

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

ИДЕАЛЬНАЯ И ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТИ

Под редакцией *А.М. Макарова*

*Рекомендовано редсоветом МГТУ им. Н.Э. Баумана
в качестве учебного пособия по курсу
«Нелинейные процессы переноса»*

Москва

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

2008

УДК 532.135:532.5(075.8)

ББК 22.253:22.365

И292

Рецензенты: *А.В. Колесников, П.И. Пластинин*

Идеальная и вязкая жидкости: Учеб. пособие / А.С. Романов, А.В. Семиколонов, С.Н. Тараненко, А.П. Шахорин. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. — 64 с.: ил.

В учебном пособии представлены основы феноменологического описания процессов переноса импульса и энергии в жидких средах, проявляющих нелинейные механические и физико-химические свойства.

Для студентов старших курсов, обучающихся по специальности «Техническая физика» и изучающих курс «Нелинейные процессы переноса».

УДК 532.135:532.5(075.8)

ББК 22.253:22.365

© Романов А.С., Семиколонов А.В.,
Тараненко С.Н., Шахорин А.П., 2008
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008

ВВЕДЕНИЕ

Развитие современных технологий требует анализа процессов переноса различных физических величин (массы, энергии, импульса, момента импульса, электрического заряда и т. п.), происходящих в значительном интервале изменения потенциалов переноса. Коэффициенты переноса при этом не являются постоянными, а существенно зависят от потенциалов переноса, их градиентов и других величин, определяющих физическое и физико-химическое состояние вещества и интенсивность процессов переноса.

Например, при увеличении ионной температуры воздушной плазмы нормальной плотности от $5 \cdot 10^5$ до $5 \cdot 10^6$ К, т. е. в 10 раз, средняя длина пробега излучения увеличивается приблизительно в 100 раз. Соответственно коэффициент лучистой теплопроводности увеличивается в 10^5 раз.

Другой наглядный пример — изменение вязкости суспензии бентонитовой глины, применяемой в нефтедобыче. При незначительном увеличении скорости деформации, сопровождающемся разрушением надмолекулярной структуры, ее вязкость увеличивается почти в 10^9 раз.

Примеры, подобные рассмотренным, можно продолжить, и все они показывают, что усреднение физических и физико-химических свойств вещества не является эффективным средством анализа процессов переноса. Факт зависимости коэффициентов переноса от потенциалов переноса и других величин, характеризующих интенсивность переноса, приводит к понятию *нелинейной среды* — физической системы, свойства которой зависят от ее состояния.

Исследование нелинейных и высокоинтенсивных процессов переноса приводит к выявлению широкого круга феноменов, вообще не имеющих места в линейной среде. Среди них — пространственная локализация, временная ограниченность, фронтовой характер переноса и многое другое. Указанные эффекты, так или иначе, могут иметь место вне зависимости от конкретной природы рассматриваемой нелинейной физической системы. То есть эти явления реализуются, например, и при переносе импульса, и при переносе энергии, и при диффузии, и при лучистом теплопереносе. Причиной этому является фундаментальность законов сохранения соответствующих физических величин — массы, энергии, импульса, момента импульса, числа час-

тиц, электрического заряда, энергии электромагнитного излучения и т. п.

Целью предлагаемого пособия является наглядный физически обоснованный вывод известных соотношений, описывающих движение идеальной, ньютоновской вязкой и неньютоновской нелинейно-вязкой жидкостей.

Для нелинейно-вязкой жидкости дана классификация ее нелинейных свойств. В частности, представлены модели Оствальда — де Вилия и Шведова — Бингама, сыгравшие заметную роль в развитии теории течения нелинейно-вязких жидкостей. Основные особенности течения этих жидкостей рассмотрены на примере течения Пуазейля.

Рассмотрена задача о тепловом взрыве в теплопроводящей неподвижной среде, также демонстрирующая нетривиальную роль нелинейности.

Исходя из фундаментальных законов сохранения приведены выводы известных уравнений для идеальной и вязкой жидкостей, дана классификация нелинейно-вязких сред. Рассмотрено несколько примеров, иллюстрирующих проявление нелинейных свойств.

Для освоения данного курса необходимо знание основ тензорного исчисления и теории уравнений математической физики.

1. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

1.1. Сплошные среды

Все тела состоят из отдельных частиц, но в любом даже физически малом объеме их очень много, поэтому макроскопические тела часто можно рассматривать как материальную среду, сплошь заполняющую пространство. С математической точки зрения сплошная среда представляется как непрерывный континуум, заполняющий некоторую часть пространства. Любая точка этой части пространства соответствует некоторой точке среды.

Сплошной средой можно считать не только вещество, но и электромагнитное поле, очевидно, заполняющее все пространство. Такая идеализация позволяет применить для исследования движения реальных тел и полей аппарат непрерывных функций, дифференциальное и интегральное исчисление.

Для описания движения сплошной среды используют макроскопические термодинамические переменные, например, давление p , плотность ρ , температуру T . Тем самым предполагается наличие, по крайней мере, локального термодинамического равновесия. В этом случае движение возникает как следствие изменения термодинамических переменных от точки к точке.

Развиваемый подход имеет свои ограничения там, где локальное равновесие отсутствует, например, вблизи испаряющейся поверхности жидкости, в узких капиллярах при адсорбции, вблизи фронта ударной волны и т. п., т. е. когда характерные параметры физических и физико-химических процессов не позволяют считать эти процессы локально равновесными.

При наличии локального термодинамического равновесия возможно установить необходимые соотношения непосредственно между термодинамическими переменными, оставляя за рамками анализа соответствующее молекулярно-кинетическое обоснование. Например, для вектора плотности потока теплоты в неподвижной теплопроводной среде постулируется закон Фурье

$$\vec{q} \sim \text{grad} T,$$

или

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad} T,$$

где $\lambda > 0$ — коэффициент теплопроводности, определяемый экспериментально.

Такой подход к описанию движения, когда в основу теории закладывается представление о макроскопическом явлении как таковом, называют *феноменологическим*.

1.2. Описание движения сплошной среды

Движение в механике всегда определяется по отношению к какой-либо системе отсчета, состоящей из тела — некоторого объекта, считающегося неподвижным, и системы координат, снабженной часами. Простейшей и наиболее часто используемой является декартова прямоугольная система координат. Время в классической механике считается абсолютным. С помощью системы координат устанавливается соответствие между положением точки в пространстве и тремя ее координатами (рис. 1.1):

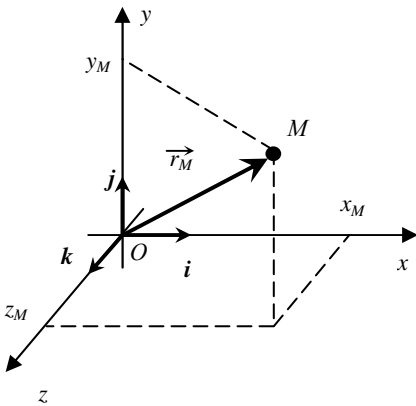


Рис. 1.1. Соответствие между точками пространства и тройками чисел — их координатами

$$\vec{r}_M = \{x_M, y_M, z_M\}.$$

Поскольку в дальнейшем изложении мы будем пользоваться декартовой прямоугольной системой координат, для описания векторов или тензоров будут взяты только нижние индексы, пробегающие значения $i = 1, 2, 3$, и правило суммирования по повторяющемуся индексу, например:

$$\tau_{ii} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = \tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz},$$

$$\vec{r} = \{x_i\} = \{x, y, z\}, \quad \vec{u} = \{u_i\} = \{u_x, u_y, u_z\},$$

$$(u_i \nabla_i) = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$$

и т. д.

Выделяют две точки зрения на описание движения сплошной среды: Лагранжа и Эйлера.

По Лагранжу, выделяется точка сплошной среды, т. е. рассматриваются координаты ее начального положения $\{a, b, c\}$ при $t = 0$. Тогда в любой последующий момент времени ее координаты описываются так:

$$\begin{cases} x = x(a, b, c, t), \\ y = y(a, b, c, t), \\ z = z(a, b, c, t). \end{cases}$$

Нахождение функций

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t)$$

является основной задачей механики. Переменные a, b, c, t носят название *переменных Лагранжа*.

По Эйлеру, наблюдаются характеристики движения среды в разные моменты времени в данной точке пространства, в которую приходят разные точки среды в разные моменты времени. Геометрические координаты x_i и время t носят название *переменных Эйлера*. Мы будем изучать законы движения среды в переменных Эйлера.

Оба подхода к описанию движения сплошной среды эквивалентны, если законы движения заданы достаточно гладкими функциями, имеющими необходимое число производных.

Пусть, в соответствии с подходом Эйлера, задано распределение скоростей точек среды в пространстве

$$u_i = u_i(x, y, z, t).$$

Тогда проекции скорости некоторой точки среды могут быть найдены из соотношений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u_x(x, y, z, t), \\ \frac{dy}{dt} = u_y(x, y, z, t), \\ \frac{dz}{dt} = u_z(x, y, z, t). \end{cases}$$

Если рассматривать эту систему как систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений, то, разрешая ее относительно x ,

y, z , мы получим координаты частиц среды как функций трех пространственных постоянных a, b, c и времени t . Считая, что a, b, c задают значения координат частиц при $t = 0$, приходим к искомым соотношениям, индивидуализирующим частицу, например:

$$T = T(x, y, z, t) \Rightarrow T = T(x(a, b, c, t), y(a, b, c, t), z(a, b, c, t), t).$$

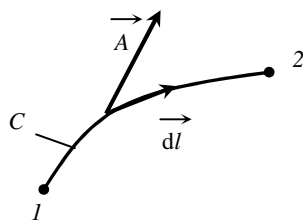
Для эффективной работы с законами сохранения, действующими в сплошной среде, и получения на их основании соответствующих математических соотношений используют известные теоремы математического анализа. Сформулируем их здесь без доказательств, с которыми можно ознакомиться по учебникам математического анализа. Особенно важно выяснить условия, налагаемые на дифференциальные свойства функций, рассматриваемых в этих теоремах. В случае нелинейности процессов переноса эти условия могут быть нарушены и, например, переход от интегральных уравнений сохранения к дифференциальным, строго говоря, станет невозможным.

Теорема Стокса. Эта теорема позволяет перейти от контурного интеграла к интегралу по поверхности. Пусть в некоторой области определено непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{A}(\vec{r})$. Рассмотрим интеграл вдоль некоторой кривой C в этой области (рис. 1.2):

$$\Gamma_C = \int_C (\vec{A}, d\vec{l}).$$

Для замкнутой кривой (контура)

$$\Gamma_C = \oint_C (\vec{A}, d\vec{l}).$$



Значение интеграла для замкнутой кривой называют *циркуляцией*.

Если для всех контуров $\oint_C (\vec{A}, d\vec{l}) = 0$,

то говорят, что векторное поле $\vec{A}$ — потенциальное, и для него можно определить потенциал, такой, что $\vec{A} = \text{grad} \phi_A$, при этом

Рис. 1.2. К определению интеграла от векторного поля $\vec{A}$ вдоль кривой C (1, 2 — начальная и конечная точки кривой; $d\vec{l}$ — касательный вектор к кривой C)

$$\Gamma_c = \int_1^2 (\vec{A}, d\vec{l}) = \Phi_{A2} - \Phi_{A1}.$$

Вне зависимости от потенциальности поля можно перейти от циркуляции к интегралу по поверхности. При интегрировании выбираем положительное направление: направление обхода при интегрировании по контуру и ориентация внешней нормали к поверхности должны быть согласованы в соответствии с правилом правого винта. Таким образом, по теореме Стокса, для любой поверхности S , границей которой является контур C , справедливо соотношение (рис. 1.3)

$$\oint_C (\vec{A}, d\vec{l}) = \iint_S (\text{rot} \vec{A}, \vec{n}) dS = \iint_S (\text{rot} \vec{A}, d\vec{S}),$$

где $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$ — вектор, имеющий направление $\vec{n}$ и модуль dS ,

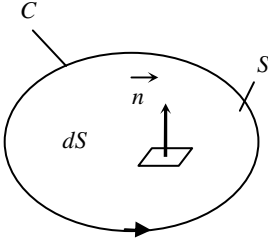


Рис. 1.3. Связь направления обхода по замкнутому контуру C и ориентации поверхности S , охваченной этим контуром ($\vec{n}$ — вектор единичной нормали к элементарной площадке dS , направление которого согласовано с направлением обхода по правилу правого винта)

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right), \\ \iint_S (\text{rot} \vec{A}, \vec{n}) dS &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{i}}) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{j}}) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{k}}) \right] dS. \end{aligned}$$

Векторное поле $\vec{B}$ называют *соленоидальным*, если имеет место условие

$$\text{div} \vec{B} = 0,$$

где

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x_i} B_i.$$

Непосредственной проверкой можно установить, что поле $\operatorname{rot} \vec{A}$ всегда является соленоидальным, т. е. что

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{A}) = 0.$$

Теорема Гаусса — Остроградского. Эта теорема позволяет переходить от интеграла по поверхности к интегралу по объему (рис. 1.4):

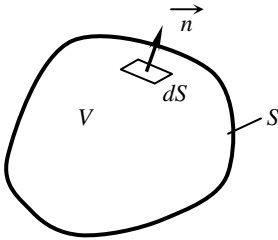


Рис. 1.4. Задание ориентации замкнутой поверхности S внешней единичной нормалью $\vec{n}$. Поверхность охватывает объем V

$$\oint_S (\vec{A}, d\vec{S}) = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dV,$$

или, в другой записи:

$$\oint_S \left[A_x \cos(\vec{n}, \vec{i}) + A_y \cos(\vec{n}, \vec{j}) + A_z \cos(\vec{n}, \vec{k}) \right] dS = \iiint_V \nabla_i A_i dV.$$

Используя теорему Гаусса — Остроградского, можно получить формулу дифференцирования по времени интеграла, взятого по подвижному объему. Пусть имеется произвольная функция пространственных переменных $f(x, y, z, t)$ (или векторное либо тензорное поле). Тогда

$$\frac{d}{dt} \iiint_V f(x, y, z, t) dV = \iiint_V \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f\vec{v}) \right] dV,$$

где

$$\operatorname{div}(f\vec{v}) = \nabla_i (f v_i) = \nabla_x (f v_x) + \nabla_y (f v_y) + \nabla_z (f v_z),$$

$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ — вектор скорости, с которой движутся точки объема.

1.3. Уравнение непрерывности сплошной среды

Все уравнения, которыми пользуются для описания физических процессов, происходящих в сплошной среде (или, как говорят, для описания переноса) могут быть интерпретированы как специфическая форма выражения законов сохранения. Действительно, несмотря на феноменологический подход, все используемые соотношения должны быть в определенной мере следствиями законов сохранения, среди которых выделяют законы сохранения:

- вещества;
- импульса;
- момента импульса;
- энергии.

Следует отметить, что перечисленными законами список не исчерпывается. Например, в определенных условиях можно применить закон сохранения энтропии или каких-либо других функций, зависящих от термодинамических потенциалов. Если анализируется совместное движение вещества и электромагнитного поля, то необходимо учесть специфические законы сохранения для электромагнитного поля.

Математическое выражение закона сохранения вещества для сплошной среды называют *уравнением непрерывности*.

Выделим в сплошной среде неподвижный объем V , ограниченный замкнутой поверхностью S . Если ρ — плотность среды, $\vec{v}$ — поле скоростей среды на границе объема, то изменение массы вещества в объеме может быть вызвано его притоком или (оттоком) через граничную поверхность S (рис. 1.5):

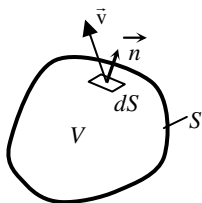


Рис. 1.5. Вывод уравнения непрерывности. Векторное поле скоростей условно показано одним вектором $\vec{v}$

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \oiint_S (\rho \vec{v}) d\vec{S}.$$

Вектор $\rho \vec{v} = \{\rho v_i\}$ называют *вектором плотности потока вещества*.

Из закона сохранения количества вещества следует, что если масса в объеме увеличивается, то вещество втекает в объем, и поэтому его поток через поверхность S отрицательный (так как поверхность ориентирована наружу^{*}). Применив теорему Гаусса-Остроградского к правой части равенства, получим

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV = 0,$$

или, в силу произвольности объема V , в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (1.1)$$

В другой записи

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i (\rho v_i) = 0,$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0.$$

Это же соотношение можно получить исходя из представлений Лагранжа.

Выделим некоторую часть частиц вещества, находящуюся в движущемся замкнутом объеме V (рис. 1.6). Тогда

$$\iiint_V \rho dV = \text{const}, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho dV \right) = 0.$$

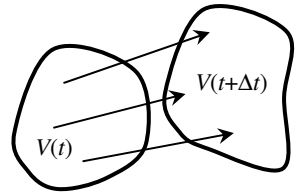


Рис. 1.6. Изменение формы некоторого замкнутого объема с течением времени

^{*} Это выражение означает, что вектор нормали к поверхности направлен наружу.

Используя формулу дифференцирования по времени интеграла по подвижному объему, получаем

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] dV = 0,$$

откуда, вследствие произвольности объема V , следует уравнение непрерывности в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

Для несжимаемой однородной жидкости $\rho = \text{const}$, тогда

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

т. е. векторное поле скоростей в несжимаемой жидкости является соленоидальным. В этом случае всегда можно найти векторное поле $\vec{A}$, такое, что

$$\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

1.4. Идеальная жидкость. Уравнение Эйлера

Уравнением Эйлера называют уравнение переноса импульса в идеальной жидкости. *Идеальная жидкость* — это жидкость, рассматриваемая в условиях, когда несущественны процессы вязкой диссипации и теплопереноса.

Запишем закон сохранения импульса для некоторого неподвижного объема V идеальной жидкости, ограниченного замкнутой поверхностью S . Рассматривая вещество как механическую систему, найдем импульс выделенного объема:

$$\iiint_V \rho \vec{v} dV.$$

Поток импульса внутрь объема жидкости в единицу времени, обусловленный давлением:

$$-\oint_S p d\vec{S}.$$

Надо также учесть поток импульса, вносимый втекающим веществом. Если

$$\rho(\vec{v}, d\vec{S})$$

— поток вещества через выделенную площадку dS , то

$$\rho v_i(\vec{v}, d\vec{S}) = \rho v_i(v_j n_j) dS$$

— плотность потока i -й компоненты импульса через ту же площадку.

Поток i -й компоненты через всю поверхность S по теореме Гаусса-Остроградского вычисляют как

$$\begin{aligned} \oint_S \rho v_i v_j n_j dS &= \iiint_V \nabla_j (\rho v_j v_i) dV \equiv \\ &\equiv \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x v_i) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y v_i) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z v_i) \right] dV. \end{aligned}$$

Из закона сохранения импульса следует:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho v_i dV + \iiint_V \nabla_j (\rho v_j v_i) dV = - \iiint_V \nabla_i p dV, \quad i = 1, 2, 3,$$

или в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \nabla_j (\rho v_j v_i) = -\nabla_i p,$$

или

$$v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \nabla_j (\rho v_j) + \rho v_j \nabla_j (v_i) = -\nabla_i p.$$

С учетом уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i (\rho v_i) = 0$$

получаем уравнение Эйлера

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \nabla_j (v_i) = -\nabla_i p, \quad (1.2)$$

или в векторной форме:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p.$$

В декартовых координатах уравнения Эйлера записывают так:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}$$

Величину

$$\Pi'_{ij} = \rho v_i v_j$$

называют *тензором плотности потока импульса*. Этот тензор симметричен по перестановке индексов, так как

$$\Pi'_{ij} = \rho v_i v_j = \rho v_j v_i = \Pi'_{ji}.$$

Если $\rho \vec{v} = (\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z)$ — импульс единицы объема и каждая из

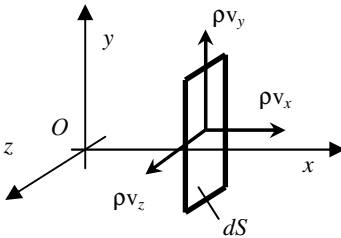


Рис. 1.7. Поток вещества через выделенную площадку dS

составляющих вектора плотности потока импульса ρv_i может переноситься вдоль любого из направлений (рис. 1.7), то $\rho v_i v_j$ — величина i -й проекции плотности потока импульса, переносимой вдоль направления j в единицу времени.

Известно, что след матрицы тензора (свертка тензора второго ранга) — инвариантная величина, не зависящая от системы координат. В дан-

ном случае след тензора равен удвоенной кинетической энергии единичного объема жидкости:

$$\Pi'_{ii} = \rho v_i v_i = \rho v_x v_x + \rho v_y v_y + \rho v_z v_z = 2 \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) = 2E_{\text{кин}} \dots$$

Если жидкость находится в поле внешних сил, то плотность внешней силы можно включить в уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{1}{\rho} \vec{f},$$

где $\vec{f}$ — сила, действующая на единичный объем вещества. Например, для силы тяжести

$$\vec{f} = \rho \vec{g},$$

где $\vec{g}$ — вектор ускорения свободного падения.

Дифференциальный оператор

$$\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

часто называют *субстанциональной производной*, так как эта производная (по времени) учитывает перемещение вещества.

1.5. Плоские течения несжимаемой (капельной) идеальной жидкости

Для несжимаемой (часто называемой капельной) жидкости $\rho = \text{const}$, тогда из уравнения непрерывности следует:

$$\text{div}(\vec{v}) = 0,$$

т. е. поле скоростей является соленоидальным:

$$\vec{v} = \text{rot} \vec{A}.$$

Рассмотрим случай, когда движение является плоским, т. е. когда скорость зависит от двух пространственных координат $\vec{v}(x, y, t)$. В этом случае вектор $\vec{A}$ имеет только одну нетривиальную координату

$$\vec{A} = (0, 0, \Psi).$$

При этом функцию $\Psi(x, y, t)$ принято называть *функцией тока*. В терминах функции тока уравнение непрерывности выполняется «автоматически»:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \operatorname{div} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \Psi \end{pmatrix} = \operatorname{div} \left(\vec{i} \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \vec{j} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0.$$

Параллельно получаем выражения для компонент вектора скорости:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

$$v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Соответственно переписываем уравнение Эйлера для этих компонент скорости:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.3)$$

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (1.4)$$

Продифференцируем (1.3) по x , а (1.4) — по y , затем вычтем из первого уравнения второе и получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta \Psi) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial(\Delta \Psi)}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial(\Delta \Psi)}{\partial y} = 0. \quad (1.4')$$

Таким образом, функция тока должна быть определена из нелинейного уравнения, что представляет значительные математические трудности.

Физический смысл функции тока прояснится, если рассмотреть стационарное движение жидкости, при котором функция тока не зависит от времени: $\Psi(x, y)$. Так как скалярное произведение

$$(\vec{v}, \text{grad}\Psi) = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{\partial\Psi}{\partial y} = 0,$$

вектор скорости совпадает по направлению с касательной к «линии тока», т. е. к линии, на которой $\Psi(x, y) = \text{const}$. Получается, что на самом деле частицы вещества движутся вдоль линии тока.

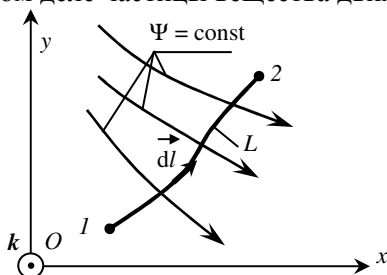


Рис. 1.8. Определение объемного расхода вещества через кривую L (1 — начальная точка, 2 — конечная точка; $\vec{k}$ — орт, перпендикулярный к плоскости рисунка; линии тока определяются соотношением $\Psi = \text{const}$)

Теперь рассмотрим объемный расход вещества через некоторую «кривую L » (через криволинейную площадку единичной ширины, образованную касательным вектором к кривой $1-2$ $d\vec{l} = (dx, dy, 0)$ и ортом $\vec{k}$, перпендикулярным к плоскости (рис. 1.8)):

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{v}, d\vec{S}) &= \iint_S (\vec{v}, [d\vec{l} \times \vec{k}]) = \iint_S (\vec{k}, [\vec{v} \times d\vec{l}]) = \\ &= |\vec{k}| \int_L (v_x dy - v_y dx) = \int_L \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx \right) = \Psi_2 - \Psi_1. \end{aligned}$$

То есть разность значений функций тока равна расходу жидкости через соответствующую поверхность.

В качестве примера применения функции тока рассмотрим стационарное обтекание прямого угла, образованного твердыми поверхностями (рис. 1.9). Уравнение (1.4'), приобретающее в этом случае вид

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{\partial(\Delta\Psi)}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{\partial(\Delta\Psi)}{\partial y} = 0, \quad (1.4'')$$

должно быть решено с граничными условиями

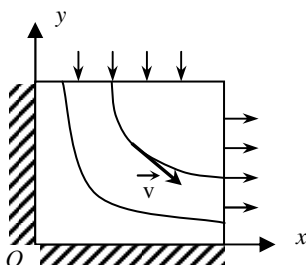


Рис. 1.9. Стационарное обтекание прямого угла, ограниченного твердыми поверхностями

$$\begin{cases} x=0, & v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \\ y=0, & v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

В силу симметрии движения по осям x и y функция тока зависит только от переменной η : $\Psi = \Psi(\eta)$, где $\eta = xy$. Подставив это выражение в уравнение (1.4''), получим

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} = 0,$$

откуда

$$\Psi = A\eta + B \equiv Axy + B,$$

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = Ax,$$

$$v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -Ay,$$

$$v = \sqrt{(Ax)^2 + (Ay)^2}.$$

1.6. Уравнение Бернулли

Ограничимся рассмотрением стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости в однородном поле силы тяжести. Уравнение Эйлера для этого случая выглядит так:

$$(\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}.$$

В индексной форме записи:

$$v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i.$$

Умножим это уравнение на v_i :

$$v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_i^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + v_i g_i.$$

Просуммируем по i и заменим «немой» индекс j на i :

$$v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{p}{\rho} + v_i g_i .$$

Если ввести потенциал в однородном поле силы тяжести в виде

$$g_i = -\frac{\partial G}{\partial x_i}, \quad G = -g_i x_i ,$$

то последнее уравнение можно переписать как

$$v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh \right) = 0 ,$$

где h — высота над горизонтальной поверхностью, принятой за начало отсчета потенциала G ; g — ускорение свободного падения. Определим линию тока как геометрическое место точек, касательная к которому имеет направление вектора скорости. Соответствующее дифференциальное уравнение линии тока:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} .$$

Полученное уравнение означает, что вектор

$$\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh \right)$$

направлен перпендикулярно к линии тока, поэтому вдоль линии тока выполняется соотношение

$$\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh \right) = \text{const} , \quad (1.5)$$

носящее название *уравнения Бернулли*. В некоторых частных случаях это уравнение может быть обобщено на случай вязкой и сжимаемой жидкости, а также нестационарного движения. Уравнение Бернулли играет основополагающую роль в технической гидравлике.

1.7. Уравнение переноса энергии в идеальной жидкости

Рассмотрим неподвижный объем V , ограниченный замкнутой поверхностью S . Энергия единицы объема вещества

$$\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right),$$

где $\rho v^2 / 2$ — кинетическая энергия единицы объема; $\rho \epsilon$ — внутренняя энергия единицы объема. Например, для идеального газа

$$\epsilon = c_v T,$$

где c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Скорость изменения энергии в неподвижном объеме

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right) dV.$$

По закону сохранения энергии, если внутри объема источники энергии отсутствуют, то скорость изменения энергии равна сумме энергии, вносимой в объем веществом извне, и мощности внешних сил.

Поток энергии в объем

$$-\oint_S \left(\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right) \vec{v}, d\vec{S} \right),$$

мощность сил давления

$$-\oint_S (p \vec{v}, d\vec{S}).$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right) dV + \oint_S \left(\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon + p \right) \vec{v}, d\vec{S} \right) = 0, \quad (1.6)$$

или в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) + \operatorname{div} \left(\rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right) = 0, \quad (1.7)$$

где $w = \varepsilon + p/\rho$ — тепловая функция единицы массы вещества. В координатной форме уравнение (1.7) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v_x \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho v_y \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho v_z \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right) = 0.$$

Перепишем (1.7) как

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon \right) + \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \operatorname{div} (\rho \vec{v}) + \left(\rho \vec{v}, \operatorname{grad} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right) = 0. \quad (1.8)$$

С учетом уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0$$

уравнение (1.8) примет вид

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon \right) + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} (\rho \vec{v}) + \left(\rho \vec{v}, \operatorname{grad} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right) = 0. \quad (1.9)$$

Для несжимаемой жидкости

$$\operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0,$$

поэтому уравнение (1.9) в этом случае переписываем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon \right) + \left(\vec{v}, \operatorname{grad} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right) = 0, \quad (1.10)$$

или в координатной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon\right)+v_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)+v_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)+v_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)=0.$$

2. ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ

2.1. Движение жидкой частицы

В отличие, например, от твердого тела, степень деформации жидкости может быть очень сильной (фактически бесконечной). Поэтому в случае твердого тела говорят о конечных деформациях, а в случае жидкости — о бесконечных. Естественно возникает вопрос о способе описания деформации жидкой частицы. Рассмотрим движение малой частицы жидкости, имеющей первоначальную форму параллелепипеда, с ребрами, параллельными осям декартовой системы координат (рис. 2.1).

Пусть скорость жидкости в точке a : $\vec{v}_a = (v_x, v_y, v_z)$. Тогда координаты вектора скорости в точке b :

$$\vec{v}_b = \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy, \quad v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy, \quad v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy \right),$$

в точке d :

$$\vec{v}_d = \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx, \quad v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx, \quad v_z + \frac{\partial v_z}{\partial x} dx \right),$$

в точке e :

$$\vec{v}_e = \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz, \quad v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz, \quad v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right).$$

Рассмотрим малую деформацию грани $abcd$, параллельной плоскости xy , произошедшую за время dt (рис. 2.2):

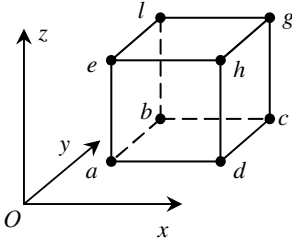


Рис. 2.1. Малая частица жидкости, первоначально имеющая форму параллелепипеда, с ребрами, параллельными осям декартовой системы координат

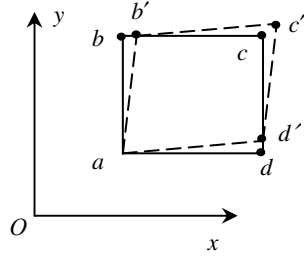


Рис. 2.2. Малая угловая деформация грани $abcd$, параллельной плоскости xy

$$bb' = \frac{\partial v_x}{\partial y} dy dt,$$

$$dd' = \frac{\partial v_y}{\partial x} dx dt.$$

Относительное смещение, или угловая деформация,

$$\frac{bb'}{ab} = \frac{\partial v_x}{\partial y} dt,$$

$$\frac{dd'}{ad} = \frac{\partial v_y}{\partial x} dt.$$

Полное изменение угла в вершине a за малый промежуток времени dt :

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dt,$$

а скорость соответствующей угловой деформации грани, перпендикулярной оси z ,

$$\gamma_z = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

Аналогично для остальных граней имеем

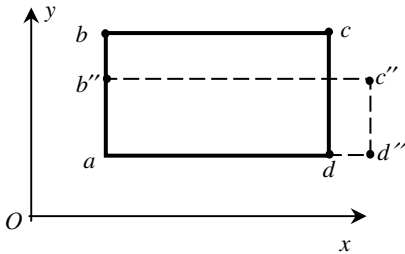


Рис. 2.3. Малая линейная деформация грани $abcd$, параллельной плоскости xy

$$\gamma_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z},$$

$$\gamma_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}.$$

Таким образом, величинами γ_x , γ_y , γ_z определяются скорости угловых деформаций жидкой частицы.

Вычислим скорости линейных деформаций (рис. 2.3). Для стороны, параллельной оси x ,

$$dd'' = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt.$$

Относительное удлинение

$$\frac{dd''}{ad} = \frac{\partial v_x}{\partial x} dt.$$

Скорость относительного удлинения

$$\epsilon_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

Аналогично

$$\epsilon_y = \frac{\partial v_y}{\partial y},$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Тогда для скорости изменения объема (пренебрегая малыми величинами порядка выше первого) можно записать:

$$\frac{dV}{dt} = (\epsilon_x dx) dy dz + dx (\epsilon_y dy) dz + dx dy (\epsilon_z dz) = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) dx dy dz.$$

Относительное изменение объема

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div}(\vec{v}).$$

Объединяя вычисленные скорости угловых и линейных деформаций, определим тензор скоростей деформации в виде

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Этот тензор второго ранга симметричен по перестановке индексов. Его первый инвариант

$$I_1 = \gamma_{ii} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \operatorname{div}(\vec{v}) \quad (2.1)$$

определяет скорость объемной деформации в жидкости. При этом для несжимаемой жидкости

$$I_1 = 0.$$

Второй инвариант

$$I_2 = \gamma_{ij} \gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.2)$$

По нему находим интенсивность деформаций несжимаемой жидкости

$$A = \sqrt{2I_2} \geq 0.$$

Третий инвариант

$$I_3 = \det(\gamma_{ij}). \quad (2.3)$$

2.2. Силы, действующие в жидкости

Силы, действующие на выделенный объем жидкости, можно разделить на объемные и поверхностные. Объемные силы действуют на все материальные частицы, составляющие объем жидкости. К ним относятся силы тяжести, инерции, магнитные и электрические. Поверхностные силы действуют на поверхность, ограничивающую выделенный объем (например,

силы вязкого трения). Они возникают в результате воздействия окружающей среды на выделенный объем.

Поверхностные силы в зависимости от того, как они направлены по отношению к элементу поверхности, к которому они приложены, подразделяют на нормальные и на тангенциальные.

Для описания взаимодействия в данной точке объема или поверхности вводят понятие напряжения. Для объемных сил $\vec{F}$ определяют объемную плотность

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV},$$

где dV — элемент объема. Для поверхностных сил $\vec{R}$ определяют поверхностное напряжение

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{R}}{dS},$$

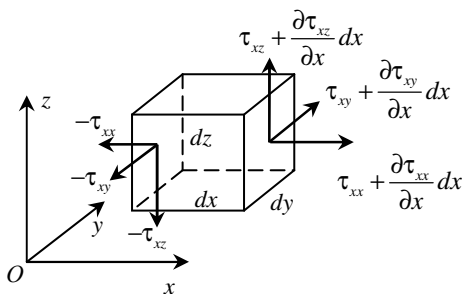


Рис. 2.4. Разложение по осям координат вектора напряжения силы, действующей на элемент объема в жидкости (показано только для двух противоположных граней)

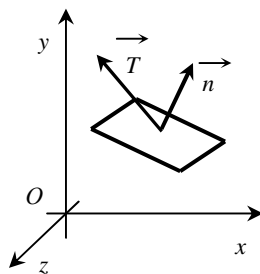


Рис. 2.5. Напряжение на произвольной выбранной площадке внутри жидкости

где dS — элемент поверхности.

Выделим элемент объема в жидкости, как указано на рис. 2.4, в виде параллелепипеда. На каждую из его граней действует поверхностная сила. Вектор напряжения этой силы можно записать в виде тензора τ_{ij} , где i — номер оси, перпендикулярной грани, к которой приложена сила; j — номер оси, на которую берется проекция вектора. Например, $\tau_{11} = \tau_{xx}$ — нормальное напряжение, приложенное к грани,

перпендикулярной оси x , в направлении оси x ; $\tau_{12} = \tau_{xy}$ — касательное напряжение к грани, перпендикулярной оси x , в направлении оси y . Заметим без доказательства, что из условия равновесия рассматриваемого объема следует равенство

$$\tau_{ij} = \tau_{ji},$$

т. е. матрица тензора напряжений является симметричной.

С помощью тензора напряжений можно найти составляющие напряжения на произвольной выбранной площадке внутри жидкости (рис. 2.5):

$$T_i = n_j \tau_{ij}, \quad (2.4)$$

где $\vec{n} = \{n_i\}$ — вектор единичной нормали к выбранной площадке. Например,

$$T_x = n_x \tau_{xx} + n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx}.$$

Таким образом, тензор напряжений полностью характеризует напряженное состояние жидкости в произвольной точке.

Первый инвариант тензора напряжений связывают с давлением

$$p = -\frac{1}{3} \tau_{ii},$$

и обычно рассматривают разложение тензора напряжений в виде

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau'_{ij}, \quad (2.5)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases}$$

— символ Кронекера. То есть разбивают тензор напряжений на девиатор τ'_{ij} , для которого $\tau'_{ii} = 0$, и шаровой тензор $-p \delta_{ij}$.

Составим уравнение динамики для указанного параллелепипеда (см. рис. 2.4). Для этого найдем равнодействующую всех сил, приложенных к параллелепипеду в направлении оси x .

Нормальные напряжения

$$\left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx - \tau_{xx} \right) dydz = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx dy dz.$$

Составляющие силы от тангенциальных напряжений, действующих на боковые грани:

$$\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy - \tau_{yx} \right) dx dz = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz,$$

$$\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz - \tau_{zx} \right) dx dy = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz.$$

Масса выделенного объема

$$M = \rho dx dy dz.$$

Записывая второй закон Ньютона в проекции на ось x , получаем

$$\rho \frac{Dv_x}{dt} = X + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right).$$

Аналогично по другим осям:

$$\rho \frac{Dv_y}{dt} = Y + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right),$$

$$\rho \frac{Dv_z}{dt} = Z + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right).$$

Здесь X, Y, Z — соответствующие составляющие напряжений объемной силы.

Символом D/dt обозначена субстанциональная производная:

$$\frac{D}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Возвращаясь к давлению, с учетом (2.5) в индексной форме можно записать

$$\rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + (v_j \nabla_j) v_i \right] = -\nabla_i p + \frac{\partial \tau'_{ji}}{\partial x_j} + f_i,$$

или

$$\rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + f_i.$$

Последнее уравнение может быть переписано в виде (см. вывод уравнения Эйлера в гл. 1)

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + f_i$$

или

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}[\rho v_i v_j + p \delta_{ji} - \tau'_{ji}] = f_i.$$

Тензор плотности потока импульса $\Pi'_{ji} = \rho v_j v_i$ в случае неидеальной жидкости может быть записан в более общем виде:

$$\Pi_{ji} = \Pi'_{ji} + p \delta_{ji} - \tau'_{ji},$$

так как перенос импульса происходит не только при переносе вещества, но и вследствие напряжений, возникающих при деформации в неидеальной жидкости.

С учетом тензора Π_{ji} уравнение переноса импульса переписывается в виде

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ij} = f_i.$$

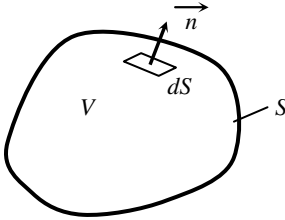


Рис. 2.6. Неподвижный объем V жидкости с ориентированной внешней поверхностью S

Используя понятие тензора плотности потока импульса Π_{ij} , последнее уравнение, безусловно, можно получить и как следствие закона сохранения импульса. Возьмем неподвижный объем V (рис. 2.6). Изменение импульса внутри этого объема связано с внесением импульса через поверхность S и действием объемных сил:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho v_i dV = - \oint_S \Pi_{ij} n_j dS + \iiint_V f_i dV,$$

откуда и следует искомое уравнение.

2.3. Ньютоновская вязкая жидкость

Для того чтобы получить уравнение динамики жидкости в замкнутом виде, необходимо связать скорость деформации в жидкости с напряжениями, которые при этом возникают. При феноменологическом подходе эта связь является обобщением известных экспериментальных данных и постулируется как некоторая гипотеза, подкрепляемая представлением о молекулярном строении жидкости.

Рассмотрим стационарное движение несжимаемой ($\rho = \text{const}$) жидкости между двумя параллельными неограниченными плоскостями, одна из которых неподвижна, а другая движется вдоль первой с постоянной скоростью (плоское течение Куэтта — рис. 2.7). Давление считается одинаковым и постоянным во всех точках жидкости.

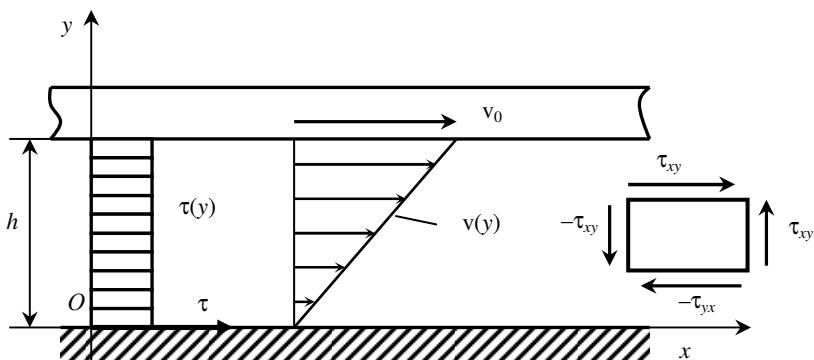


Рис. 2.7. Расчет плоского течения Куэтта. Представлены график напряжения τ и профиль скоростей $v(y)$ в зависимости от расстояния (толщины) y

Будем считать, что вектор скорости имеет координаты $\vec{v} = (v(y), 0, 0)$. Тогда единственными ненулевыми составляющими тензора напряжений являются

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \tau(y).$$

Уравнение переноса импульса в этом случае принимает вид

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z},$$

где вычеркнуты слагаемые, равные нулю. В результате останется только

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0.$$

Следовательно,

$$\tau_{yx} = \tau = \text{const}.$$

В то же время очевидно, что скорость должна линейно зависеть от координаты y :

$$v = \frac{v_0}{h} y,$$

где h — толщина слоя жидкости. Тогда единственными ненулевыми компонентами тензора деформаций будут:

$$\gamma_{yx} = \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v_0}{2h} = \text{const}.$$

Тем самым устанавливается пропорциональность:

$$\tau \sim \frac{\partial v}{\partial y} \text{ или } \tau = \eta \frac{\partial v}{\partial y},$$

где коэффициент η есть динамическая вязкость. В этом простейшем случае устанавливается пропорциональность тензора скоростей деформации и тензора напряжений. Этот факт носит название *гипотезы Ньютона*, а соответствующие жидкости называются *ньютоновскими*.

В качестве еще одного примера, подтверждающего разумность гипотезы Ньютона, рассмотрим модель плоского течения Пуазейля, в которой реализуется простое, хотя и неоднородное, напряженное состояние жидкости и результаты также представляются «очевидными».

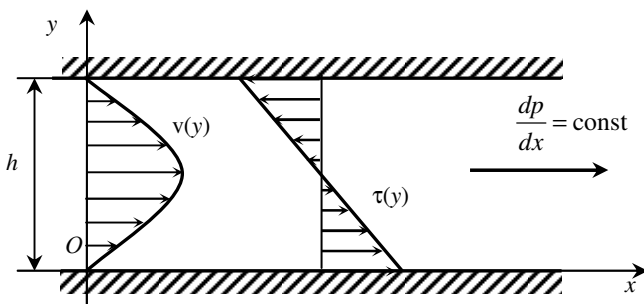


Рис. 2.8. Плоское течение Пуазейля. Представлены график напряжения τ и профиль скоростей $v(y)$ в зависимости от расстояния (толщины) y

Пусть жидкость течет между двумя неподвижными твердыми плоскостями под действием постоянного градиента давления (рис. 2.8). Такое движение называют *плоским течением Пуазейля*. Поскольку $dp/dx = \text{const} < 0$, то $p \sim x$. Поэтому можно записать

$$p = p_0 + \frac{dp}{dx} x.$$

Предположим, что $\vec{v} = (v(y), 0, 0)$. Тогда из уравнения движения (переноса импульса) получаем

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\tau_{yx}}{dy} = \text{const}.$$

Следовательно,

$$\tau_{yx} = \tau(y) = \frac{dp}{dx} y + C, \quad C = \text{const}.$$

В силу симметрии в центре течения $\tau|_{y=\frac{h}{2}} = 0$, следовательно,

$$C = -\frac{dp}{dx} \frac{h}{2},$$

$$\tau(y) = \left| \frac{dp}{dx} \right| \left(\frac{h}{2} - y \right).$$

Для вычисления скорости жидкости воспользуемся гипотезой Ньютона: $\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial y}$. Получим

$$v(y) = \frac{1}{\eta} \int_0^y \left| \frac{dp}{dx} \right| \left(\frac{h}{2} - t \right) dt = \frac{1}{\eta} \left| \frac{dp}{dx} \right| \left(\frac{hy - y^2}{2} \right) = \frac{1}{2\eta} \left| \frac{dp}{dx} \right| y(h - y).$$

В качестве граничного условия здесь использованы условия «прилипания» жидкости к твердой стенке: $v = 0$ при $y = 0$, $y = h$.

В рассмотренных простейших случаях вполне применима гипотеза Ньютона. Более того, для несжимаемой жидкости гипотеза Ньютона обобщается на случай деформации жидкости, характеризующийся пропорциональностью между тензорами напряжений и скоростей деформации:

$$\begin{aligned} \tau'_{ij} &= 2\eta\gamma_{ij}, \\ \tau'_{ij} &= \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Здесь давление исключено из рассмотрения в силу его природы, не связанной с угловой деформацией. Из (2.5) следует

$$\tau'_{ij} = \tau_{ij} + p\delta_{ij}.$$

Распространяя гипотезу Ньютона на сжимаемую жидкость ($\rho \neq \text{const}$ и $\text{div}(\vec{v}) \neq 0$), следует иметь в виду, что существенную роль в модели могут сыграть линейные относительные деформации ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , приводящие к объемным деформациям. В этом случае должны возникать дополнительные нормальные напряжения.

Подробный анализ картины напряжений и деформаций, выполненный как в гидродинамике, так и в кинетической теории газов, позволил установить связь между дополнительными нормальными напряжениями и относительной скоростью изменения объема:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \text{div}(\vec{v}).$$

Соответственно для напряжений можно записать:

$$\tau'_{ij} = 2\eta \left(\gamma_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \operatorname{div}(\vec{v}) \right).$$

Кроме того, в отсутствие термодинамического равновесия в сжимаемой жидкости обычные термодинамические соотношения (например, уравнение состояния $p = p(\epsilon, \rho)$) следует дополнить зависимостями не только от термодинамических величин, но и от их производных. Так, для давления Л.Д. Ландау ввел понятие *второй вязкости*:

$$p' = p - \mu \operatorname{div}(\vec{v}),$$

где μ — коэффициент второй вязкости. В этом приближении считается, что давление зависит не только от состояния жидкой частицы, определяемого ее термодинамическими параметрами, но и от скорости ее объемной деформации. Соответственно общий вид зависимости тензора напряжений от скорости деформаций жидкой частицы записывают в виде

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta \left(\gamma_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \operatorname{div}(\vec{v}) \right) + \mu \delta_{ij} \operatorname{div}(\vec{v}).$$

Тогда уравнение переноса импульса будет выглядеть так:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right).$$

Коэффициенты динамической вязкости η и второй вязкости μ являются функциями состояния жидкой частицы, поэтому меняются от точки к точке и не могут быть вынесены за знак производных. При этом изменения η и μ часто бывают незначительными. В этом случае уравнение переноса импульса можно переписать в векторном виде:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\operatorname{grad}(p) + \eta \Delta \vec{v} + \left(\mu + \frac{\eta}{3} \right) \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{v})). \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) носит название *уравнения Навье — Стокса*. Оно упрощается, если жидкость несжимаемая:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(p) + \nu \Delta \vec{v}, \quad (2.7)$$

где $\nu = \eta / \rho$ — коэффициент кинематической вязкости (или просто кинематическая вязкость — см. таблицу).

Таблица

Значения вязкости некоторых веществ

Вещество при температуре $t = 20^\circ \text{C}$	Динамическая вязкость η , Па·с	Кинематическая вязкость ν , $\text{м}^2/\text{с}$
Вода	10^{-3}	10^{-6}
Воздух	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$
Спирт	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-6}$
Глицерин	0,85	$6,8 \cdot 10^{-4}$
Ртуть	$1,56 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$

2.4. Функция тока в несжимаемой вязкой жидкости

Уравнение непрерывности имеет одинаковый вид для идеальной и вязкой жидкостей. Если жидкость несжимаемая, то в обоих случаях $\text{div}(\vec{v}) = 0$, т. е. поле скоростей ее точек является соленоидальным, поэтому можно записать:

$$\vec{v} = \text{rot} \vec{A}.$$

Для плоского течения жидкости вектор скорости имеет вид

$$\vec{v} = (v_x(x, y, t), v_y(x, y, t), 0),$$

и введение функции тока $\Psi(x, y, t)$, такой, что

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

$$v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

позволяет получить одно скалярное уравнение. Уравнение Навье — Стокса (2.7) в проекциях на оси координат в терминах функции тока приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} \right), \quad (2.8)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(-\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} \right). \quad (2.9)$$

Продифференцируем (2.8) по y , а (2.9) по x частным образом, затем вычтем из первого уравнения второе и получим искомое уравнение относительно функции тока:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} - \nu \Delta \Delta \Psi = 0, \quad (2.10)$$

которое является уравнением четвертого порядка по x и y .

2.5. Граничные условия

Для вязкой жидкости, если область ее движения ограничивается твердыми поверхностями, выполняется условие равенства скоростей жидкости и твердой поверхности. Если это «очевидно» для нормальной составляющей скорости, то в отношении касательной составляющей к твердой поверхности является выражением гипотезы о «прилипании» жидкости к твердой поверхности. В настоящее время считается, что «прилипание» присутствует практически всегда, если жидкость обладает вязкостью. Это вызвано схожей физической природой вязкости в жидкости и «прилипания».

Если Γ — твердая поверхность, скорость $\vec{u}$ которой известна, то

$$\vec{v}|_{\Gamma} = \vec{u}. \quad (2.11)$$

Сила, действующая на единицу поверхности, может быть найдена по формуле

$$T_i = -n_j \tau_{ji}$$

(см. подразд. 2.2), где n_j — нормаль к твердой поверхности. Или, выделяя давление, можно записать:

$$T_i = p n_i - n_j \tau'_{ji}, \quad (2.12)$$

где pn_i — компоненты силы, связанные с давлением; $n_j\tau'_{ji}$ — компоненты силы, связанные с касательными напряжениями.

На границе раздела двух вязких несмешивающихся жидкостей в силу отсутствия протекания жидкости через границу раздела необходимо выполнение условия равенства скоростей. Пусть Γ — граница раздела (рис. 2.9), тогда

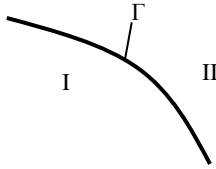


Рис. 2.9. граница раздела (Γ) двух вязких несмешивающихся жидкостей (I, II)

$$\vec{v}^{(I)} \Big|_{\Gamma} = \vec{v}^{(II)} \Big|_{\Gamma}. \quad (2.13)$$

Кроме того, должны быть равны силы, с которыми эти жидкости действуют друг на друга

$$n_j^{(I)}\tau_{ji}^{(I)} + n_j^{(II)}\tau_{ji}^{(II)} = 0. \quad (2.14)$$

Но, поскольку $n_j^{(I)} = -n_j^{(II)}$, то

$$n_j\tau_{ji}^{(I)} = n_j\tau_{ji}^{(II)}.$$

На свободной поверхности жидкости соответственно должно выполняться условие отсутствия напряжений:

$$n_j\tau_{ji} = n_j\tau'_{ji} - n_i p = 0.$$

Следует отметить, что при наличии поверхностного натяжения либо поверхностно-активных веществ динамические условия на границе раздела жидкостей и на свободной поверхности должны быть записаны с учетом соответствующих эффектов.

На свободной поверхности должно также выполняться некоторое кинематическое условие, смысл которого состоит в том, что никакая частица жидкости не может пересечь свободную поверхность жидкости. В достаточно общем случае положение свободной поверхности может быть задано уравнением

$$\Phi(x, y, z, t) = C = \text{const.}$$

Предполагается, что все первые частные производные функции $\Phi(x, y, z, t)$ существуют.

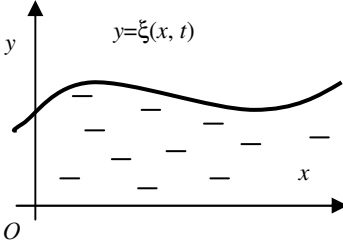
Так как жидкие частицы не могут покинуть свободную поверхность, можно считать, что им присуща некоторая величина Φ . Сохра-

нение некоторой скалярной величины (например, массы) означает равенство нулю субстанциональной производной:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + v_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (2.15)$$

при $\Phi = C$, т. е. на свободной поверхности. Условие (2.15) является искомым кинематическим условием на свободной поверхности.

Пример. Пусть рассматривается случай плоского движения жидкости:



$$\vec{v} = (v_x(x, y, t), v_y(x, y, t), 0),$$

а уравнение свободной поверхности задано в виде $y = \xi(x, t)$ (рис. 2.10). На свободной поверхности

$$\Phi = y - \xi(x, t) = 0,$$

Рис. 2.10. Иллюстрация уравнения свободной поверхности вида $y = \xi(x, t)$

поэтому выполняется условие

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + v_x \Big|_{y=\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} - v_y \Big|_{y=\xi} = 0. \quad (2.16)$$

Если при этом свободная поверхность неподвижна, то

$$\frac{v_x}{v_y} = \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

т. е. вектор скорости жидкости направлен по касательной к поверхности.

2.6. Классификация реологически сложных жидкостей

В предыдущих параграфах мы проследили развитие представлений гидродинамики от простых моделей Эйлера — Лагранжа к более сложным моделям Навье — Стокса. Для идеальной жидкости реологическую¹ модель среды можно записать в виде

¹ *Реология* — наука о деформациях и текучести веществ (от греч. *rheos* — течение, поток и *logos* — наука).

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij},$$

а для несжимаемой вязкой жидкости, в соответствии с гипотезой Ньютона, формулируется другая модель:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta\gamma_{ij},$$

где динамическая вязкость жидкости считается зависимой только от температуры.

Практика применения в технике различных реологически сложных жидкостей, примерами которых могут служить мелкодисперсные суспензии различного состава (торф, водоугольные дисперсии, топливные смеси, разнообразные горючие материалы с полимерным связующим, пасты и суспензии ядерного горючего, мазуты и т. п.), требует дальнейшего усложнения реологических моделей. Механическое поведение таких сред отличается исключительным своеобразием.

Рассмотрим некоторые модели неньютоновской среды, помогающие классифицировать поведение реологических жидкостей.

Проанализируем однородное нагруженное состояние, которое реализуется при плоском стационарном течении Куэтта (рис. 2.11) и при котором кинематические характеристики не зависят от реологических свойств жидкости. Как показывают эксперименты,

$$\tau = \tau(\gamma_z),$$

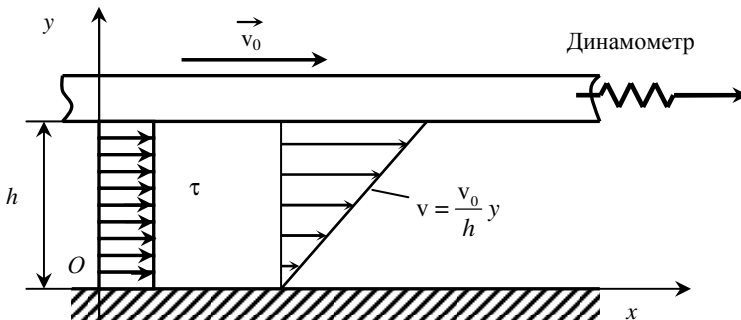


Рис. 2.11. Плоское стационарное течение Куэтта. Представлены график напряжения τ и профиль скоростей $v(y)$ в зависимости от расстояния (толщины) y

где $\gamma_z = v_0 / h$ — скорость угловой деформации. Зависимость $\tau = \tau(\gamma_z)$ называют *кривой течения*. Характерный вид возможных кривых течения и их классификация представлены на рис. 2.12.

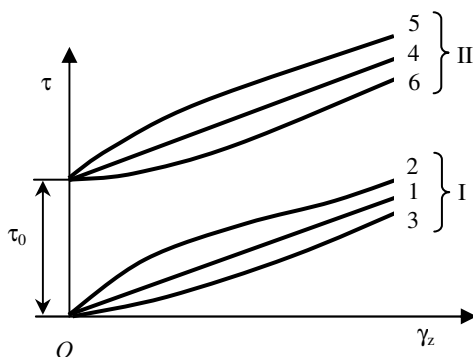


Рис. 2.12. Характерный вид возможных кривых течения:

I — чисто вязкие жидкости (1 — ньютоновская; 2 — псевдопластичная; 3 — дилатантная); II — вязкопластичные жидкости (4 — линейно-вязкопластичные; 5, 6 — нелинейно-вязкопластичные)

Обсудим возможные модели чисто вязких сред, оставаясь в рамках тензорной линейной модели. Если считать среду изотропной, мы приходим к ситуации, когда тензор напряжений непрерывно зависит от тензора скоростей деформаций:

$$\tau_{ij} = f(\gamma_{ij}).$$

Существует строгое доказательство того, что наиболее общим выражением реологической зависимости является нелинейная модель Стокса для вязкой неньютоновской среды:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \beta\gamma_{ij} + \theta\gamma_{ik}\gamma_{kj}, \quad (2.17)$$

где β и θ — скалярные функции главных инвариантов тензора скоростей деформации (2.1) – (2.3).

В рамках тензорной линейной модели необходимо принять условие $\theta = 0$, которое в дальнейшем будет везде считаться выполненным.

Для несжимаемой среды инвариант (2.1)

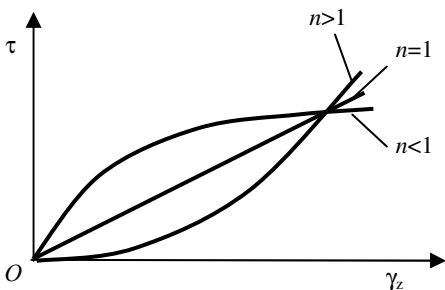
$$I_1 = \text{div}(\vec{v}) = 0,$$

поэтому возможная зависимость параметров модели от I_1 становится неактуальной. Таким образом, мы приходим к варианту выражения (2.17) вида

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \beta\gamma_{ij}, \quad (2.18)$$

где $\beta = \beta(I_2)$, т. е. механические свойства среды считаем зависимыми от интенсивности тензора скоростей деформации.

Для чисто вязких сред популярной моделью является зависимость в виде степенного закона Оствальда — де Вилля. Применительно к течению Куэтта для однородного напряженного состояния степенной закон можно записать в виде $\tau = k\gamma_z^n$ если принять, что $\gamma_z > 0$, или, с учетом возможного знака, как



$$\tau = k|\gamma_z|^{n-1}\gamma_z.$$

Постоянную $k > 0$ называют *показателем консистенции*, параметр $n > 0$ — *индексом течения* (рис. 2.13).

Степенной закон Оствальда — де Вилля обобщается на случай сложного деформирования в виде

$$\beta(I_2) = 2kA^{n-1},$$

где $A = \sqrt{2\gamma_{ij}\gamma_{ij}}$ — интен-

Рис. 2.13. Иллюстрация степенного закона: значение k одинаково; $n > 1$ — дилатантная жидкость; $n < 1$ — псевдопластичная жидкость

сивность тензора скоростей деформации. Тогда выражение (2.18) примет вид

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2kA^{n-1}\gamma_{ij}.$$

Заметим, что при $n = 1$ осуществляется предельный переход к ньютоновской жидкости.

Степенная модель Оствальда — де Вилля имеет свои недостатки. Они легко могут быть обнаружены, если проанализировать зависимость «кажущейся» дифференциальной вязкости от скорости деформации по виду кривой течения в модели Куэтта:

$$\eta^* = \frac{d\tau}{d\gamma_z} = kn\gamma_z^{n-1}.$$

Если положить $n > 1$ (дилатантная жидкость), то $\eta^* \rightarrow 0$ при $\gamma_z \rightarrow 0$ и $\eta^* \rightarrow \infty$ при $\gamma_z \rightarrow \infty$. Если положить $n < 1$ (псевдопластичная жидкость), то $\eta^* \rightarrow \infty$ при $\gamma_z \rightarrow 0$ и $\eta^* \rightarrow 0$ при $\gamma_z \rightarrow \infty$. На самом деле величина η^* должна быть ограниченной и сверху и снизу положительными (ненулевыми) значениями. Несмотря на это степенной закон оказывается справедливым в широком интервале скоростей деформации. В поддержку этого закона также можно отметить, что в обоих пределах $\gamma_z \rightarrow 0$ и $\gamma_z \rightarrow \infty$ процесс деформации имеет, как правило, несколько иную физическую природу, чем при умеренных скоростях деформации.

В заключение обсуждения степенного реологического закона рассмотрим плоское течение Пуазейля.

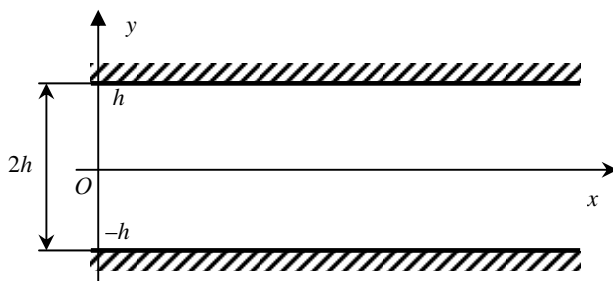


Рис. 2.14. Плоское течение Пуазейля. Система координат

В силу симметрии систему координат выберем как на рис. 2.14. Вектор скорости имеет координаты $\vec{v} = (v(x), 0, 0)$. Для давления можно записать выражение

$$p = p_0 - \left| \frac{dp}{dx} \right| x ,$$

где значение $dp/dx = \text{const}$ задано.

Для рассматриваемой жидкости

$$\tau_{yx} = k \left| \frac{dv}{dy} \right|^{n-1} \frac{dv}{dy} ,$$

соответственно уравнение движения имеет вид

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho} \left[k \left| \frac{dv}{dy} \right|^{n-1} \frac{dv}{dy} \right] = 0.$$

Учитывая, что при $y \in [0, h]$ должно выполняться неравенство $dv/dy < 0$, получаем дифференциальное уравнение в этой области:

$$\frac{d}{dy} \left(-\frac{dv}{dy} \right)^n = \frac{1}{k} \left| \frac{dp}{dx} \right| ,$$

откуда

$$\left(-\frac{dv}{dy} \right)^n = \frac{1}{k} \left| \frac{dp}{dx} \right| y + C ,$$

$C = \text{const}$. Постоянную интегрирования C определяем из условия симметрии (считаем, что $n > 0$)

$$\left. \frac{dv}{dy} \right|_{y=0} = 0$$

(скорость достигает своего максимального значения в центре канала), следовательно, $C = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dy} &= - \left[\frac{1}{k} \left| \frac{dp}{dx} \right| y \right]^{1/n} , \\ v &= - \left[\frac{1}{k} \left| \frac{dp}{dx} \right| \right]^{1/n} \frac{n}{n+1} y^{\frac{n+1}{n}} + C_1 . \end{aligned}$$

Используя граничное условие $v|_{y=h} = 0$, находим

$$C_1 = \left[\frac{1}{k} \left| \frac{dp}{dx} \right| \right]^{1/n} \frac{n}{n+1} h^{\frac{n+1}{n}}.$$

Для области $y > 0$ получаем

$$v = \left[\frac{1}{k} \left| \frac{dp}{dx} \right| \right]^{1/n} \frac{n}{n+1} \left(h^{\frac{n+1}{n}} - y^{\frac{n+1}{n}} \right).$$

Распространяя решение на всю область $y \in [-h, h]$, окончательно получаем

$$v = \left[\frac{1}{k} \left| \frac{dp}{dx} \right| \right]^{1/n} \frac{n}{n+1} \left(h^{\frac{n+1}{n}} - |y|^{\frac{n+1}{n}} \right).$$

Рассмотрим функцию, пропорциональную скорости

$$v_1 = h^{\frac{n+1}{n}} \left(1 - \left(\frac{|y|}{h} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right).$$

Графики этой функции для разных характерных значений показателя $n > 0$ приведены на рис. 2.15. В частности, если $y = 0$, то $v_1 = h^{1+1/n}$ и

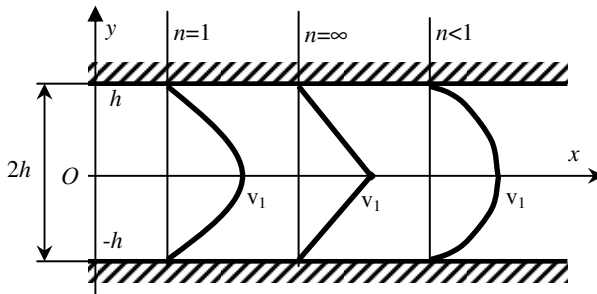


Рис. 2.15. Графики функции v_1 для разных характерных значений показателя $n > 0$

при $n \rightarrow \infty$ $v_1 \rightarrow h$, а при $n=1$ $v_1 = h^2$.

Простейшей моделью вязкопластичной жидкости является модель Шведова — Бингама, линейно сочетающая предельное напряжения сдвига τ_0 и вязкость. В случае плоского течения Куэтта (см. рис. 2.11) при $\gamma_z \neq 0$

$$\tau = \tau_0 \operatorname{sgn}(\gamma_z) + \eta \gamma_z, \quad (2.19)$$

где $\operatorname{sgn}(\gamma_z)$ — знак скорости деформации. Знаки слагаемых в правой части выражения (2.19) должны быть согласованы с требованием возрастания $|\tau|$ при увеличении параметра $|\gamma_z|$.

Предельное напряжение сдвига впервые было обнаружено русским ученым Ф.Н. Шведовым у растворов желатина, а затем американским ученым Ю. Бингамом у масляных красок, которые до этого считались ньютоновскими жидкостями.

Реологический закон Шведова — Бингама для пластичных сред можно обобщить на случай сложного деформирования с учетом того, что при $\tau_0 = 0$ соответствующее соотношение должно совпадать с ньютоновскими законом:

$$\tau'_{ij} = 2 \left[\frac{\tau_0}{A} + \eta \right] \gamma_{ij},$$

где $A = \sqrt{2\gamma_{ij}\gamma_{ij}} > 0$ — интенсивность тензора скоростей деформации, или

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2 \left[\frac{\tau_0}{A} + \eta \right] \gamma_{ij}.$$

Вычислим интенсивность тензора напряжений:

$$\sqrt{\frac{1}{2} \tau'_{ij} \tau'_{ij}} = \tau_0 + \eta A,$$

откуда следует, что при $A \rightarrow 0$

$$\sqrt{\frac{1}{2} \tau'_{ij} \tau'_{ij}} \rightarrow \tau_0.$$

Однако при течении могут образовываться области, где

$$\sqrt{\frac{1}{2} \tau'_{ij} \tau'_{ij}} < \tau_0.$$

В силу отсутствия деформаций при напряжениях меньших τ_0 можно окончательно записать реологическое уравнение Шведова — Бингама для пластических сред при наличии и при отсутствии деформаций:

$$\begin{cases} \tau'_{ij} = 2 \left[\frac{\tau_0}{A} + \eta \right] \gamma_{ij}, & \text{если } \sqrt{\frac{1}{2} \tau'_{ij} \tau'_{ij}} > \tau_0, \\ \gamma_{ij} = 0 \quad \text{или} \quad A = 0, & \text{если } \sqrt{\frac{1}{2} \tau'_{ij} \tau'_{ij}} \leq \tau_0. \end{cases} \quad (2.20)$$

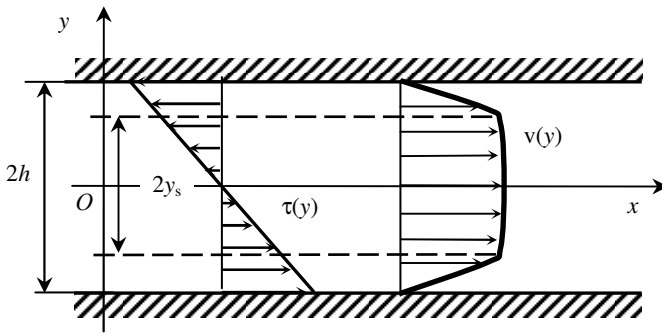


Рис. 2.16. Плоское течение Пуазейля. Представлены график напряжения τ и профиль скоростей $v(y)$ в зависимости от расстояния (толщины) y

В качестве еще одного примера рассмотрим плоское течение Пуазейля (рис. 2.16), которое происходит под действием заданного постоянного градиента давления $dp/dx = \text{const}$. Тогда давление линейно уменьшается вдоль плоского канала:

$$p = p_0 - \left| \frac{dp}{dx} \right| x.$$

Уравнение динамики для жидкости Шведова — Бингама приобретает вид

$$\frac{1}{\rho} \left| \frac{dp}{dx} \right| + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy}) = 0.$$

Интегрируя с учетом того, что $\tau_{xy} = \tau = 0$ при $y = 0$ в силу симметрии течения Пуазейля, получаем

$$\tau = - \left| \frac{dp}{dx} \right| y.$$

В области, где $|\tau| > \tau_0$, $\partial v_x / \partial y \neq 0$, а там, где $|\tau| \leq \tau_0$, $\partial v_x / \partial y = 0$. Таким образом, в центре канала образуется зона движения, в которой деформации отсутствуют. Границу этой области находим из уравнения

$$\tau_0 = \left| \frac{dp}{dx} \right| |y_s|,$$

откуда

$$y_s = \pm \tau_0 / \left| \frac{dp}{dx} \right|.$$

При этом отношение $\tau_0 / \left| \frac{dp}{dx} \right|$ также определяет условие начала течения в канале, так как при движении $|y_s| < h$. То есть стационарное движение возможно, если

$$\left| \frac{dp}{dx} \right| > \frac{\tau_0}{h}.$$

В области течения $|y_s| < |y| < h$ с учетом реологического соотношения Шведова — Бингама при $\frac{\partial v_x}{\partial y} \neq 0$, $|\tau| > \tau_0$ имеем

$$\left| \frac{dp}{dx} \right| + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\tau_0}{\sqrt{(\partial v_x / \partial y)^2}} + \eta \right) \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] = 0,$$

или

$$\left| \frac{dp}{dx} \right| = -\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

откуда

$$v_x = -\frac{1}{\eta} \left| \frac{dp}{dx} \right| \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяем из условий

$$v_x|_{y=h} = 0 \text{ и } \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{|y|=y_S} = 0.$$

Последнее условие следует из требования обращения в нуль интенсивности тензора деформаций $A = \sqrt{2\gamma_{ij}\gamma_{ij}}$. После преобразований окончательно получаем

$$v_x = \frac{1}{2\eta} \left| \frac{dp}{dx} \right| (h - |y|)(h + |y| - 2|y_S|).$$

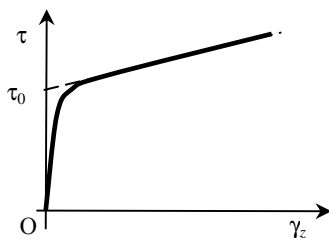
В частности, скорость ядра задается выражением

$$v_x|_{|y|=y_S} = \frac{1}{2\eta} \left| \frac{dp}{dx} \right| (h - |y_S|)^2.$$

Таким образом, при течении вязкопластичной жидкости необходимо дополнительно определить границу области деформаций, на которой должны выполняться условия непрерывности скорости (как на поверхности твердого тела) и равенства нулю тензора деформаций (или, что эквивалентно, его интенсивности).

Часто вязкопластичные жидкости относят к структурно-вязким. При этом имеется в виду, что в отсутствие деформаций в жидкости имеется некоторая структура, образованная молекулами одной из компонент жидкости, имеющей сложный состав. Наличие предельного напряжения сдвига свидетельствует о необходимости разрушения этой структуры при больших скоростях деформации. При очень малых скоростях деформации эта структура не разрушается, и тогда кривая течения имеет вид как на рис. 2.17.

Рис. 2.17. Вид кривой течения структурно-вязкой жидкости при наличии предельного напряжения сдвига и очень малых скоростях деформации



Несмотря на это модель Шведова — Бингама вполне приемлема, так как отношение кажущихся вязкостей может достигать значений

$$\frac{\eta_0(\gamma_z = 0)}{\eta_\infty(\gamma_z = \infty)} = 10^6.$$

Дальнейшее обобщение реологической модели вязкопластичной жидкости возможно с учетом нелинейности кривой течения. Достаточно общим законом является следующий:

$$\tau'_{ij} = 2 \left(\frac{\tau_0^{1/n}}{A^{1/m}} + \eta^{1/m} \right) A^{\frac{n-1}{m}} \gamma_{ij}, \quad n > 0, m > 0.$$

Этот закон, который является обобщением законов Оствальда — де Виля и Шведова — Бингама, был предложен советским ученым З.П. Шульманом.

2.7. Диссипация энергии в несжимаемой жидкости

Наличие вязкости приводит к диссипации энергии, т. е. кинетическая энергия частиц жидкости переходит во внутреннюю энергию вследствие вязкого трения. Скорость диссипации особенно просто вычислить для несжимаемой жидкости.

Кинетическая энергия единицы объема

$$\rho \frac{v^2}{2} = \rho v_i \frac{v_i}{2}.$$

После дифференцирования по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) = \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t}.$$

Производную по времени возьмем из уравнения для несжимаемой жидкости (2.7):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) &= -\rho v_i v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \rho v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \rho v_i \frac{\partial \tau'_{ik}}{\partial x_k} = \\ &= -\rho v_k \frac{\partial v^2}{2 \partial x_k} - v_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + v_i \frac{\partial \tau'_{ik}}{\partial x_k}. \quad (2.21)\end{aligned}$$

Для последнего слагаемого в (2.21) можно записать:

$$v_i \frac{\partial \tau'_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial (v_i \tau'_{ik})}{\partial x_k} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \tau'_{ik},$$

так как

$$\frac{\partial (v_i \tau'_{ik})}{\partial x_k} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \tau'_{ik} + v_i \frac{\partial \tau'_{ik}}{\partial x_k}.$$

Далее учтем, что в силу симметричности тензора

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

выполняется равенство

$$\tau'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \tau'_{ik} \gamma_{ik}.$$

Тогда выражение (2.21) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) = -\rho(\vec{v}, \vec{\nabla}) \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial (v_i \tau'_{ik})}{\partial x_k} - \tau'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad (2.22)$$

где, в частности:

$$-\rho(\vec{v}, \vec{\nabla}) \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial (v_i \tau'_{ik})}{\partial x_k} \text{ — энергия, вносимая извне;}$$

$$\tau'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \text{ — вязкая диссипация энергии внутри объема жидкой час-$$

тицы.

Поскольку жидкость несжимаемая и $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$, то

$$-\rho(\vec{v}, \vec{\nabla})\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) = -\vec{\nabla}\left(\rho\vec{v}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right)\right).$$

С учетом этого выражение (2.22) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right)\rho v_k - v_i \tau'_{ik}\right) - \tau'_{ik} \gamma_{ik}. \quad (2.23)$$

Если теперь рассмотреть в жидкости неподвижную поверхность S , которая ограничивает объем V , то можно записать интегральное соотношение, выражающее закон сохранения энергии в соответствии с уравнением (2.23):

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\rho\frac{v^2}{2}\right) = -\oint\oint_S \left(\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right)\rho v_k - v_i \tau'_{ik}\right) n_k dS - \iiint_V \tau'_{ik} \gamma_{ik} dV.$$

Теперь предположим, что на жидкость не оказывается внешнее воздействие, т. е. существует такая поверхность S , для которой

$$\oint\oint_S \left(\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right)\rho v_k - v_i \tau'_{ik}\right) dS_k = 0.$$

Например, жидкость окружена неподвижными твердыми поверхностями так, что на поверхности S скорость $\vec{v} = \vec{0}$. Тогда изменение кинетической энергии среды происходит только вследствие вязкой диссипации:

$$\frac{d}{dt}(E_{\text{кин}}) = -\iiint_V 2\eta \gamma_{ik} \gamma_{ik} dV = -\iiint_V \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 dV.$$

В последнем уравнении учтено, что $\tau'_{ik} \gamma_{ik} = 2\eta \gamma_{ik} \gamma_{ik}$.

2.8. Теплопроводная жидкость

В идеальной жидкости закон сохранения энергии выражается уравнением (1.6) или (1.7).

При наличии вязкости

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right) = -\operatorname{div} \left(\rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - v_j \tau'_{ji} \right), \quad (2.24)$$

где $\rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right)$ — плотность потока энергии вследствие переноса массы;

$w = \epsilon + \frac{p}{\rho}$ — тепловая функция (см. подразд. 1.7);

$v_j \tau'_{ji}$ — плотность потока энергии вследствие вязкости.

По сравнению с (2.23) в уравнении (2.24) отсутствует вязкая диссипация и присутствует внутренняя энергия среды.

Если температура среды меняется от точки к точке, то плотность потока энергии необходимо дополнить плотностью потока теплоты вследствие теплопроводности. Если перепады температуры не слишком велики, то в соответствии с законом Фурье вектор плотности потока теплоты определяется выражением

$$\vec{q} = -\alpha \nabla T,$$

где α — коэффициент теплопроводности (или просто теплопроводность), Вт/(м·К).

Знак минус в записи закона Фурье означает, что поток теплоты всегда направлен в сторону максимального убывания температуры. Тогда закон сохранения энергии примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right) = -\operatorname{div} \left(\rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - \vec{\Xi} - \alpha \nabla T \right), \quad (2.25)$$

где вектор $\Xi_j = v_i \tau'_{ji}$ определяет плотность потока энергии вследствие касательных напряжений.

В итоге полная система уравнений движения запишется в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \\ \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right) = -\operatorname{div} \left(\rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) - \vec{\Xi} - \alpha \nabla T \right), \\ i = 1, 2, 3 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

(всего пять скалярных уравнений).

Для случая описания вязкой несжимаемой жидкости система (2.26) может быть существенно упрощена. Для такой жидкости из уравнений динамики было получено уравнение (2.23).

Вычтем уравнение (2.23) из уравнения энергии (2.25) и получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \operatorname{div}(\rho \epsilon \vec{v}) = \operatorname{div}(\alpha \nabla T) + \tau'_{ik} \gamma_{ik}.$$

С учетом того, что $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$,

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \epsilon = \operatorname{div} \left(\frac{\alpha}{\rho} \nabla T \right) + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \quad (2.27)$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости. Будем считать, что $\epsilon = cT$, где c — удельная теплоемкость (для несжимаемой жидкости нет разницы, при каких условиях — постоянства давления или объема — определяется теплоемкость: $c = c_p = c_v$). Тогда из (2.27) следует уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) T = \operatorname{div}(\lambda \nabla T) + \frac{\nu}{2c} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2,$$

где $\lambda = \alpha / c\rho$ — коэффициент температуропроводности, м²/с (т. е. λ имеет ту же размерность, что и кинематическая вязкость).

Полная система уравнений в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{v}) = 0, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) T = \operatorname{div}(\lambda \nabla T) + \frac{\nu}{2c} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2. \end{cases} \quad (2.28)$$

Ясно, что даже и в этом случае уравнения динамики и переноса энергии нельзя рассматривать по отдельности, так как вязкость зависит от температуры (плотность тоже может оказаться зависимой от температуры), а движение жидкости приводит к переносу внутренней энергии. При необходимости в уравнениях можно учесть как внешние силы, так и внешние источники теплоты.

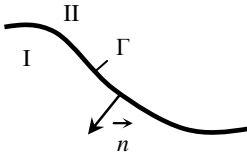


Рис. 2.18. Граница (Γ) различных контактирующих сред I, II ($\vec{n}$ — вектор нормали к поверхности раздела Γ)

Уравнение переноса теплоты необходимо дополнить условиями на границах различных контактирующих сред. Чаще всего на границе раздела сред Γ (рис. 2.18) ставятся граничные условия идеального контакта

$$T^{(I)}|_{\Gamma} = T^{(II)}|_{\Gamma}$$

и равенства потоков теплоты

$$\kappa^{(I)} \frac{\partial T^{(I)}}{\partial n} = \kappa^{(II)} \frac{\partial T^{(II)}}{\partial n},$$

где

$$\frac{\partial T}{\partial n} = (\operatorname{grad} T, \vec{n})$$

($\vec{n}$ — вектор нормали к поверхности раздела Γ).

Заметим, что возможны и другие граничные условия. Однако они должны быть хорошо согласованы между собой с учетом физических соотношений.

2.9. Роль внешних источников теплоты. Тепловой взрыв

Роль внешних источников теплоты часто оказывается нетривиальной. В технике таких примеров достаточно, так как одной из задач разнообразных технических устройств является преобразование тепловой энергии в механическую. Несмотря на это важнее убедиться в том, что и сам процесс разогрева среды (пусть неподвижной) может оказаться нетривиальным.

В физических задачах о распределении температуры параметры внешних источников теплоты, как правило, зависят от температуры. В то же время отвод теплоты из области нагрева может не успеть за выделением теплоты. Тем самым создаются условия для неограниченного разогрева.

Рассмотрим в качестве примера задачу о стационарном распределении температуры в неподвижном веществе, заключенном между двумя параллельными плоскостями, температура которых поддерживается постоянной. Мощность источников теплоты зададим в виде, соответствующем экзотермической реакции горения:

$$q = q_0 e^{\alpha(T-T_0)}.$$

Скорость реакции горения может зависеть от температуры, в частности от множителя

$$\exp(-U/T),$$

где U — энергия активации. Для наших целей достаточно исследовать проблему при незначительном разогреве и считать, что

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} - \frac{T - T_0}{T_0^2}$$

(ряд Тейлора по степеням $(T - T_0)$). В этом случае

$$\exp(-U/T) \sim e^{\alpha(T-T_0)}, \quad \alpha > 0.$$

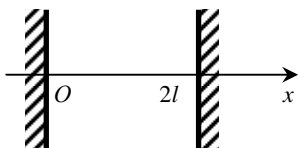


Рис. 2.19. Пространство между двумя плоскостями $x = 0$ и $x = 2l$, заполненное неподвижным веществом с постоянной теплопроводностью κ

Рассмотрим пространство между двумя плоскостями $x = 0$ и $x = 2l$ (рис. 2.19), заполненное неподвижным веществом с постоянной теплопроводностью α . Задача о нахождении стационарного распределения температуры, если в веществе действуют указанные источники теплоты, а температура на граничных плоскостях одинакова и постоянна, формулируется в виде

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -q_0 e^{\alpha(T-T_0)},$$

$$\alpha > 0, \quad x \in [0, 2l],$$

$$T = T_0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = 2l.$$

Если ввести безразмерные переменные $\tau = \alpha(T - T_0)$, $\xi = x/l$, то получим дифференциальное уравнение

$$\tau'' + \lambda e^\tau = 0, \quad (2.29)$$

где $\lambda = q_0 \alpha l^2 / \alpha$, с граничными условиями $\tau = 0$ при $\xi = 0$ и $\xi = 2$. Уравнение (2.29) допускает понижение порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{d\xi} &= \tau' = p, \\ \frac{d\tau'}{d\xi} &= \frac{d\tau'}{d\tau} \frac{d\tau}{d\xi} = p \frac{dp}{d\tau}, \\ \frac{1}{2} \frac{dp^2}{d\tau} + \lambda e^\tau &= 0, \\ p^2 &= -2\lambda e^\tau + C. \end{aligned}$$

Из условия симметрии имеем $d\tau/d\xi = p = 0$ при $\xi = 1$, откуда

$$C = 2\lambda e^{\tau_0},$$

где $\tau_0 = \tau|_{\xi=1}$ — максимальное значение безразмерной температуры при $\xi = 1$. Поэтому

$$\left(\frac{d\tau}{d\xi} \right)^2 = 2\lambda (e^{\tau_0} - e^\tau),$$

или

$$\frac{d\tau}{\sqrt{2\lambda}(e^{\tau_0} - e^{\tau})^{1/2}} = d\xi.$$

Наша цель — определить максимальное значение температуры, т. е. τ_0 . Проинтегрируем последнее дифференциальное выражение в пределах $0 \leq \xi \leq 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{(e^{\tau_0} - e^{\tau})^{1/2}} = \int_0^1 d\xi = 1.$$

Укажем, что интеграл

$$\int \frac{dt}{\sqrt{a - be^{mt}}} = \frac{1}{m\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{a - be^{mt}} - \sqrt{a}}{\sqrt{a - be^{mt}} + \sqrt{a}}.$$

В нашем случае $a = e^{\tau_0}$, $b = 1$, $m = 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^{\tau_0} \frac{dt}{(e^{\tau_0} - e^t)^{1/2}} &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \frac{1}{\sqrt{e^{\tau_0}}} \left(\ln \frac{\sqrt{e^{\tau_0} - e^t} - \sqrt{e^{\tau_0}}}{\sqrt{e^{\tau_0} - e^t} + \sqrt{e^{\tau_0}}} \right) \Bigg|_0^{\tau_0} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \frac{2}{\sqrt{e^{\tau_0}}} \ln \left(\sqrt{e^{\tau_0}} + \sqrt{e^{\tau_0} - 1} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что если

$$t = \text{ch}(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2},$$

то обратную функцию $u(t)$ получим, решив квадратное уравнение

$$e^{2u} - 2te^u + 1 = 0,$$

$$u = \text{arch}(t) = \ln \left(t \pm \sqrt{t^2 - 1} \right).$$

Применяя это уравнение к нашей задаче, получаем трансцендентное алгебраическое уравнение для определения τ_0 :

$$e^{-\frac{\tau_0}{2}} \operatorname{arch}\left(e^{\frac{\tau_0}{2}}\right) = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}.$$

Введем обозначение

$$\chi = \exp\left(\frac{\tau_0}{2}\right).$$

Напомним, что функция

$$\operatorname{ch}\chi = \frac{e^\chi + e^{-\chi}}{2},$$

а функция $\operatorname{arch}(\chi)$ — ей обратная. Как видно на рис. 2.20, функция $e^{-\chi}\operatorname{arch}(e^\chi)$ — ограниченная. При $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$ стационарного решения не существует. Численные значения: $\lambda_{\text{кр}} \approx 0,88$; $\tau_{0\text{кр}} \approx 1,2$.

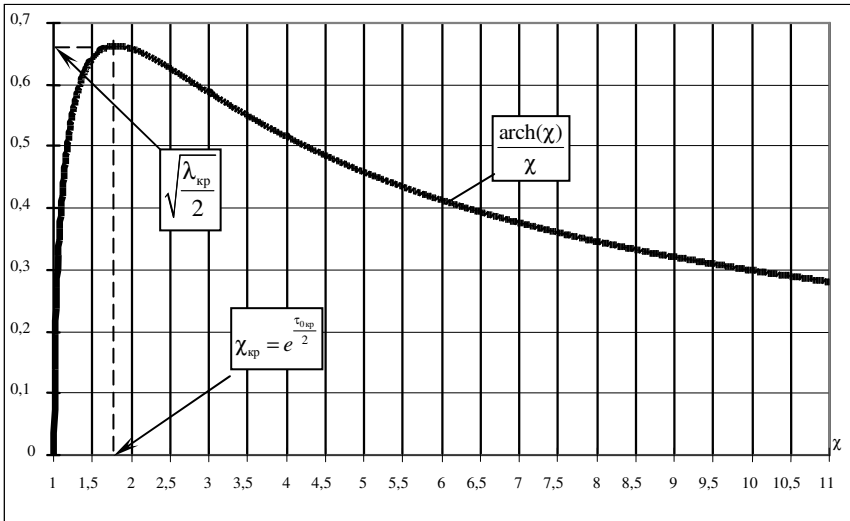


Рис. 2.20. График функции $e^{-\chi}\operatorname{arch}(e^\chi)$

Таким образом, при $q_0 > \lambda_{\text{кр}} \mathfrak{x}/\alpha l^2$ стационарного решения не существует.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1969.

Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10 т. Т. 4: Гидродинамика. М.: Наука, 1986.

Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959.

Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1970.

Шульман З.П. Конвективный теплоперенос реологически сложных жидкостей. М.: Энергия, 1975.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Законы сохранения в идеальной жидкости.....	5
1.1. Сплошные среды	5
1.2. Описание движения сплошной среды	6
1.3. Уравнение непрерывности сплошной среды	11
1.4. Идеальная жидкость. Уравнение Эйлера	13
1.5. Плоские течения несжимаемой (капельной) идеальной жидкости	16
1.6. Уравнение Бернулли	19
1.7. Уравнение переноса энергии в идеальной жидкости.....	21
2. Вязкая жидкость	24
2.1. Движение жидкой частицы	24
2.2. Силы, действующие в жидкости	27
2.3. Ньютоновская вязкая жидкость	32
2.4. Функция тока в несжимаемой вязкой жидкости	37
2.5. Граничные условия	38
2.6. Классификация реологически сложных жидкостей	40
2.7. Диссипация энергии в несжимаемой жидкости	51
2.8. Теплопроводная жидкость.....	53
2.9. Роль внешних источников теплоты. Тепловой взрыв	57
Список рекомендуемой литературы.....	61

Учебное издание

Романов Александр Сергеевич
Семиколенов Андрей Владимирович
Тараненко Сергей Николаевич
Шахорин Александр Петрович

ИДЕАЛЬНАЯ И ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТИ

Редактор *Е.К. Кошелева*
Компьютерная верстка *С.А. Серебряковой*

Подписано в печать 11.11.2008. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 3,02.
Тираж 100 экз. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5