Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Конспект лекций

Для студентов специальности
«Прикладная математика»

Москва
2006

2. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

2.1. Алгебра высказываний

Высказывания и их истинностные значения. Логические операции $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\sim$, $\neg$. Пропозициональные операции и связки. Пропозициональные формулы: пропозициональные переменные и шаг индукции ($X \vee Y$, $X \wedge Y$, $X \to Y$, $\neg X$). Язык и метаязык. Истинностные функции и пропозициональные формулы. Утверждение: каждая истинностная функция соответствует некоторой пропозициональной формуле.

Напомню, что под высказыванием понимается любое предложение, относительно которого можно сказать истинно оно или нет, т.е. утвердительное предложение. Строго говоря, сказанное не следует рассматривать как настоящее математическое определение — лишь как указание на те реальные объекты, которые могут служить иллюстрацией к точной математической теории.

Формирование предложений в естественном языке указывает на то, что высказывания могут объединяться с помощью связывающих союзов. С математической точки зрения эти союзы реализуют операции над высказываниями. Выделим пять таких операций:

1) дизъюнкция (соответствует союзу „или“);
2) конъюнкция (соответствует союзу „и“);
3) импликация (соответствует фразе типа „если ..., то „);
4) эквиваленция (соответствует фразе типа „... тогда и только тогда, когда ...);
5) отрицание (соответствует союзу „не“).

Первые четыре из этих операций бинарные, последняя унарная. Относительно указанных операций можно сказать лишь, что они формируют новое высказывание. При этом, зная, истинны или ложны исходные высказывания, можно сказать, является ли истинным вновь образованное высказывание. Введенные пять операций мы будем называть ***логическими*** или ***пропозициональными***.

Мы имеем дело с некоторой алгебраической системой, и для нее можно ввести свой математический язык — язык алгебры высказываний. В этом языке из заданного набора символов — алфавита языка — по определенным правилам составляются последовательности, называемые словами или фразами, формулами.

Алфавит языка алгебры высказываний составляют множество ***пропозициональных переменных***, множество *функциональных символов* (символов операций, или ***логических связок***) $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\sim$, $\neg$ и множество служебных символов (две круглые скобки). Формулы языка вводятся индуктивно.

База индукции: пропозициональные переменные представляют собой формулы.

Шаг индукции: если X и Y — формулы, то формулами являются $(X \vee Y)$, $(X \wedge Y)$, $(X \to Y)$, $(X \sim Y)$, $(\neg X)$.

Договоримся о следующих обозначениях. Будем обозначать: пропозициональные переменные — строчными латинскими буквами конца алфавита (x, y, z и т.д.); какие-либо формулы — прописными латинскими буквами конца алфавита (X, Y, Z и т.д.). Как и в теории булевых функций, для сокращения количества скобок в формулах договоримся о таком же приоритете операций. Это соглашение не относится к самому языку ми служит лишь для удобства.

В наших рассуждениях будут встречаться формулы, которые относятся к введенному языку, но, кроме того, придется использовать и дополнительные обозначения и символику, чтобы рассуждать не в рамках языка, а о самом языке и его формулах. Так, обозначения переменных — это элемент языка алгебры высказываний, а обозначения формул уже выходят за рамки языка.

Дополнительное соглашение о приоритете операций также выходит за рамки языка. В этом случае говорят о расширении рассматриваемого языка или о ***метаязыке***. На практике язык и метаязык тесно переплетаются, и разделить их не просто.

Слова языка алгебры высказываний, называемые ***пропозициональными формулами***, — лишь цепочки символов, составленные по определенным правилам. Они получают содержательный смысл, если ввести какую-либо *интерпретацию* рассматриваемого языка. Естественная интерпретация — ввести область изменения каждой пропозициональной переменной как множество всех высказываний и сопоставить каждому символу соответствующую логическую операцию. Тогда каждая формула будет определять правило, по которому из некоторого набора исходных высказываний, обозначенных переменными, мы получим новое высказывание. Сама подстановка вместо переменных конкретных высказываний уже выходит за рамки рассматриваемого языка. Отметим, что формулы алгебры высказываний имеют и другие интерпретации. Например, пропозициональные переменные можно рассматривать как булевы переменные, а функциональные символы увязать с соответствующими булевыми операциями. Такая интерпретация позволяет получить исходя из истинности высказываний истинность сложного высказывания. Формула будет определять булеву функцию, которую называют ***истинностной функцией***. Именно истинностные функции и следует рассматривать как главную цель изучения в алгебре высказываний, поскольку она позволяет судить об истинности сложных, запутанных высказываний.

Теорема 2.1. Каждая булева функция является истинностной функцией некоторой формулы алгебры высказываний.

◄ Язык алгебры высказываний совпадает с языком булевой алгебры, построенным на множестве из пяти булевых функций $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\sim$, $\neg$. Поскольку это множество содержит стандартный базис в $\mathbb{B}$ и, следовательно, полно, любая булева функция может быть представлена формулой над заданным множеством. Эту формулу можно рассматривать как формулу алгебры высказываний. При этом булева функция будет истинностной функцией указанной формулы. ►

2.2. Тавтологии и эквивалентность формул

Тавтологии. Формулы выполнимые и опровержимые. Теорема о правиле modus ponens: Если X и $X \to Y$ — тавтологии, то и Y — тавтология. Подстановка $\mathbf{S}(z_1, z_2, \ldots, z_n | Y_1, Y_2, \ldots, Y_n | X)$ (результат подстановки Y_i вместо z_i) — пропозициональная формула. Эквивалентность формул алгебры высказываний. Теорема о заменах. Следствие 1: если X — тавтология, то и $\mathbf{S}(z_1, z_2, \ldots, z_n | Y_1, Y_2, \ldots, Y_n | X)$ — тавтология. Следствие 2: инвариантность эквивалентности относительно логических операций.

Среди формул алгебры высказываний выделяют:

– ***выполнимые***, имеющие значение 1 хотя бы для одного набора значений пропозициональных переменных;

– ***опровержимые***, имеющие значение 0 хотя бы для одного набора значений пропозициональных переменных.

Формула, не являющаяся опровержимой, истинна при любом значении переменных. Такую формулу называют ***тождественно истинной*** или ***тавтологией***. Тавтологии описывают универсальные логические законы. Именно с использованием тавтологий проводится любое математическое доказательство.

Формула, не являющаяся выполнимой, ложна при любом значении переменных. Такую формулу называют ***тождественно ложной*** или ***противоречием***.

Для тавтологий (противоречий) истинностная функция есть константа 1 (0). Для выполнимых формул истинностная функция не равна постоянной 0, а для опровержимых — постоянной 0.

Пример 2.1. Формула $(x \vee (\neg y)) \to z$ является одновременно выполнимой и опровержимой: она истинна, если значением переменной z является истинное высказывание, и ложна, если, например, значениями переменных y и z являются ложные высказывания. Это можно увидеть составив истинностную функцию, которая в данном случае описывается вектором 01110101. Формула $(x \vee (\neg x))$ является тавтологией, а формула $(x \wedge (\neg x))$ — противоречием. #

Следующее утверждение отражает часто используемое на практике умозаключение, называемое modus ponens (модус поненс).

Теорема 2.2. Если формулы X и $X \to Y$ являются тавтологиями, то и формула Y есть тавтология.

◀ Пусть формулы X и Y построены из переменных $z_1, \ldots, z_n$. Выберем для этих переменных какие-либо значения. Тогда об истинности формулы $X \to Y$ можно судить на основании истинности формул X и Y. Анализируя истинностную функцию для импликации, видим, что при истинности X и ложности Y формула $X \to Y$ является ложной. Но по условию теоремы эта формула тождественно истинная, как и формула X. Следовательно, формула Y не может быть ложной при выбранных значениях переменных. Поскольку значения переменных выбирались произвольно, заключаем, что формула Y тождественно истинна, т.е. тавтология. ▶

Как и в булевой алгебре, введем понятие *эквивалентных формул* алгебры высказываний — формул, имеющих равные истинностные значения при любых значениях входящих в формулы переменных. Альтернативное определение: формулы X и Y называются эквивалентными, если формула $X \sim Y$ является тавтологией. Нетрудно показать, рассуждая как в последней теореме, что формула $X \sim Y$ является тавтологией тогда и только тогда, когда при любых значениях переменных формулы X и Y одновременно или истинны, или ложны, т.е. истинностные функции этих формул совпадают. Для эквивалентных формул введем обозначение $X \equiv Y$. Итак, $X \equiv Y \Leftrightarrow X \sim Y$ — тавтология. Обратите внимание на три символа эквивалентности в последней фразе. Первый обозначает отношение эквивалентности формул, введенное на множестве формул алгебры высказываний, третий — операцию эквиваленции, а второй — по сути та же эквиваленция, но в утверждении, в котором формулируется свойство самой алгебры высказываний, и ее следует отнести к сфере метаязыка.

В теории булевых функций мы уже использовали некоторые стандартные приемы, приводящие к эквивалентным формулам. Один из них — подстановка. Если мы в формуле заменим одну из подформул другой, то получим новую цепочку символов. Нетрудно доказать индукцией по построению, что это цепочка будет формулой. Заменяемая подформула может встречаться несколько раз. В этом случае говорят о ***вхождениях подформулы***. Замена может выполняться для одного какого-либо вхождения данной подформулы или для всех. Из теории булевых функций вытекает следующий результат.

Теорема 2.3. 1) Если $X \equiv Y$, то при замене всех вхождений какой-либо переменной и в X, и в Y какой-либо формулой Z получим эквивалентные формулы.

2) Если в формуле X заменить одно из вхождений подформулы Y эквивалентной формулой Z, то получим формулу, эквивалентную X.

Под подстановкой будем понимать замену всех вхождений в формулу одной или нескольких переменных некоторыми формулами. Результат подстановки в формулу X вместо переменных $z_1, \ldots, z_n$ формул $Y_1, \ldots, Y_n$ обозначают примерно так: $\mathbf{S}(z_1, \ldots, z_n | Y_1, \ldots, Y_n | X)$.

Следствие 2.1. Если X — тавтология, то и $\mathbf{S}(z_1, \ldots, z_n | Y_1, \ldots, Y_n | X)$ — тавтология.

◀ Можно рассуждать так. Тавтологии — это формулы, эквивалентные, например, формуле $W = x \vee \neg x$. В качестве переменной x можно выбрать ту, которая не входит в формулу X. В силу теоремы, заменив в формулах X и W все вхождения переменных $z_1, \ldots, z_n$ формулами $Y_1, \ldots, Y_n$, мы получим эквивалентные формулы. Но формула W при этом не изменится.

Поэтому вновь построенная формула $\mathbf{S}(z_1, \ldots, z_n | Y_1, \ldots, Y_n | X)$ будет эквивалентна формуле W, т.е. будет являться тавтологией. ►

Следствие 2.2. Пусть $X \equiv Z$ и $Y \equiv W$. Тогда $(X \vee Y) \equiv (Z \vee W)$, $(X \wedge Y) \equiv (Z \wedge W)$, $(X \to Y) \equiv (Z \to W)$, $(X \sim Y) \equiv (Z \sim W)$, $(\neg X) \equiv (\neg Z)$.

◄ Формулу $(Z \circ W)$, где $\circ$ — одна из логических связок, можно рассматривать как результат замены в формуле $(X \circ Y)$ сперва подформулы X эквивалентной формулой Z, а затем подформулы Y эквивалентной формулой W. Согласно доказанной теореме такая замена приводит к эквивалентной формуле. Аналогичны рассуждения и для отрицания. ►

2.3. Способы получения эквивалентных формул

Эквивалентности на основе свойств логических операций (коммутативность, ассоциативность, идемпотентность, дистрибутивность, поглощение). Эквивалентности на основе взаимосвязей операций. Эквивалентности на основе двойственности

С помощью подстановки можно получать эквивалентные формулы, отталкиваясь от известных свойств логических операций.

Теорема 2.4. Для любых пропозициональных формул X, Y и Z верны следующие эквивалентности: 1) $X \wedge X \equiv X$; 2) $X \wedge Y \equiv Y \wedge X$; 3) $(X \wedge Y) \wedge Z) \equiv (X \wedge (Y \wedge Z)$; 4) $X \vee X \equiv X$; 5) $X \vee Y \equiv Y \vee X$; 6) $(X \vee Y) \vee Z) \equiv (X \vee (Y \vee Z)$; 7) $X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$; 8) $X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$; 9) $X \wedge (Y \vee X) \equiv X$; 10) $X \vee (Y \wedge X) \equiv X$.

◄ Непосредственно из таблицы для истинностной функции вытекает, что $x \wedge x \equiv x$. Подставив вместо всех вхождений переменной x формулу X, получим эквивалентность $X \wedge X \equiv X$. Остальные эквивалентности доказываются аналогично. ►

Еще один способ получения эквивалентностей — замена одних операций другими по соответствующим формулам. Из теории булевых функций вытекает, что верны следующие эквивалентности:

$$(\neg(\neg x)) \equiv x, \quad (\neg(x \vee y)) \equiv (\neg x) \wedge (\neg y), \quad (x \to y) \equiv ((\neg x) \vee y).$$

Отталкиваясь от этих эквивалентностей можно доказать следующее.

Теорема 2.5. Для любых пропозициональных формул X, Y и Z верны следующие эквивалентности:

1) $(\neg(\neg X)) \equiv X$ (закон двойного отрицания);
2) $(\neg(X \vee Y)) \equiv (\neg X) \wedge (\neg Y))$ (перенос отрицания через конъюнкцию);
3) $(\neg(X \wedge Y)) \equiv (\neg X) \vee (\neg Y))$ (перенос отрицания через дизъюнкцию);
4) $(\neg(X \to Y)) \equiv (X \wedge (\neg Y))$ (перенос отрицания через импликацию);
5) $(X \to Y) \equiv ((\neg X) \vee Y)$ (представление импликации через дизъюнкцию);
6) $(X \to (\neg X)) \equiv (\neg X)$ (закон упрощения);
7) $(X \to Y) \equiv ((\neg Y) \to (\neg X)$ (закон контрапозиции).

◄ Доказывается теорема так же, как и предыдущая. Например, на основании простой эквивалентности $(\neg(\neg x)) \equiv x$, устанавливаемой непосредственно, путем подстановки вместо переменной x формулы X получаем эквивалентность $(\neg(\neg X)) \equiv X$. ►

Понятие двойственности из теории булевых функций переносится на алгебру высказываний. В данном случае речь идет о формулах, содержащих только базовые операции $\vee$, $\wedge$, $\neg$. Для любой такой формулы X двойственная формула X^* получается взаимной заменой операций $\vee$ и $\wedge$.

Переход к двойственной формуле соответствует переходу от булевой функции $f(x)$ к двойственной функции $\overline{f(\overline{x})}$. Понятие двойственных функций позволяет ввести понятие двойственности для любых формул алгебры высказываний, однако для произвольных формул двойственность не является такой простой, как в случае трех базовых операций. Из понятия двойственных функций вытекает, что двойственность — симметричное отношение, т.е. $X^{**} = X$ (здесь знак равенства означает не эквивалентность формул, а их совпадение). Из понятия двойственности функций вытекает и следующая эквивалентность:

$$X^{**} \equiv \mathbf{S}(t_1, \ldots, t_n | \neg t_1, \ldots, \neg t_n | \neg X),$$

где t_1, ..., t_n — полный список переменных формулы X.

Каждая булева функция может быть представлена формулой над стандартным базисом. При этом булева функция, не равная тождественно 0, может быть представлена совершенной дизъюнктивной нормальной формой, а булева функция, не равная тождественно 1, — совершенной конъюнктивной нормальной формой. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.6. Каждая формула алгебры высказываний, не являющаяся противоречием, имеет эквивалентную ей совершенную ДНФ. Каждая формула алгебры высказываний, не являющаяся тавтологией, имеет эквивалентную ей совершенную КНФ. #

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Булевы функции 1
- 1.1. Булевы алгебры . . . 1
- 1.2. Булевы функции . . . 2
- 1.3. ДНФ и КНФ . . . 9
- 1.4. Критерий Поста . . . 11
- 1.5. Минимизация ДНФ . . . 12

2. Логика высказываний 18
- 2.1. Алгебра высказываний . . . 18
- 2.2. Тавтологии и эквивалентность формул . . . 19
- 2.3. Способы получения эквивалентных формул . . . 21

3. Исчисление высказываний 23
- 3.1. Введение . . . 23
- 3.2. Основные положения теории $\boldsymbol{N}$ . . . 24
- 3.3. Правила естественного вывода . . . 25
- 3.4. Глобальные свойства теории $\boldsymbol{N}$ . . . 30

4. Алгебра предикатов 35
- 4.1. Предикаты и кванторы . . . 35
- 4.2. Логико-математические языки . . . 36
- 4.3. Переименования и подстановки . . . 39
- 4.4. Семантика логико-математического языка . . . 42
- 4.5. Логические законы . . . 44
- 4.6. Замены . . . 47
- 4.7. Упрощение формул . . . 49

5. Исчисление предикатов 51
- 5.1. Построение теории $\boldsymbol{P}$ . . . 51
- 5.2. Правила естественного вывода . . . 52
- 5.3. Глобальные свойства теории $\boldsymbol{P}$ . . . 54

6. Алгоритмы на графах 55
- 6.1. Введение . . . 55
- 6.2. Деревья . . . 57
- 6.3. Остов графа наименьшего веса . . . 60
- 6.4. Задача о путях в размеченном графе . . . 62
- 6.5. Циклы, разрезы и задача Эйлера . . . 66