный пограничный слой на границе раздела двух потоков.

Качественная схема движения жидкости на границе раздела двух потоков (слой смешения) представлена на рис.4.5. Пограничный слой возникает в переходной области между взаимодействующими потоками одной и той же жидкости. Давление считается постоянным во всем переходном слое.

Анализ проблемы в приближении теории пограничного слоя, аналогичный уже проведенному в разделах (3.5), (3.6), позволяет убедиться, что рассматриваемая задача автомодельная.

Автомодельная переменная ξ и функция тока Ψ вводятся в виде

$$\xi = y \sqrt{\frac{V_1}{vx}}, \quad \Psi = \sqrt{vV_1x} \cdot f(\xi).$$

В этих переменных уравнение (4.5) преобразуется к виду, совпадающему с (4.15),

[Оглавление](#)

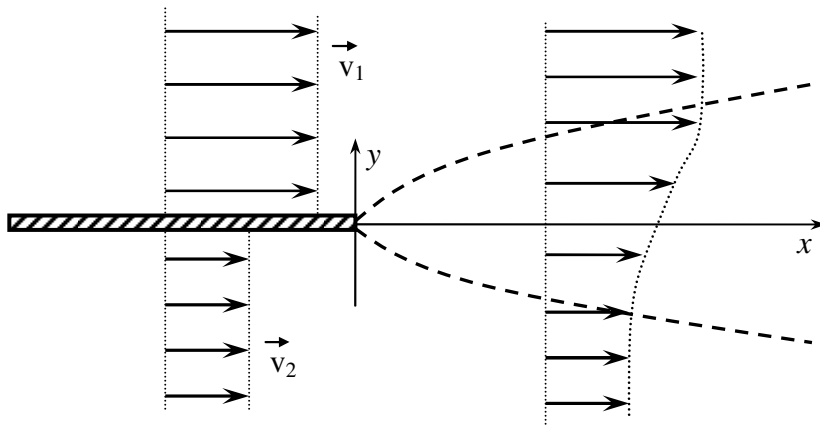


Рис. 4.5. Слой смешения - движение жидкости на границе раздела двух потоков.

$$f \cdot f'' + 2f''' = 0.$$

Граничные условия

$$f' = 1 \text{ при } \xi \rightarrow \infty, \quad f' = \frac{V_2}{V_1} \text{ при } \xi \rightarrow -\infty.$$

Не останавливаясь на подробном изложении результатов решения полученной задачи, лишь отметим, что возможно обобщение на случай слоя смешения двух жидкостей с разными плотностями и вязкостями.

4.5. Преобразование системы уравнений стационарного пограничного слоя в уравнение нелинейной теплопроводности.

При анализе различных задач в теории пограничного слоя возникает проблема выяснения принадлежности решений к тому или иному классу функций. Часто необходимо заранее знать дифференциальные свойства решений уравнений пограничного слоя, поскольку от этого зависит существование и единственность решения. В этой связи особую роль играет возможность преобразования уравнений пограничного слоя к виду, который более четко указывает на их математические свойства. Мы рассмотрим здесь преобразование Мизеса (1927 г.).

Перейдем к новым независимым переменным в системе уравнений пограничного слоя (4.5) - (4.7):

$$(x, y) \rightarrow (\zeta, \eta), \text{ где } \zeta = x, \eta = \Psi \text{ } (\Psi - \text{функция тока}).$$

Учитывая определения $v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ и проводя вычисления, найдем

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial \zeta} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 + v_x \frac{\partial v_x}{\partial \eta}.$$

Выберем продольную скорость $v_x(\zeta, \eta)$ в качестве зависимой переменной и преобразуем уравнения (4.5), (4.6) к виду

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial \zeta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \zeta} = v v_x \frac{\partial}{\partial \eta} \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \right), \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0. \quad (4.27)$$

Как видно, в уравнения (4.26), (4.27) не входит вертикальная скорость v_y , которая определяется из уравнения непрерывности (4.7).

Таким образом, в конечном итоге уравнение (4.26) приводится к виду

$$u \cdot L(u) = Q, \quad (4.28)$$

где введены обозначения:

$$u = v_x(\zeta, \eta), (\zeta, \eta) \in \Omega \text{ (}\Omega \text{ - область определения),}$$

$$L(u) = u'_\zeta - v \cdot u \cdot \left(u'_\eta \right)_\eta,$$

$Q(\zeta)$ - известная функция источника.

Дифференциальный оператор $L(u)$ вырождается при $u = 0$. Известно, что в этом случае носитель решения может не совпадать с областью определения. (Напомним, что носителем решения называется множество $\Omega_S \subset \Omega$, являющееся замыканием множества Ω_1 всех таких пар (ζ, η) , для которых $u \neq 0$.) Поэтому необходимо сформулировать некоторые условия непрерывности решения задачи на границе, где происходит вырождение $(\zeta, \eta) \in \{\omega_1 = \Omega_S \setminus \Omega_1\}$.

Обычно предполагается непрерывность всех производных от решения, входящих в оператор $L(u)$,

$$u \in C^{1,2}(\Omega \setminus \omega_1),$$

то есть почти везде над областью определения. Во всей области определения, в том числе и на границе вырождения ω_1 , необходимо выполнение условий непрерывности самого решения

$$u \in C(\Omega)$$

и его потока

$$u u'_\eta \in C(\Omega).$$

Последнее условие эквивалентно физическому условию непрерывности касательного напряжения. При необходимости эти условия можно использовать для построения асимптотического представления решения вблизи поверхности вырождения.

Особая ситуация возникает при отсутствии внешнего градиента давления, то есть когда функция источника $Q(\zeta) = 0$. В этом случае у уравнения (4.28) существует еще одно, тривиальное, решение

$$u(\zeta, \eta) \equiv 0, (\zeta, \eta) \in \Omega_1, \Omega_1 \subset \Omega.$$

Как видно, это тривиальное решение может возникать за счет первого сомножителя в (4.28), и как особое решение квазилинейного параболического уравнения

$$L(u) = 0. \quad (4.29)$$

В качестве примера представим решение задачи о плоской затопленной струе (см. раздел 4.3) в переменных Мизеса. Предварительно зададим область определения

$$\Omega(\zeta, \eta) = R_+ \times R.$$

Скорость внутри струи задается функцией

$$u = \frac{C_1}{3\nu} \zeta^{1/3} \left(1 - \frac{\eta^2}{2\zeta^{2/3} C_1} \right). \quad (4.30)$$

Будем считать, что скорость струи есть неотрицательная функция $u(\zeta, \eta) \geq 0$ во всей области определения переменных $(\zeta, \eta) \in \Omega$.

Как видно, скорость струи в этих переменных обращается в нуль $u = 0$ на границе носителя

$$|\eta| = \eta_f = \sqrt{2C_1} \zeta^{1/3}.$$

То есть носитель решения (замыкание области независимых переменных, где $u > 0$) не покрывает всю область определения и за пределами носителя решение должно быть непрерывно продолжено особым решением $u = 0$. Вычисляя поток $u\eta'_\eta$, можно убедиться в том, что в этом случае на границе носителя решения оказываются выполненными условия непрерывности и скорости и потока – касательного напряжения.

Обратный переход от переменных Мизеса к физическим переменным $(\zeta, \eta) \rightarrow (x, y)$ осуществляется по формуле

$$x = \zeta, \quad y = \int_0^\Psi \frac{d\eta}{u(\zeta, \eta)}. \quad (4.31)$$

При интегрировании легко убедиться в том, что при $\Psi \rightarrow \eta_f$ выполняется $y \rightarrow \infty$. То есть носитель решения полностью проецируется на область определения физических переменных. Прямое преобразование $(x, y) \rightarrow (\zeta, \eta)$ оказывается проекцией «в», а обратное пре-

образование $(\zeta, \eta) \rightarrow (x, y)$ проекцией «на». Такая ситуация реализуется не всегда, движение оказывается ограниченным в физических переменных (носитель решения не совпадает с областью определения) в приближении теории пограничного слоя, например, для нелинейно вязких жидкостей, анализу особенностей движения которых посвящена следующая глава.

5. Пограничный слой в неньютоновской несжимаемой жидкости со степенным реологическим законом.

5.1. Плоская затопленная струя в неньютоновской жидкости.

Для описания реологических свойств вязкой неньютоновской жидкости часто используется степенной реологический закон Освальда-де Виля:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2kA^{n-1}\gamma_{ij}, \quad (5.1)$$

где $A = \sqrt{2\gamma_{ij}\gamma_{ij}}$ - интенсивность тензора скоростей деформации, $\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$. Если

учесть оценки, справедливые в приближении теории пограничного слоя, то в обозначениях теории (см. раздел 4.1) можно записать

$$A = \left|\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau = k \left|\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|^{n-1} \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (5.2)$$

Напомним, что величина $k = \text{const} > 0$ называется показателем консистенции, а величина $n = \text{const} > 0$ - индексом течения. При $n = 1$ реологическое соотношение (5.2) совпадает с аналогичным соотношением для ньютоновской линейно вязкой жидкости.

Уравнения пограничного слоя (4.5) – (4.7) в жидкости Освальда-де Виля переписываются в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{k}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left|\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|^{n-1} \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (5.5)$$

где для затопленной струи предполагается, что давление в струе постоянно $p = \text{const}$. При этом, как и прежде, заданным считается импульс струи (4.17), который сохраняется вдоль струи из-за отсутствия трения на ее границах. Рассматриваемая задача - автомодельная. Для нахождения автомодельной переменной и зависимости функции тока $\Psi(x, y)$ течения от продольной координаты (см. рис. 4.3) положим

$$\Psi = x^p \cdot f\left(\frac{y}{x^q}\right),$$

где постоянные p и q находятся из уравнения (5.3) и условия сохранения импульса струи (4.17). Из условия (4.17), как и прежде, следует равенство (4.20), а уравнение переноса импульса (5.3) переписывается в виде:

$$x^{2p-2q-1} \left((p-q)(f')^2 - p \cdot f \cdot f'' \right) = \frac{k}{\rho} x^{(p-2q)n-q} \left(|f''|^{n-1} f'' \right)'. \quad (5.6)$$

В итоге получается система

$$\begin{cases} (2-n)p + (2n-1)q = 1 \\ 2p - q = 0 \end{cases}$$

из которой находим значения $p = \frac{1}{3n}$, $q = \frac{2}{3n}$. Одновременно из (5.6) получается уравнение для определения функции $f(\xi)$:

$$-(f')^2 - f \cdot f'' = 3n \frac{k}{\rho} \left(|f''|^{n-1} f'' \right)',$$

или

$$\left(f \cdot f' + 3n \frac{k}{\rho} |f''|^{n-1} f'' \right)' = 0, \quad (5.7)$$

где учтено, что автомодельная переменная имеет вид $\xi = \frac{y}{x^{\frac{1}{3n}}}$, а функция тока $\Psi = x^{\frac{1}{3n}} \cdot f(\xi)$.

Уравнение (5.7) должно быть решено с граничными условиями

$$f = 0, f'' = 0 \text{ при } \xi = 0 \quad (5.8)$$

которые следуют из условия симметрии для функции тока, и

$$f' = 0 \text{ при } |\xi| = \infty \quad (5.9)$$

которое означает отсутствие течения жидкости на большом удалении от струи.

Интегрируя один раз уравнение (5.7), с учетом условий (5.8), получим

$$f \cdot f' + 3n \frac{k}{\rho} |f''|^{n-1} f'' = 0. \quad (5.10)$$

Ограничивая область определения $\xi > 0$ и, предполагая, что при $\xi > 0$ знак второй производной определен $f'' < 0$, перепишем уравнение (5.10) в виде

$$f \cdot f' - 3n \frac{k}{\rho} (-f'')^n = 0. \quad (5.11)$$

Уравнение (5.11) не содержит в явном виде независимую переменную, поэтому его порядок может быть понижен. И в самом деле, переходя к новым зависимой и независимой переменным:

$$(f, \xi) \rightarrow (g, \eta), \text{ где } g = f', \eta = f$$

получаем из уравнения (5.11) уравнение первого порядка

$$g \frac{dg}{d\eta} = - \left(\frac{\eta g \rho}{3kn} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \eta > 0, \quad g > 0,$$

решение которого записывается в виде квадратуры.

Возвращаясь к прежним переменным, получаем

$$f' = \left(U - D \cdot f^{\frac{n+1}{n}} \right)^{\frac{n}{2n-1}}, \quad \xi = \int_0^f \frac{d\eta}{\left[U - B\eta^{\frac{n+1}{n}} \right]^{\frac{n}{2n-1}}}, \quad (5.12)$$

где

$$U = f'(0)^{\frac{2n-1}{n}}, \quad D = \left(\frac{3kn}{\rho} \right)^{-\frac{1}{n}} \cdot \frac{2n-1}{n+1}.$$

Таким образом, искомая зависимость $f'(\xi)$ получена в параметрическом виде.

Из вида интеграла (5.12) ясно, что предельное значение переменной f определяется из условия обращения в ноль знаменателя в подынтегральном выражении (5.12)

$$f \rightarrow f_0 = \left(\frac{U}{D} \right)^{\frac{n}{n+1}}.$$

Характер этого асимптотического стремления зависит от индекса течения $n > 0$.

Если $0,5 < n \leq 1$, то интеграл в (5.12) при $f \rightarrow f_0$ не существует и $f' \neq 0$ во всей области $0 < \xi < \infty$.

Если же $n > 1$, то интеграл существует и можно определить значение автомодельной переменной $\xi = \xi_0$, соответствующей границе струи

$$\xi_0 = \int_0^{f_0} \frac{d\eta}{\left[U - D \cdot \eta^{\frac{n+1}{n}} \right]^{\frac{n}{2n-1}}}. \quad (5.13)$$

За пределами этой границы полученное нетривиальное решение должно быть продолжено тривиальным решением

$$f \rightarrow f_0 = \text{const}, \quad f' = 0 \quad \text{при} \quad \xi > \xi_0$$

(см. раздел 4.5 предыдущей главы).

Таким образом, для дилатантных жидкостей ($n > 1$) не только расход жидкости в струе ограничен, но и поперечные размеры струи также оказываются ограниченными.

Неизвестная пока постоянная U должна быть определена из условия постоянства импульса струи. Из (4.17) следует

$$\frac{J}{2\rho} = \int_0^{+\infty} (f')^2 d\xi = \text{const}.$$

Дальнейший анализ удобно провести, переходя к новым переменным

$$\zeta = \frac{f'(0) \cdot \xi}{f_0}, \quad \varphi = \frac{f}{f_0}.$$

Учитывая, что $f' \cdot d\xi = df$, преобразуем условие постоянства импульса в новых переменных к виду

$$\frac{J}{2\rho} = f'(0) \cdot D^{-\frac{1}{n+1}} \int_0^1 \left[1 - \varphi^{\frac{n+1}{n}} \right]^{\frac{n}{2n-1}} d\varphi = \text{const}.$$

Из этого соотношения можно найти искомую постоянную

$$f'(0) = \frac{J}{2\rho} \cdot \frac{D^{\frac{1}{n+1}}}{\int_0^1 \left[1 - \varphi^{\frac{n+1}{n}} \right]^{\frac{n}{2n-1}} d\varphi}. \quad (5.14)$$

Интеграл в (5.14) может быть вычислен

$$\int_0^1 \left[1 - \varphi^{\frac{n+1}{n}} \right]^{\frac{n}{2n-1}} d\varphi = \frac{n}{n+1} \cdot B\left(\frac{3n-1}{2n-1}, \frac{n}{n+1}\right),$$

где $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ - бета-функция.

Соотношения (5.12) в новых переменных примут вид

$$\varphi'_\zeta = \left(1 - \varphi^{\frac{n+1}{n}} \right)^{\frac{n}{2n-1}}, \quad |\zeta| = \int_0^\varphi \frac{d\eta}{\left[1 - \eta^{\frac{n+1}{n}} \right]^{\frac{n}{2n-1}}}, \quad \varphi \in (0, 1).$$

На рис. 5.1 представлен вид функции $\varphi'_\zeta(\zeta)$, которая, по сути, определяет изменение продольной скорости жидкости поперек струи, для различных значений индекса течения

$n > 0,5$. Особенно простая зависимость получается при $n \rightarrow \infty$: $\varphi'_\zeta = 1 - \frac{|\zeta|}{2}$.

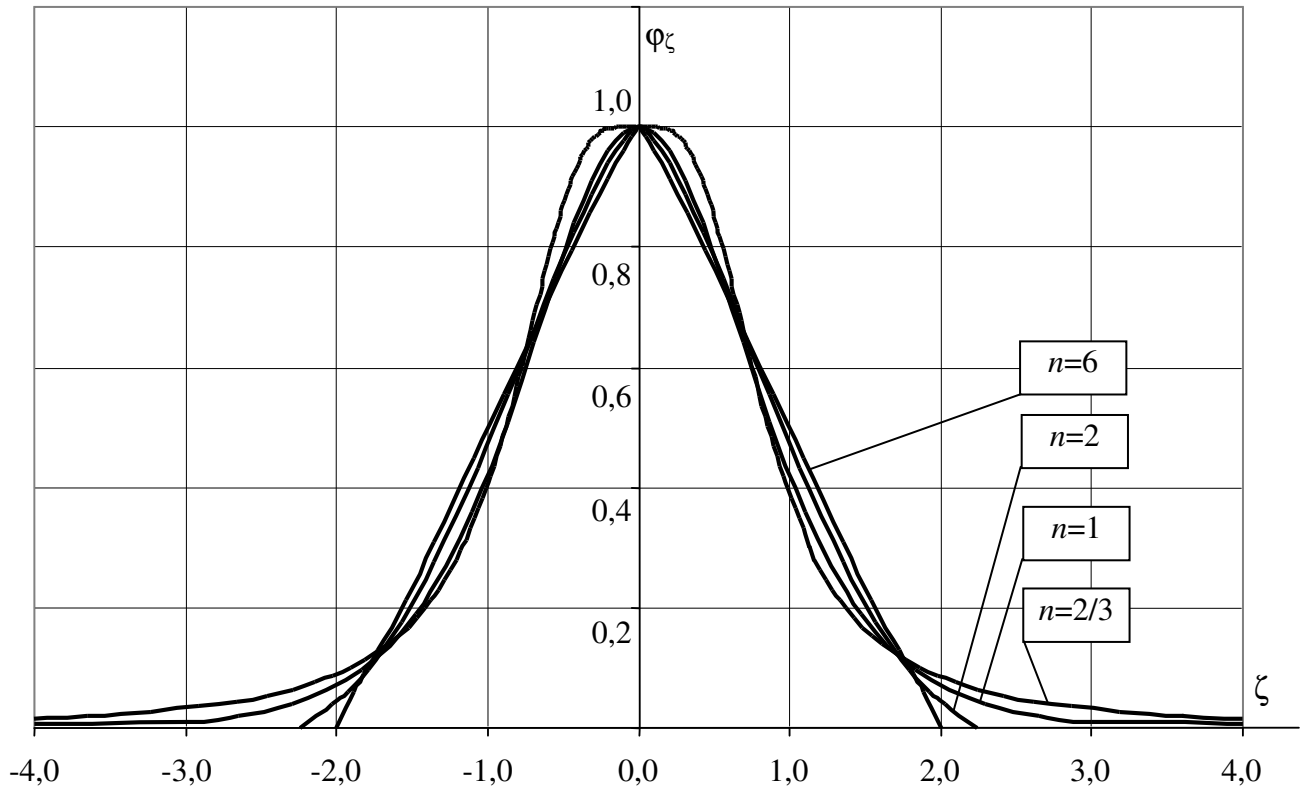


Рис. 5.1. Относительная продольная скорость для различных значений индекса течения

Если индекс течения $n < 0,5$, то формально полученные выше соотношения также имеют место. Однако в этом случае расход жидкости в струе оказывается неограниченно большим в любом поперечном сечении, так как $\xi \rightarrow \infty$ при $f \rightarrow \infty$ во втором соотношении (5.12). Причиной этого является ограниченная применимость степенного реологического закона Освальда – де Виля. Как указывалось в разделе (2.6), кажущаяся вязкость оказывается бесконечно большой при малых скоростях деформации для псевдопластичной жидкости при $n < 1$, что в случае $n > 0,5$ и приводит к неограниченности расхода струи.

5.2. Один класс автомодельных решений теории пограничного слоя в неньютоновской дилатантной жидкости.

Вернемся теперь к классической задаче Блазиуса (см. раздел 4.2) для неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом Освальда – де Виля (5.1). Ограничимся только дилатантными жидкостями $n > 1$, как представляющими для нас наибольший интерес.

Движение жидкости в пограничном слое описывается системой уравнений (5.3) – (5.5), которая в случае задачи Блазиуса должна рассматриваться совместно с граничными ус-

ловиями (4.8), (4.9). Несложно убедиться в том, что поставленная таким образом задача является автомодельной. Поэтому сразу укажем новые автомодельные переменные: функцию тока

$$\Psi = V \cdot x \cdot \left[\frac{n(n+1)}{Re_x} \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot f(\xi)$$

и независимую переменную

$$\xi = \frac{y}{x} \left[\frac{Re_x}{n(n+1)} \right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

При этом для продольной v_x и поперечной v_y скоростей получаются выражения

$$v_x = V \cdot f', \quad v_y = \frac{V}{n+1} \left[\frac{n+1}{Re_x} \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot (\xi f' - f).$$

Здесь обобщенное число Рейнольдса $Re_x = \frac{\rho V^{2-n} x^n}{k}$, а переменные выбраны таким образом, чтобы окончательный вид уравнений для автомодельных переменных выглядел наиболее просто. Система уравнений (5.3) – (5.5) в указанных автомодельных переменных сводится к одному уравнению:

$$f''' |f''|^{n-1} + f'' \cdot f = 0. \quad (5.15)$$

(Заметим, что уравнение (5.15) при $n = 1$ переходит в уравнение (4.15) при замене $f \rightarrow \frac{f}{2}$.)

Исследуем характер интегральных кривых уравнения (5.15) вне зависимости от граничных условий. Наша цель – определение качественного характера всего класса течений дилатантной жидкости, в конечном итоге сводящееся к исследованию уравнения (5.15). Тот факт, что уравнение (5.15) возникает не только в задаче Блазиуса, уже отмечался в случае ньютоновской жидкости $n = 1$ (см. раздел 4.4).

Для качественного исследования интегральных кривых уравнения (5.15) сведем его к уравнению первого порядка. Вначале понизим его порядок с помощью замены переменных $(f, \xi) \rightarrow (z, f)$, где $z = f'$. Предварительно вычислив производные

$$f'' = \frac{dz}{df} \frac{df}{d\xi} = z_f z, \quad f''' = \frac{d(z_f z)}{df} \frac{df}{d\xi} = (z_{ff} z + z_f z_f) z,$$

из уравнения (5.15) получим

$$f \cdot z_f z = |z_f z|^{n-1} (z_{ff} z + z_f z_f) z.$$

Отбрасывая возможное тривиальное решение $z \equiv 0$ (см. разделы 4.5 и 5.1) и сокращая z , получаем уравнение

$$f \cdot z_f = |z_f z|^{n-1} (z_{ff} z + z_f z_f).$$

Инфинитезимальный оператор для этого уравнения имеет вид

$$X = f \frac{\partial}{\partial f} + \frac{n+1}{2n-1} z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Используем *первое продолжение* этого оператора

$$X_1 = f \frac{\partial}{\partial f} + \frac{n+1}{2n-1} z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{2-n}{2n-1} z_f \frac{\partial}{\partial z_f}$$

для поиска дифференциального инварианта первого порядка. (Непосредственная проверка показывает, что *второе продолжение* этого инфинитезимального оператора

$$X_2 = f \frac{\partial}{\partial f} + \frac{n+1}{2n-1} z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{2-n}{2n-1} z_f \frac{\partial}{\partial z_f} + \frac{3-3n}{2n-1} z_{ff} \frac{\partial}{\partial z_{ff}}$$

сохраняет вид уравнения $F = f \cdot z_f - |z_f z|^{n-1} (z_{ff} z + z_f z_f) = 0$.)

Из соотношений для характеристик

$$\frac{df}{f} = \frac{dz}{\frac{n+1}{2n-1} z} = \frac{dz_f}{\frac{2-n}{2n-1} z_f}$$

находим два независимых дифференциальных инварианта

$$q = \frac{z}{|f|^{\frac{n+1}{2n-1}}} \equiv \frac{f'}{|f|^{\frac{n+1}{2n-1}}}, \quad p^* = \frac{z_f}{|f|^{\frac{2-n}{2n-1}}}.$$

Из соображений наглядности более удобно использовать вместо p^* другую величину

$$p = p^* q = \frac{f''}{|f|^{\frac{3}{2n-1}}}, \text{ которая также является инвариантом. Таким образом, окончательно полу-}$$

чаем выражения для используемых в дальнейшем инвариантов

$$q = \frac{f'}{|f|^{\frac{n+1}{2n-1}}}, \quad p = \frac{f''}{|f|^{\frac{3}{2n-1}}} \quad (5.16)$$

Запишем уравнение (5.15) через инварианты p и q . Будем считать, что они связаны функциональной связью $p = p(q)$ и выразим f''' из определений самих инвариантов. Для этого выражая вторую производную $f'' = p |f|^{\frac{3}{2n-1}}$ и дифференцируя, получим

$$f''' = \frac{3p}{2n-1} |f|^{\frac{4-2n}{2n-1}} f' \cdot \text{sgn}(f) + |f|^{\frac{3}{2n-1}} \frac{dp}{dq} \frac{dq}{d\xi}.$$

В свою очередь

$$f' = q|f|^{\frac{n+1}{2n-1}}, \quad \frac{dq}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left[\frac{f'}{|f|^{\frac{n+1}{2n-1}}} \right] = |f|^{\frac{2-n}{2n-1}} \left[p - \frac{n+1}{2n-1} q^2 \cdot \operatorname{sgn}(f) \right].$$

Используя полученные выражения производных через инварианты, уравнение (5.15) преобразуем к виду

$$|p|^{n-1} \left[\frac{dp}{dq} - p \frac{(2n-1)|p|^{1-n} + 3q}{(n+1)q^2 - (2n-1)p \cdot \operatorname{sgn}(f)} \right] = 0. \quad (5.17)$$

Уравнение (5.17) является искомым уравнением пограничного слоя для жидкостей со степенным реологическим законом (5.15), записанным через инварианты p и q .

Как видно, для дилатантных жидкостей $n > 1$ соотношение (5.17) представляет собой произведение двух уравнений

$$L_1(p, q) \cdot L_2(p) = 0.$$

Одно из них дифференциальное

$$L_1(p, q) \equiv \frac{dp}{dq} - p \frac{(2n-1)|p|^{1-n} + 3q}{(n+1)q^2 - (2n-1)p \cdot \operatorname{sgn}(f)} = 0, \quad (5.18)$$

а другое - алгебраическое

$$L_2(p) \equiv |p|^{n-1} = 0.$$

Таким образом, при $n > 1$ уравнение (5.17), кроме множества частных решений дифференциального уравнения (5.18), всегда имеет алгебраический корень

$$p = 0. \quad (5.19)$$

Каждому частному решению уравнения (5.18) соответствует класс решений уравнения (5.15), которые получаются квадратурами:

$$f = \exp \left(\int \frac{(2n-1)q dq}{(2n-1)p \cdot \operatorname{sgn}(f) - (n+1)q^2} \right), \quad \xi = \int \frac{df}{q|f|^{\frac{n+1}{2n-1}}}. \quad (5.20)$$

Алгебраическому корню (5.19) при $n > 1$ соответствует решение

$$f = c_1 \xi + c_2, \text{ где } c_1, c_2 = \text{const}. \quad (5.21)$$

Выполнение конкретных граничных условий приводит к необходимости «склеивания» решений (5.20) и (5.21). При этом в точке склеивания $\xi = \xi_0$ образуется слабый разрыв – поверхность пространственной локализации сдвиговых возмущений. Не смотря на это, на этой поверхности должны быть непрерывны продольная скорость $v_x \sim f' \sim q$ и касательное напряжение $\tau_{xy} \sim |f''|^{n-1} f'' \sim p^n$.

Для качественного представления решений уравнения (5.17) удобно использовать двулистную фазовую плоскость (p, q) , один из листов которой соответствует положительным

значениям функции тока f , а другой – отрицательным. В силу инвариантности уравнения (5.15) относительно преобразования $(\xi, f) \rightarrow (-\xi, -f)$ интегральным кривым на двулистной фазовой плоскости (p, q) соответствуют такие же кривые на плоскости $(-p, q)$ (лишь с изменением направления движения вдоль интегральной кривой). Иными словами, достаточно исследовать поведение интегральных кривых на одном листе фазовой плоскости, тогда на другом их ход можно указать в силу симметрии.

Качественный характер интегральных кривых уравнения (5.17) полностью определяется его особыми точками. Ограничимся одним листом фазовой плоскости (p, q) для $f > 0$. Соответственно уравнение (5.18) переписывается в виде

$$\frac{dp}{dq} = p \frac{(2n-1)|p|^{1-n} + 3q}{(n+1)q^2 - (2n-1)p} \quad (5.22)$$

Как видно, при $|p|, |q| \neq \infty$ уравнение (5.22), вообще говоря, может иметь две особые точки для случая $n > 1$. Обозначим их буквами α и β .

Особая точка α . Положение этой особой точки определяется обращением в ноль числителя и знаменателя в правой части уравнения (5.22). Соответственно получаем

$$q_\alpha = - \left[\frac{2n-1}{3} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^{1-n} \right]^{\frac{1}{2n-1}} < 0, \quad p_\alpha = \left(\frac{n+1}{2n-1} \right) q_\alpha^2 > 0.$$

Для исследования типа особой точки линеаризуем уравнение (5.22) вблизи нее. Таким образом, получим

$$\frac{d(p - p_\alpha)}{d(q - q_\alpha)} = p_\alpha \frac{(2n-1)(1-n)p_\alpha^{1-n}(p - p_\alpha) + 3(q - q_\alpha)}{-(p - p_\alpha) + 2(n+1)q_\alpha(q - q_\alpha)}.$$

Составляя далее характеристическое уравнение, найдем его корни:

$$\lambda_{1,2} = q_\alpha \left(\frac{(5n-1)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5n-1}{2} \right)^2 - 3(n+1)(2n-1)} \right).$$

Изучая подкоренное выражение, определим, что при $1 \leq n \leq n_0$ (где $n_0 = 11 + 6\sqrt{3} \approx 21,4$) корни являются комплексно сопряженными, а при $n > n_0$ действительными и одного знака. Соответственно, характер особых точек меняется от фокуса до узла. При $n = n_0$ узел оказывается дикритическим. В силу физических оценок всегда в дальнейшем будем полагать $n < n_0$.

Особая точка β . Положение этой особой точки определяется одновременным обращением в ноль обеих переменных $p = q = 0$. Как видно, линеаризация числителя и знаменателя в правой части уравнения (5.22) невозможна. Здесь проверим саму возможность прохождения интегральной кривой через особую точку β . Для этого предположим, что вблизи этой

особой точки на интегральной кривой, входящей в нее, переменные связаны асимптотическим соотношением: $p = a \cdot q^\gamma$, $q > 0$, $\gamma > 0$. После подстановки в уравнение (5.22) получим асимптотическое при $p, q \rightarrow 0$ соотношение

$$\gamma(n+1)q^{\gamma-1}[(n+1)q^2 - (2n-1)aq^\gamma] = q^\gamma[(2n-1)(|a|q^\gamma)^{1-n} + 3q].$$

Для определения показателя γ необходимо приравнять степени при переменной q в каких-либо двух слагаемых этого асимптотического соотношения и убедиться, что все остальные степени оказываются, по крайней мере, не меньше. Такой анализ показывает, что при $n > 1$ существует единственная возможность $2\gamma - 1 = 2\gamma - \gamma n$ или $\gamma = \frac{1}{n} < 1$. Соответственно, $a = -n^{\frac{1}{n}}$.

Аналогичное исследование можно провести и при $q < 0$, полагая $p = a(-q)^\gamma$, $\gamma > 0$.

При этом получим $\gamma = \frac{1}{n}$, $a = n^{\frac{1}{n}}$. Объединяя полученные результаты можно записать асимптотическое представление для интегральной кривой, проходящей через особую точку β :

$$p = -(n|q|)^{\frac{1}{n}} \operatorname{sgn}(q).$$

Исследуем теперь асимптотическое поведение интегральных кривых на фазовой плоскости (p, q) в узкой полосе вблизи $p = 0$, $q \neq 0$. Если предположить, что интегральные кривые в этой области пересекают ось q , то вблизи точки пересечения $q = q_0$ уравнение (5.22) асимптотически эквивалентно уравнению

$$\frac{dp}{d(q - q_0)} = \frac{(2n-1)p|p|^{1-n}}{(n+1)q_0^2}.$$

Интегрируя это уравнение с начальными условиями $p = 0$ при $q = q_0$, получим асимптотическое представление для интегральных кривых, пересекающих ось q вблизи точки пересечения:

$$|p| = \left[\frac{(2n-1)(n-1)}{(n+1)q_0^2} \right]^{\frac{1}{n-1}} (q - q_0)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (5.23)$$

Как видно, это возможно только $q > q_0$.

Судя по асимптотическому представлению (5.23), при всех значениях показателя $n > 1$ существуют интегральные кривые, пересекающие ось q .

На рис. 5.2 качественно показан ход интегральных кривых в узкой полосе вблизи оси q , включая и начало координат для случая $n > 2$, когда $\frac{dp}{dq} \rightarrow \infty$, при $q \rightarrow q_0$, $p \rightarrow 0$. Принци-

пиально, что именно при $p = 0$ происходит вырождение уравнения пограничного слоя и связанное с этим явление локализации касательных напряжений в дилатантных жидкостях.

Необходимо убедиться в возможности непрерывного перехода к решению $p \equiv 0$ в точке пересечения интегральной кривой с осью q . Для этого исследуем уравнение (5.22) на наличие особого решения. Условием существования особого решения является нарушение условия единственности при обращении в бесконечность производной $\frac{dR}{dp}$, где буквой R обозначена правая часть уравнения (5.22). Дифференцируя, получаем

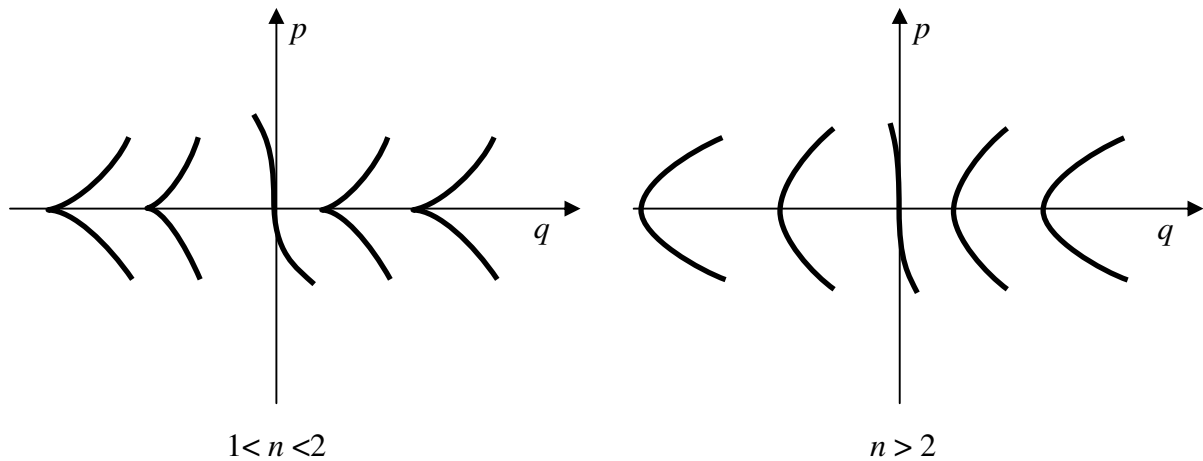


Рис.5.2. Вид интегральных кривых вблизи оси q при различных значениях показателя $n > 1$.

$$\frac{dR}{dp} = (2n-1) \frac{[(2-n)p^{1-n} \operatorname{sgn}(p) + 3q][(n+1)q^2 - (2n-1)p] + [(2n-1)p^{2-n} \operatorname{sgn}(p) + 3q]}{[(n+1)q^2 - (2n-1)p]^2}.$$

Откуда видно, что для всех $n > 1$ $\frac{dR}{dp} = \infty$ при $p = 0$. Функция $p \equiv 0$ является решением уравнения (5.22), если $1 < n < 2$. Поэтому решение $p \equiv 0$ является особым для уравнения (5.22) лишь в интервале $1 < n < 2$. Несмотря на это, $p \equiv 0$ является алгебраическим корнем уравнения (5.17), что необходимо учитывать.

Подводя итог, следует заключить, что для всех $n > 1$ уравнение (5.17) имеет особое решение $p \equiv 0$ и интегральная кривая уравнения (5.22), пересекающая ось q , может быть продолжена этим особым решением в точке пересечения $q = q_0$. Если предположить, что постоянные c_1 и c_2 в представлении для особого решения (5.21) известны, то из определения инварианта q (5.16) можно определить соответствующее значение автомодельной переменной

$$\xi_0 = \frac{c_1^{\frac{n-2}{n+1}}}{q_0^{\frac{2n-1}{n+1}}} - \frac{c_2}{c_1}$$

и поверхность локализации касательных напряжений в пограничном слое

$$y_0(x) = \xi_0 \left[\frac{n(n+1)}{Re_x} \right]^{\frac{1}{n+1}} x.$$

Качественный характер интегральных кривых уравнения (5.22) на любом конечном удалении от начала координат $p = q = 0$ может быть исследован методом изоклин с учетом найденного характера особых точек. Результат такого исследования представлен на рис.5.3.

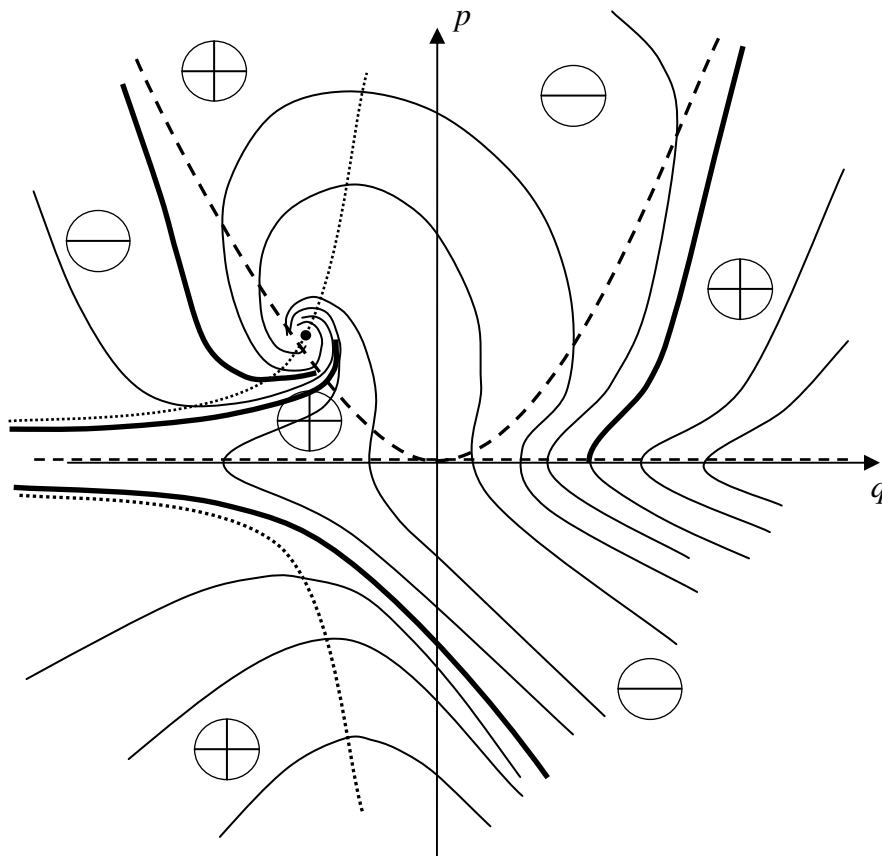


Рис.5.3. Качественный характер интегральных кривых ($n > 2$).

На рис. 5.3 проведены линии, на которых производная $\frac{dp}{dq} = 0$ (пунктирные линии) и $\left| \frac{dp}{dq} \right| = \infty$ (штриховые линии) и указан знак производной $\frac{dp}{dq}$ в соответствующих частях плоскости (p, q) . Тонкой сплошной линией указан качественный вид интегральных кривых, а толстой – сепаратрис семейств интегральных кривых.

Существование двух сепаратрис семейств интегральных кривых при $q \rightarrow -\infty, p \rightarrow 0$ следует непосредственно из рис. 5.3. При этих условиях уравнение (5.22) асимптотически эквивалентно уравнению

$$\frac{dp}{dq} = \frac{p}{q^2} \cdot \frac{(2n-1)|p|^{1-n} + 3q}{n+1}. \quad (5.24)$$

Соответствующее асимптотическое представление для сепаратрис имеет вид

$$p = a(-q)^\gamma, \quad \gamma = \frac{1}{1-n} < 0, \quad |a| = \frac{2}{n-1}$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Для доказательства существования двух других сепаратрис при $p \rightarrow \infty$ удобно перейти к новым переменным

$$(p, q) \rightarrow (t, z); \text{ где } z = p^{-1}, \quad t = q|p|^{-\frac{1}{2}}.$$

Вычислим предварительно дифференциалы

$$dp = -z^{-2}dz, \quad dq = |z|^{-1/2} dt - \frac{1}{2}|z|^{-3/2} \operatorname{sgn}(z) \cdot t dz$$

и производную $\frac{dp}{dq}$ в новых переменных

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{1}{|z|^{3/2}} \left(\frac{1}{\frac{dt}{dz} - \frac{t}{2z}} \right).$$

Уравнение (5.22) в этих новых переменных преобразуется к виду

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2z}{2n-1} \left(\frac{(2n-1)|z|^{\frac{2n-1}{2}} + 3t}{2\operatorname{sgn}(z) - t^2 + t|z|^{\frac{2n-1}{2}}} \right) \quad (5.25)$$

Для уравнения (5.25) также эффективен метод изоклин. На рис. 5.4, аналогично рис. 5.3, представлен качественный анализ интегральных кривых для уравнения (5.25).

Как видно на рис. 5.4, существуют лишь две интегральные кривые, являющиеся сепаратрисами семейств интегральных кривых и входящие в точку на прямой $z = 0$ при $|t| = 2$.

Других интегральных кривых, пересекающих ось $z = 0, |t| < \infty$ не существует.

Соответствующие асимптотические представления вблизи бесконечно удаленной точки для этих сепаратрис в переменных (p, q) получим из равенства

$$\pm 2 = q|p|^{-\frac{1}{2}},$$

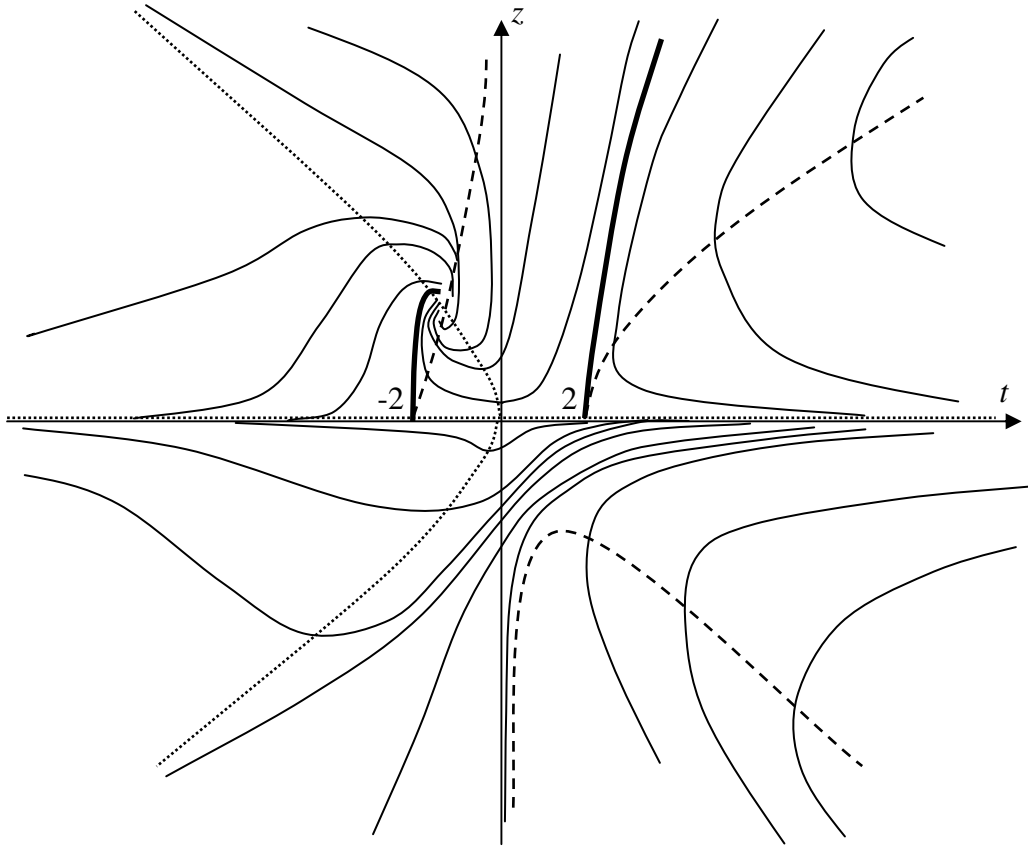


Рис. 5.4. Интегральные кривые в переменных t, z .

или, с учетом того, что в данном случае $p > 0$: $p = \frac{q^2}{2}$.

Для исследования характера интегральных кривых вблизи бесконечно удаленной точки, не примыкающих к оси $p = 0$ и не лежащих между найденными выше сепаратрисами, будем считать, что выполнены сильные неравенства

$$q \gg \frac{p^2}{4} \text{ и } 3q \gg (2n-1)|p|^{1-n}.$$

В этом случае уравнение (5.22) асимптотически эквивалентно уравнению

$$\frac{dp}{dq} = \frac{3}{n+1} \frac{p}{q}. \quad (5.26)$$

Уравнение (5.26) позволяет определить асимптотический характер указанных интегральных кривых $p = a \cdot |q|^\gamma$, $\gamma = \frac{3}{n+1}$ с произвольной постоянной a , $|a| < \infty$. Для дальнейшего следует отметить, что показатель $\gamma > 1$ при $1 < n < 2$ и $\gamma < 1$ при $n > 2$. Именно этот факт определяет поведение интегральных кривых в проекции на круг (см. ниже рис. 5.5).

Таким образом завершается исследование рассматриваемого класса возможных течений дилатантной жидкости. Обсуждение конкретных решений выходит за рамки курса, хотя и представляет интерес для теории нелинейного пограничного слоя. В заключение на рис. 5.5

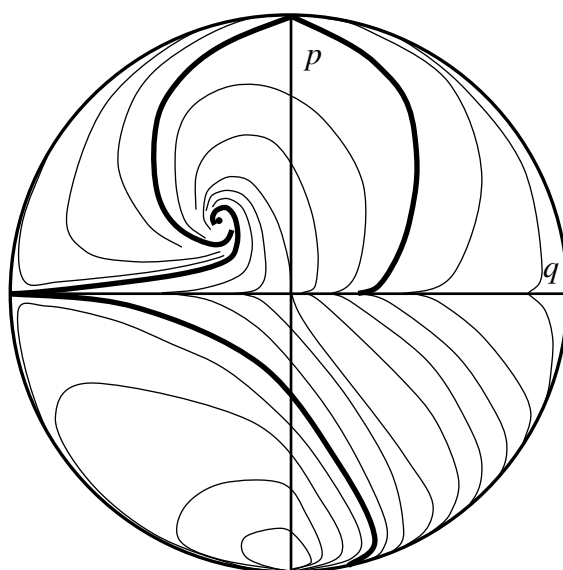
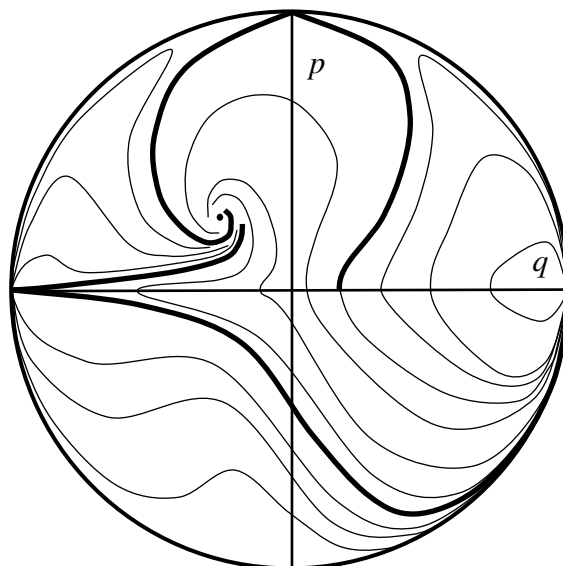

 $1 < n < 2$

 $n > 2$

Рис.5.5. Интегральные кривые в проекции на круг.

приведен качественный характер интегральных кривых в проекции на круг (проекция нижней полусферы Пуанкаре на плоскость переменных (p, q)). Как видно, характер интегральных кривых в разных диапазонах изменения индекса течения n различен в проекциях на круг, в силу указанных особенностей асимптотического поведения интегральных кривых в соответствии с уравнением (5.26).

Список рекомендуемой литературы.

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. - В 10-и т. Т. VI. Гидродинамика. 3-е изд. М.: Наука, 1986. - 736 с..
2. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. – 440 с.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. – 712 с.
4. Шульман З.П. Конвективный тепломассоперенос реологически сложных жидкостей. М.: Энергия, 1975. – 351 с.