

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Конспект лекций

Для студентов специальности
«Прикладная математика»

Москва
2006

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

5. ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

5.1. Построение теории P

Язык алгебры предикатов как расширение языка алгебры высказываний. Аксиомы исчисления предикатов: схемы аксиом исчисления высказываний плюс 4 аксиомы с кванторами: 11) $\forall x X \rightarrow X_t^x$; 12) $\forall x (Y \rightarrow X(x)) \rightarrow (Y \rightarrow \forall x X(x))$; 13) $X_t^x \rightarrow \exists x X$; 14) $\forall x (X(x) \rightarrow Y) \rightarrow (\exists x X(x) \rightarrow Y)$. Правила вывода: 1* $\frac{X, X \rightarrow Y}{Y}$; 2* $\frac{X}{\forall x X}$. Вывод и вывод из гипотез. Структурное ограничение. Секвенции.

Исчисление предикатов строится как расширение исчисления высказываний. Основная цель та же: формализовать доказательство различного рода утверждений. Исчисление предикатов — составная часть любой формальной теории, отвечающая за логическую часть теории. Если говорить об алгебре предикатов как таковой, уместно ограничиться простейшим вариантом логико-математического языка, оставляя за кадром детали предметной области. Для нас несущественно, как образуются термы, поскольку они целиком относятся к предметной области. Мы под предметной переменной можем понимать любой терм. Кроме того, для нас не является существенным, сколько сортов предметных переменных есть в теории. Можем считать, что один сорт. В то же время мы не можем совсем игнорировать предметные переменные, поскольку именно с ними связано функционирование кванторов.

Учитывая это, будем строить теорию P , языком Ω которой является односортный логико-математический язык с пустым множеством констант и пустым множеством функциональных символов. При этом каждый терм этого языка будет элементарным, т.е. предметной переменной единственного сорта. Поскольку подстановка в формуле связана с предметными переменными, то в нашем языке подстановка есть замена одних предметных переменных другими.

Упрощается и интерпретация рассматриваемого языка. Достаточно задать единую предметную область для всех предметных переменных и указать отображение, которое n -арному предикатному символу ставит в соответствие булеву функцию от n переменных, а в случае 0-арного предикатного символа символ 0 или 1.

Зададим аксиомы исчисления предикатов в виде некоторого набора схем аксиом. Первые десять схем повторяют схемы исчисления высказываний:

- | | |
|--|---|
| 1) $X \rightarrow (Y \rightarrow X)$; | 7) $Y \rightarrow X \vee Y$; |
| 2) $X \rightarrow Y \rightarrow (X \rightarrow (Y \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Z))$; | 8) $X \rightarrow Z \rightarrow (Y \rightarrow Z \rightarrow (X \vee Y \rightarrow Z))$; |
| 3) $X \wedge Y \rightarrow X$; | 9) $X \rightarrow Y \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)$; |
| 4) $X \wedge Y \rightarrow Y$; | 10) $\neg \neg X \rightarrow X$; |
| 5) $(X \rightarrow Y) \rightarrow ((X \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Y \wedge Z))$; | 11) $X \rightarrow \neg \neg X$. |
| 6) $X \rightarrow X \vee Y$; | |

Еще четыре схемы связаны с кванторами (ниже X_t^x — правильная подстановка терма t вместо переменной x , Y не содержит свободных вхождений переменной x):

- 12) $\forall x X \rightarrow X_t^x$;
- 13) $\forall x (Y \rightarrow X(x)) \rightarrow (Y \rightarrow \forall x X(x))$;
- 14) $X_t^x \rightarrow \exists x X$;
- 15) $\forall x (X(x) \rightarrow Y) \rightarrow (\exists x X(x) \rightarrow Y)$.

В дополнение к правилу *modus ponens* добавляется правило обобщения:

- 1* $\frac{X, X \rightarrow Y}{Y}$;
- 2* $\frac{X}{\forall x X}$.

Как и в исчислении высказываний выводом называем последовательность формул языка, в которой каждая формула либо аксиома, либо получена по одному из правил вывода из предшествующих формул. Также вводим понятие вывода из гипотез Γ , в котором в последовательности формул могут находиться формулы из списка Γ . Однако для вывода из гипотез введем дополнительное структурное требование: если формула $\forall x X$ получена по правилу обобщения, то во всех гипотезах, используемых для вывода этой формулы, переменная x не должна иметь свободных вхождений. Указанное структурное требование не касается аксиом. Поэтому в выводе без гипотез его можно не учитывать.

Смысл сформулированного структурного ограничения становится понятным, если учесть, что вывод должен сохранять истинность формул. Правило модус поненс сохраняет истинность формул при фиксированной модели и фиксированной оценке, а именно: если θ — оценка формулы $X \rightarrow Y$ в данной модели M , то из истинности $X\theta$ и $(X \rightarrow Y)\theta$ следует истинность $Y\theta$. Правило обобщения нарушает фиксированность оценки при выводе.

Впрочем, структурное ограничение касается лишь частного вывода. Мы могли бы это ограничение не учитывать, но тогда нам придется считаться с ним при „сшивке“ частных выводов в окончательный вывод без гипотез. Поясним сказанное. Выводимость из X формулы $\forall x X$ следует увязать с выводимостью формулы $X \rightarrow \forall x X$, т.е. с тем, что эта формула есть тавтология. Но если переменная x входит в X свободно, то при некоторой интерпретации для некоторого объекта a формула X_a^x будет ложной, а для некоторого объекта b формула X_b^x — истинной. В этом случае $\forall x X$ в соответствии с интерпретацией всеобщности будет ложной формулой при любой оценке, а это приведет к ложности $X \rightarrow \forall x X$. Однако эта формула будет тавтологией, если X не имеет свободных вхождений x .

Мы сохраняем запись $\Gamma \vdash X$, означающую, что X выводима из гипотез Γ . Эту запись называем *секвенцией*.

Пример 5.1. Пусть переменная y не имеет свободных вхождений в X . Тогда $\vdash \forall x X \rightarrow \rightarrow \forall y (X_y^x)$. Действительно:

- 1) $\forall x X \rightarrow X_y^x$ (схема аксиом 14);
- 2) $\forall y (\forall x X \rightarrow X_y^x)$ (по правилу обобщения из 1);
- 3) $\forall y (\forall x X \rightarrow X_y^x) \rightarrow (\forall x X \rightarrow \forall y X_y^x)$ (схема аксиом 12);
- 4) $\forall x X \rightarrow \forall y X_y^x$ (по правилу модус поненс из 3 и 4);

5.2. Правила естественного вывода

Теорема о дедукции. Правила естественного вывода исчисления высказываний. Новые правила:

- | | |
|---|---|
| p1) $\frac{\Gamma \vdash X}{\Gamma \vdash \forall y X_y^x}$ (введение общности); | p2) $\frac{\Gamma \vdash \forall x X}{\Gamma \vdash X_t^x}$ (удаление общности); |
| p3) $\frac{\Gamma \vdash X_t^x}{\Gamma \vdash \exists x X}$ (введение существования); | p4) $\frac{\Gamma, X \vdash Y}{\Gamma, \exists y X_y^x \vdash Y}$ (удаление существования). |

Пример: $\exists x X \rightarrow \neg \forall x (\neg X)$.

Как и в случае исчисления высказываний, на практике вывод строится с помощью правил естественного вывода. Сохраняются структурные правила естественного вывода, так как они не связаны с сутью самого вывода. Сохраняется теорема о дедукции. Однако в доказательство этой теоремы необходимо внести некоторые коррективы.

Теорема 5.1. Если $\Gamma, X \vdash Y$, то $\Gamma \vdash X \rightarrow Y$.

◀ Доказательство теоремы, как и в исчислении высказываний, проводится индукцией по построению формулы. Рассуждения в основном повторяют доказательство теоремы из исчисления высказываний. Дополнительно надо лишь рассмотреть случай, когда конечная формула вывода получена по правилу обобщения.

Итак, пусть в выводе $X_1, X_2, \dots, X_i = X, \dots, X_j, \dots, X_n$ конечная формула имеет вид $X_n = \forall x X_j$. Предположим в выводе формулы X_j формула X не используется. Тогда $\Gamma \vdash X_j$ и

$\Gamma \vdash \forall x X_j$. С помощью аксиомы $\forall x X_j \rightarrow (X \rightarrow \forall x X_j$ с помощью правила заключения получаем $\Gamma \vdash X \rightarrow \forall x X_j$. Если формула X используется в выводе формулы X_j , то, согласно структурному ограничению, формула X не имеет свободных вхождений переменной x . Согласно индуктивному предположению из вывода $\Gamma, X \vdash X_j$ вытекает вывод $\Gamma \vdash X \rightarrow X_j$, откуда по правилу обобщения (ни X , ни X_j не содержат свободных вхождений x) получаем $\Gamma \vdash \forall x (X \rightarrow X_j)$. Присоединив аксиому $\forall x (X \rightarrow X_j) \rightarrow (X \rightarrow \forall x X_j)$, получаем вывод формулы $X \rightarrow \forall x X_j = X \rightarrow Y$. ►

Теорема о дедукции позволяет без изменений перенести в исчисление предикатов все восемь логических правил естественного вывода, а вслед за ними и дополнительные правила естественного вывода: доказательства этих правил не используют правила обобщения. Кроме того, добавляются следующие четыре правила с кванторами (в этих правилах x не имеет свободных вхождений в формулы списка Γ и Y ; если y отлично от x , то y не входит свободно в X):

$$\begin{array}{ll} \text{p1)} \quad \frac{\Gamma \vdash X}{\Gamma \vdash \forall y X_y^x} \text{ (введение общности);} & \text{p3)} \quad \frac{\Gamma \vdash X_t^x}{\Gamma \vdash \exists x X} \text{ (введение существования);} \\ \text{p2)} \quad \frac{\Gamma \vdash \forall x X}{\Gamma \vdash X^x} \text{ (удаление общности);} & \text{p4)} \quad \frac{\Gamma, X \vdash Y}{\Gamma, \exists y X^x \vdash Y} \text{ (удаление существования).} \end{array}$$

При выводе формулы $p1$ учтем, что формулы списка Γ не содержат переменной x :

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \vdash \forall y X_y^x \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \Gamma \vdash \forall x X \qquad \Gamma \vdash \forall x X \rightarrow \forall y X_y^x \\
 \swarrow \quad \searrow \qquad \swarrow \quad \searrow \\
 \Gamma \vdash X \qquad \vdash \forall y (\forall x X \rightarrow X_y^x) \rightarrow (\forall x X \rightarrow \forall y X_y^x) \qquad \Gamma \vdash \forall y (\forall x X \rightarrow X_y^x) \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdash \forall y (\forall x X \rightarrow X_y^x) \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdash \forall x X \rightarrow X_y^x
 \end{array}$$

Формула p2 непосредственно следует из аксиомы 12:

$$\frac{\Gamma \vdash X_t^x}{\Gamma \vdash \forall x X \quad \vdash \forall x X \rightarrow X_t^x}$$

Аналогично выводится и формула р3:

$$\begin{array}{c} \Gamma \vdash \exists x X \\ \hline \Gamma \vdash X_t^x \qquad \vdash X_t^x \rightarrow \exists x X \end{array}$$

Наиболее длинный вывод получается для правила p4:

$$\begin{array}{c}
\Gamma, \exists y X_y^x \vdash Y \\
\swarrow \quad \searrow \\
\Gamma, \exists y X_y^x \vdash \exists y X_y^x \qquad \Gamma, \exists y X_y^x \vdash \exists y X_y^x \rightarrow Y \\
\qquad \qquad \qquad \downarrow \\
\qquad \qquad \qquad \Gamma \vdash \exists y X_y^x \rightarrow Y \\
\qquad \qquad \qquad \swarrow \quad \searrow \\
\Gamma \vdash \forall y (X_y^x \rightarrow Y) \qquad \vdash \forall y (X_y^x \rightarrow Y) \rightarrow (\exists y X_y^x \rightarrow Y) \\
\swarrow \quad \searrow \\
\Gamma \vdash \forall x (X \rightarrow Y) \qquad \forall x (X \rightarrow Y) \vdash \forall y (X_y^x \rightarrow Y) \\
\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
\Gamma \vdash X \rightarrow Y \qquad \forall x (X \rightarrow Y) \vdash X_y^x \rightarrow Y \\
\downarrow \qquad \qquad \qquad \swarrow \quad \searrow \\
\Gamma, X \vdash Y \qquad \forall x (X \rightarrow Y) \vdash \forall x (X \rightarrow Y) \qquad \vdash \forall x (X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Y)^x_x
\end{array}$$

Использование правил естественного вывода такое же, как и в случае исчисления высказываний.

Пример 5.2. Выведем $\exists x X \rightarrow \neg \forall x (\neg X)$. Имеем цепочку преобразований „снизу вверх“:

$$\exists x X \rightarrow \neg \forall x (\neg X) \Leftarrow \exists x X \vdash \neg \forall x (\neg X) \Leftarrow X_y^x \vdash \neg \forall x (\neg X) \Leftarrow \forall x (\neg X) \vdash \neg X_y^x.$$

Последняя секвенция вытекает из правила p2.

5.3. Глобальные свойства теории P

Лемма об истинности при фиксированной оценке и ее следствие.

Введенное нами понятие вывода из гипотез сохраняет истинность формул при фиксированной модели и фиксированной оценке.

Лемма 5.1. Пусть Γ — список формул $X_1, X_2, \dots, X_m$ и $\Gamma \vdash Y$. Если для данной модели M и данной оценки θ формул $X_1, X_2, \dots, X_m, Y$ в M истинны $X_1\theta, X_2\theta, \dots, X_m\theta$, то и $Y\theta$ в M истинна.

◀ Доказательство проводится индукцией по длине вывода. Утверждение очевидно, если вывод содержит одну формулу, которая в этом случае есть либо аксиома (являющаяся логическим законом), либо гипотеза X_j . Но тогда $Y\theta$ и $X_j\theta$ — одно и то же.

Предположим утверждение доказано для всех выводов длины менее k . Рассмотрим произвольный вывод $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ из гипотез Γ длины k с конечной формулой $Y = Z_k$. Формула Y есть либо логический закон, либо гипотеза, либо получена по правилу модус поненс, либо по правилу всеобщности. В первых двух случаях рассуждения те же, что и при $k = 1$. В третьем случае в выводе есть формулы Z_j и $Z_l = Z_j \rightarrow Y$. В силу предположения индукции формулы $Z_j\theta$ и $(Z_j \rightarrow Y)\theta$ истинны в M . В этом случае правило модус поненс гарантирует истинность в M формулы $Y\theta$.

Если Y получена по правилу обобщения из формулы Z_j для некоторого j , то $Y = \forall x Z_j$. В силу структурного требования формула Z_j получена из гипотез $X_{i_1}, \dots, X_{i_s}$, каждая из которых не имеет свободных вхождений переменной x . Для всякого объекта a того же сорта, что и x из истинности формул X_i следует истинность $(X_i)_a^x$ (это то же самое, что и X_i). В силу индуктивного предположения заключаем, что $M \models ((Z_j)_a^x)\theta$, а в силу интерпретации квантора всеобщности это равносильно истинности $(\forall x X)\theta$, т.е. $Y\theta$. ▶

Следствие 5.1. Если $\Gamma \vdash X$ и все формулы в Γ являются логическими законами, то и X есть логический закон. В частности, если $\vdash X$, то X — логический закон.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Булевы функции	1
1.1. Булевы алгебры	1
1.2. Булевы функции	2
1.3. ДНФ и КНФ	9
1.4. Критерий Поста	11
1.5. Минимизация ДНФ	12
2. Логика высказываний	18
2.1. Алгебра высказываний	18
2.2. Тавтологии и эквивалентность формул	19
2.3. Способы получения эквивалентных формул	21
3. Исчисление высказываний	23
3.1. Введение	23
3.2. Основные положения теории N	24
3.3. Правила естественного вывода	25
3.4. Глобальные свойства теории N	30
4. Алгебра предикатов	35
4.1. Предикаты и кванторы	35
4.2. Логико-математические языки	36
4.3. Переименования и подстановки	39
4.4. Семантика логико-математического языка	42
4.5. Логические законы	44
4.6. Замены	47
4.7. Упрощение формул	49
5. Исчисление предикатов	51
5.1. Построение теории P	51
5.2. Правила естественного вывода	52
5.3. Глобальные свойства теории P	54
6. Алгоритмы на графах	55
6.1. Введение	55
6.2. Деревья	57
6.3. Остов графа наименьшего веса	60
6.4. Задача о путях в размеченном графе	62
6.5. Циклы, разрезы и задача Эйлера	66