

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Конспект лекций

Для студентов кафедры ИУ9

Москва
2009

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

5. ГЕНЦЕНОВСКИЕ ФОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

5.1. Исчисление GV

Для языка исчисления высказываний построим некоторое расширение, добавив символы “ $\Rightarrow$ ” и “ $\vdash$ ”:

1) если X и Y — формулы, то $X \vdash$, $\vdash Y$ и $X \vdash Y$ — секвенции (первые две назовем открытыми соответственно справа и слева);

2) если S — закрытая слева секвенция, X — формула, то X, S — секвенция; если S — закрытая справа секвенция, X — формула, то S, X — секвенция.

Как следует из этого формального определения, секвенция — это два списка формул, соединенных специальным знаком. При этом один из списков (но не оба вместе) может быть пустым. Левый список называется **антецедентом**, а правый — **сукцедентом** секвенции. Далее через $X, Y, \dots$ будем обозначать отдельные формулы, через Γ, Δ и т.д. — списки формул.

Исчисление GV имеет только одну схему аксиом

$$X \vdash X$$

и большое количество правил вывода (всего 15). Их разделим на структурные и логические. Итак структурные правила:

1. Утончение	$U\vdash:$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{X, \Gamma \vdash \Delta}$	$\vdash U:$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, X}$
2. Сокращение	$C\vdash:$	$\frac{\Gamma, X, X, \Lambda \vdash \Delta}{\Gamma, X, \Lambda \vdash \Delta}$	$\vdash C:$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, X, X, \Lambda}{\Gamma \vdash \Delta, X, \Lambda}$
3. Перестановка	$P\vdash:$	$\frac{\Gamma, X, Y, \Lambda \vdash \Delta}{\Gamma, Y, X, \Lambda \vdash \Delta}$	$\vdash P:$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, X, Y, \Lambda}{\Gamma \vdash \Delta, Y, X, \Lambda}$
3. Сечение		$\frac{\Delta \vdash \Lambda, X; X, \Gamma \vdash \Theta}{\Delta, \Gamma \vdash \Lambda, \Theta}$		

Логических правил восемь — по две на каждую логическую связку. Похоже на логические правила в теории N , но нет правил удаления, а есть только введение, но либо в антецеденте, либо в сукцеденте:

1. Импликация	$\rightarrow \vdash:$	$\frac{\Delta \vdash \Lambda, X; Y, \Gamma \vdash \Theta}{X \rightarrow Y, \Delta, \Gamma \vdash \Lambda, \Theta}$	$\vdash \rightarrow:$	$\frac{X, \Gamma \vdash \Delta, Y}{\Gamma \vdash \Delta, X \rightarrow Y}$
2. Конъюнкция	$\wedge \vdash:$	$\frac{X, \Gamma \vdash \Delta}{X \wedge Y, \Gamma \vdash \Delta}, \frac{Y, \Gamma \vdash \Delta}{X \wedge Y, \Gamma \vdash \Delta}$	$\vdash \wedge:$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, X; \Gamma \vdash \Delta, Y}{\Gamma \vdash \Delta, X \wedge Y}$
3. Дизъюнкция	$\vee \vdash:$	$\frac{X, \Gamma \vdash \Delta; Y, \Gamma \vdash \Delta}{X \vee Y, \Gamma \vdash \Delta}$	$\vdash \vee:$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, X}{\Gamma \vdash \Delta, X \vee Y}, \frac{\Gamma \vdash \Delta, Y}{\Gamma \vdash \Delta, X \vee Y}$
4. Отрицание	$\neg \vdash:$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, X}{\neg X, \Gamma \vdash \Delta}$	$\vdash \neg:$	$\frac{X, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg X}$

Единственная схема аксиом и правила вывода позволяют получать выводимые секвенции так же, как и в теории N или P . Как и ранее, выводом в исчислении GV называем последовательность секвенций, в которой каждая секвенция либо аксиома, либо получена на основании одного из правил вывода. Конечная секвенция всякого вывода называется выводимой в исчислении GV . Можно также ввести понятие частного вывода. Частный вывод строится исходя из одной или нескольких исходных секвенций, называемых гипотезами, и завершается одной результирующей секвенцией. Результат частного вывода можно записать в том же виде, что и правила вывода, и в дальнейшем использовать в качестве дополнительного правила вывода. Условие выводимости секвенции S будем записывать в виде $\vdash S$, а вывод S из гипотез $S_1, S_2, \dots, S_n$ — в виде $S_1, S_2, \dots, S_n \vdash S$.

Пример 5.1. Построим вывод секвенции $\vdash \neg\neg X \rightarrow X$. Имеем:

$$\vdash \neg\neg X \rightarrow X \Leftarrow \neg\neg X \vdash X \Leftarrow \vdash X, \neg X \Leftarrow X \vdash X.$$

Пример 5.2. Построим вывод секвенции $\vdash X \vee \neg X$. Имеем:

$$\vdash X \vee \neg X \Leftarrow \vdash X \vee \neg X, X \vee \neg X \Leftarrow \vdash X \vee \neg X, \neg X \Leftarrow X \vdash X \vee \neg X \Leftarrow X \vdash X.$$

Пример 5.3. Построим вывод секвенции $\vdash \neg X \rightarrow (X \rightarrow Y)$:

$$\begin{aligned} \vdash \neg X \rightarrow (X \rightarrow Y) &\Leftarrow \neg X \vdash X \rightarrow Y \Leftarrow X, \neg X \vdash Y \Leftarrow \\ &\Leftarrow \neg X, X \vdash Y \Leftarrow X \vdash Y, X \Leftarrow X \vdash X, Y \Leftarrow X \vdash X. \end{aligned}$$

Структурные правила сокращения и перестановки означают, что в списках формул антецедента и сукцедента порядок не важен и формулы могут повторяться, т.е. эти списки есть просто конечные множества формул, которые могут записываться в любом порядке. Мы будем этим пользоваться для сокращения деревьев вывода: соответствующие формальности всегда можно восстановить.

Из рассмотренных примеров можно выделить некоторые простые правила, которые также можно использовать для сокращения вывода:

$$\frac{X, \Gamma \vdash \Delta}{\neg\neg X, \Gamma \vdash \Delta}, \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, X}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\neg X}, \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, X, Y}{\Gamma \vdash \Delta, X \vee Y}.$$

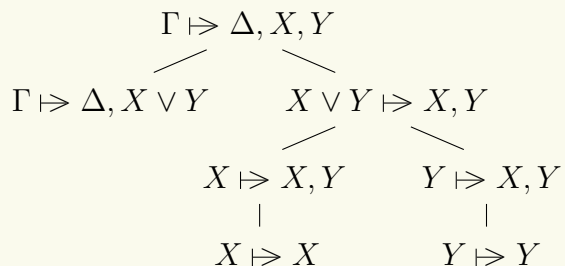
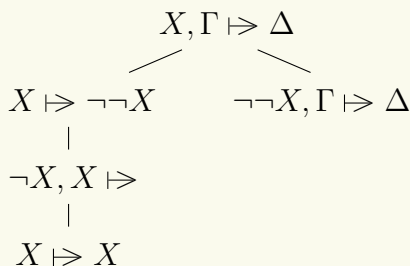
Действительно,

$$\begin{aligned} \neg\neg X, \Gamma \vdash \Delta &\Leftarrow \Gamma \vdash \Delta, \neg X \Leftarrow X, \Gamma \vdash \Delta \\ \Gamma \vdash \Delta, \neg\neg X &\Leftarrow \neg X, \Gamma \vdash \Delta \Leftarrow \Gamma \vdash \Delta, X \end{aligned}$$

(этот прием использован в примере 5.1) и

$$\Gamma \vdash \Delta, X \vee Y \Leftarrow \Gamma \vdash \Delta, X \vee Y, X \vee Y \Leftarrow \Gamma \vdash \Delta, X \vee Y, Y \Leftarrow \Gamma \vdash \Delta, X, Y$$

(этот прием использован в примере 5.2). Эти правила обратимы, что можно установить, используя правило сечения:



Установленные дополнительные правила показывают, что формулы можно свободно переносить из одной части секвенции в другую, навешивая знак отрицания или, наоборот, убирая его. Кроме того, из них следует, что выводимость секвенции $\Gamma \vdash Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ эквивалентна выводимости секвенции $\Gamma \vdash Y_1 \vee Y_2 \vee \dots \vee Y_m$, а выводимость секвенции $X_1, X_2, \dots, X_k \vdash \Delta$ эквивалентна выводимости $X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_k \vdash \Delta$. Последнее свойство аналогично следующему свойству теории **N**: существование частного вывода $X_1, X_2, \dots, X_n \vdash Y$ равносильно выводимости формулы $X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_n \rightarrow Y$. Это вытекает из двух правил теории **N**:

$$\frac{X_1, X_2, \Gamma \vdash Y}{X_1 \wedge X_2, \Gamma \vdash Y} \quad \text{и} \quad \frac{X_1 \wedge X_2, \Gamma \vdash Y}{X_1, X_2, \Gamma \vdash Y}.$$

Первое из этих правил — правило удаления конъюнкции, а второе может быть получено из правила введения конъюнкции с помощью сечения:

$$\begin{array}{c} \Gamma, X_1, X_2 \vdash Y \\ \swarrow \quad \searrow \\ X_1, X_2 \vdash X_1 \wedge X_2 \quad \Gamma, X_1 \wedge X_2 \vdash Y \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ X_1, X_2 \vdash X_1 \quad X_1, X_2 \vdash X_2 \end{array}$$

Мы видим, что вывод в технике естественного вывода в **N** и вывод в исчислении **GV** очень похожи. Это приводит к вопросу: как соотносятся утверждения $\Gamma \vdash Y$ из теории **N** и $\vdash (\Gamma \vdash Y)$ из теории **GV**?

Теорема 5.1. Если в теории **N** существует вывод $\Gamma \vdash Y$, то в теории **GV** существует вывод $\vdash (\Gamma \vdash Y)$.

◀ Доказательство строится на том, что каждое правило естественного вывода в теории **N** можно интерпретировать в рамках правил вывода теории **GV**, а также на том, что любой вывод в теории **N** можно получить в рамках техники естественного вывода. Последнее вытекает из доказательства полноты исчисления высказываний: теоремы 2.5 и 2.6 доказаны с помощью техники естественного вывода. Остановимся на вопросе интерпретации.

Закон тождества вытекает из аксиомы теории **GV** с учетом правила уточнения. Правила добавления, сокращения и перестановки гипотез сводятся к правилам уточнения сокращения и перестановки для антецедента в исчислении **GV**. Наконец, правило сечения теории **N** есть частный случай правила сечения теории **GV**. Таким образом, все структурные правила естественного вывода теории **N** интерпретируются в теории **GV**.

Правила введения импликации (теорема о дедукции), введения конъюнкции и введения дизъюнкции есть частные случаи введения соответствующего символа в сукцеденте (при $\Delta = \emptyset$). Правило удаления дизъюнкции также непосредственно сводится к введению дизъюнкции в антецеденте. Рассмотрим остальные правила естественного вывода.

Правило удаления импликации сводится к введению импликации в антецеденте:

$$\begin{array}{c} \Gamma \vdash Y \\ \swarrow \quad \searrow \\ \Gamma \vdash X \rightarrow Y \quad X \rightarrow Y, \Gamma \vdash Y \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ Y, \Gamma \vdash Y \quad \Gamma \vdash Y, X \\ | \quad | \\ Y \vdash Y \quad \Gamma \vdash X \end{array}$$

Правило удаления конъюнкции сводится к введению конъюнкции в антецеденте:

$$\Gamma, X_1 \wedge X_2 \vdash Y \Leftrightarrow \Gamma, X_1 \wedge X_2, X_1 \wedge X_2 \vdash Y \Leftrightarrow \Gamma, X_1, X_1 \wedge X_2 \vdash Y \Leftrightarrow \Gamma, X_1, X_2 \vdash Y.$$

Рассмотрим правило введения отрицания:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \vdash \neg X \\
 | \\
 X, \Gamma \vdash \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 Y \wedge \neg Y \vdash \quad X, \Gamma \vdash Y \wedge \neg Y \\
 | \qquad \swarrow \quad \searrow \\
 Y, \neg Y \vdash \quad \Gamma, X \vdash Y \quad \Gamma, X \vdash \neg Y \\
 | \\
 Y \vdash Y
 \end{array}$$

Правило удаления отрицания это одно из правил удаления двойного отрицания, установленных ранее.

Поскольку все правила естественного вывода интерпретируемы в исчислении GV , любой вывод $\Gamma \vdash Y$ в технике естественного вывода можно трансформировать в вывод секвенции $\Gamma \vdash Y$ в исчислении GV . ►

Теорема 5.2. Если в теории GV существует вывод $\vdash (\Gamma \vdash Y)$, то в теории N существует вывод $\Gamma \vdash Y$.

► Можно предложить два подхода к доказательству теоремы. Первый основан на интерпретации правил вывода теории GV в рамках правил естественного вывода теории N , как в предшествующей теореме. Более короткий второй подход, основанный на следующих соображениях. Можно показать непосредственной проверкой, что если $\vdash (\Gamma \vdash \Delta)$, где $\Gamma = X_1, X_2, \dots, X_n$, $\Delta = Y_1, Y_2, \dots, Y_m$, то формула $X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_n \rightarrow Y_1 \vee Y_2 \vee \dots \vee Y_m$ является тавтологией. На основании этого сразу делаем вывод, что если $\vdash (\Gamma \vdash Y)$, то формула $X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_n \rightarrow Y$ выводима в теории N , т.е. существует частный вывод $\Gamma \vdash Y$. Последний переход базируется на применении правил удаления конъюнкции и удаления импликации. ►

Еще в исчислении N было отмечено, что правило сечения является излишним и может быть заменено комбинацией правил введения и удаления импликации:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma, \Delta \vdash X \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \Gamma, \Delta \vdash Y \quad \Gamma, \Delta \vdash Y \rightarrow X \\
 | \qquad \qquad | \\
 \Delta \vdash Y \quad \Gamma, \Delta, Y \vdash X \\
 \qquad \qquad | \\
 \qquad \qquad \Gamma, Y \vdash X
 \end{array}$$

В исчислении GV нет правила modus ponens и таким способом избавиться от правила сечения не удастся. Однако генценовскому исчислению можно придать важное свойство, из которого следует, что любой вывод в этом исчислении можно строить без использования правила сечения.

Генценовские правила (структурные не в счет) устроены таким образом, что при построении дерева вывода мы из невыводимой (иными словами, ложной) секвенции получаем невыводимую секвенцию в одной из ветвей. Однако обратное утверждение, во всяком случае для исходных правил, неверно: наличие невыводимой секвенции внизу дерева еще не означает, что и корень дерева есть невыводимая секвенция. Причиной тому правила введения конъюнкции в антецеденте и дизъюнкции в сукцеденте. Но их можно усилить, заменив правилами

$$\frac{X, Y, \Gamma \vdash \Delta}{X \wedge Y, \Gamma \vdash \Delta} \quad \text{и} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, X, Y}{\Gamma \vdash \Delta, X \vee Y}.$$

После этого все восемь логических правил исчисления **GV** окажутся сбалансированными: выводимость секвенций в числителе правила будет равносильна выводимости секвенции в знаменателе (речь пока не идет о том, как строится такой вывод).

С введением этих усиленных правил вывод превращается в простую разборку формул антецедента и сукцедента. Если, например, в антецеденте стоит формула $X = U \rightarrow W$, $X = U \wedge W$, $X = U \vee W$ или $X = \neg U$, то применением соответствующего правила в антецеденте формула X заменяется подформулами U и W . Повторяя этот процесс, мы в результате придем к дереву, у которого в листьях имеются лишь элементарные формулы, т.е. пропозициональные переменные. Секвенция $\Gamma \vdash \Delta$, у которой все формулы элементарные является истинной в том и только в том случае, когда списки Γ и Δ имеют общую переменную. Выводимость исходной секвенции в свете вышесказанного означает выводимость всех таких элементарных секвенций, т.е. во всех элементарных секвенциях есть одинаковые переменные и слева, и справа. Но такие секвенции — простейшее следствие соответствующей аксиомы, получаемое с помощью правила уточнения. Описанный вывод не использует, как видно правила сечения — только три первые пары структурных правил.

Итак, нами, по существу доказан следующий факт.

Теорема 5.3 (теорема Генцена об устранении сечения). Если в исчислении **GV** секвенция $\Gamma \vdash \Delta$ выводима, то существует вывод этой секвенции, в котором не используется правило сечения.

5.2. Исчисление **GP**

Генценовское исчисление предикатов строится как расширение генценовского исчисления высказываний. Мы выбираем любой логико-математический язык и с помощью пары списков формул Γ и Δ строим формулы вида $\Gamma \vdash \Delta$ называя их секвенциями. Для этих секвенций оставляем в силе единственную схему аксиом $X \vdash X$ и все пятнадцать правил вывода. Кроме того, добавляются еще четыре правила вывода, связанные с кванторами:

$$\begin{array}{ll} 5. \text{ Введение } \forall & \forall \vdash: \frac{\Gamma \vdash \Delta, X}{\Gamma \vdash \Delta, \forall y X_y^x} \quad \vdash \forall: \frac{X_t^x, \Gamma \vdash \Delta}{\forall x X, \Gamma \vdash \Delta} \\ 6. \text{ Введение } \exists & \exists \vdash: \frac{\Gamma \vdash \Delta, X_t^x}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x X} \quad \vdash \exists: \frac{X, \Gamma \vdash \Delta}{\exists y X_y^x, \Gamma \vdash \Delta} \end{array}$$

Здесь те же ограничения, что и в исчислении **P**: подстановка $x \rightarrow t$ свободна для X ; В формулах введения $\forall$ слева и $\exists$ справа переменная x не имеет свободных вхождений в формулы списков Γ и Δ и если $y \neq x$, то y не входит свободно в X .

Пример 5.4. Построим в **GP** вывод секвенции $\vdash \neg \exists x Y(x) \rightarrow \forall x \neg Y(x)$. Вывод строим в виде дерева

$$\begin{array}{c} \vdash \neg \exists x Y(x) \rightarrow \forall x \neg Y(x) \\ | \\ \neg \exists x Y(x) \vdash \forall x \neg Y(x) \\ | \\ \vdash \exists x Y(x), \forall x \neg Y(x) \\ | \\ \vdash \exists x Y(x), \neg Y(x) \\ | \\ Y(x) \vdash \exists x Y(x) \\ | \\ Y(x) \vdash Y(x) \end{array}$$

Пример 5.5. Построим в **GP** вывод секвенции $\vdash \forall x \forall y (X(x) \wedge Y(y)) \rightarrow Y_x^y$:

$$\begin{array}{c}
 \vdash \forall x \forall y (X(x) \wedge Y(y)) \rightarrow Y_x^y \\
 | \\
 \forall x \forall y (X(x) \wedge Y(y)) \vdash Y_x^y \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \forall x \forall y (X(x) \wedge Y(y)) \vdash \forall y Y(y) \quad \forall y Y(y) \vdash Y_x^y \\
 | \quad | \\
 \forall x \forall y (X(x) \wedge Y(y)) \vdash Y(y) \quad Y_x^y \vdash Y_x^y \\
 | \quad | \\
 \forall y (X(x) \wedge Y(y)) \vdash Y(y) \quad Y_x^y \vdash Y_x^y \\
 | \quad | \\
 X(x) \wedge Y(y) \vdash Y(y) \quad Y_x^y \vdash Y_x^y \\
 | \quad | \\
 Y(y) \vdash Y(y) \quad Y_x^y \vdash Y_x^y
 \end{array}$$

В этом выводе использовано правило сечения. Однако вспомним исчисление **GV**, в котором правило сечения можно не использовать. Покажем, как можно построить вывод той же секвенции без правила сечения. Первый шаг, как и в предыдущем выводе (введение импликации в сукцеденте), а затем последовательно разбираем формулы (использована „чистая“ переменная z):

$$\begin{array}{c}
 \vdash \forall x \forall y (X(x) \wedge Y(y)) \rightarrow Y_x^y \\
 | \\
 \forall x \forall y (X(x) \wedge Y(y)) \vdash Y_x^y \\
 | \\
 \forall y (X_z^x \wedge Y(y)) \vdash Y_x^y \\
 | \\
 X_z^x \wedge Y_x^y \vdash Y_x^y \\
 | \\
 Y_x^y \vdash Y_x^y
 \end{array}$$

Как видим, что действует в основном тот же принцип, что и в исчислении высказываний, но несколько усложненный сменой переменных при снятии кванторов. Здесь использовано свойство $(X_z^x)_x = X(x)$ (обратимость правильной подстановки переменной вместо переменной).

Остановимся на связи между теориями **P** и **GP**. Естественно рассчитывать, что установленная связь между двумя исчислениями высказываний в каком-то виде сохранится и для исчисления предикатов.

Теорема 5.4. Пусть Γ — список формул, а X — формула в логико-математическом языке. Тогда если $\Gamma \vdash X$ в исчислении **P**, то $\vdash (\Gamma \vdash X)$ в исчислении **GP**. В частности, если $\vdash X$ в исчислении **P**, то $\vdash (\vdash X)$ в исчислении **GP**.

◀ Это утверждение доказывается так же, как и аналогичное утверждение для исчислений высказываний. Более того, „высказывательное“ утверждение — составная часть предикатного. Нам необходимо дать интерпретацию правил естественного вывода в рамках правил вывода генценовского исчисления. Для правил исчисления высказываний такая интерпретация уже дана. Остается разобраться с четырьмя дополнительными правилами, связанными с кванторами. Три из этих правил — очевидные следствия трех правил вывода генценовской формальной системы. Остановимся на последнем правиле $\frac{\Gamma \vdash \forall x X}{\Gamma \vdash X_t^x}$. Для него строим дерево вывода на основе правила сечения:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \vdash X_t^x \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \Gamma \vdash \forall x X \quad \forall x X \vdash X_t^x \\
 \quad | \\
 \quad X_t^x \vdash X_t^x
 \end{array}$$

Учитывая, что все правила естественного вывода могут быть реализованы в рамках правил вывода исчисления **GP**, делаем заключение о верности утверждения теоремы. ►

Теорема 5.5. Пусть Γ — список формул, а X — формула в логико-математическом языке. Тогда если $\vdash (\Gamma \Rightarrow X)$ в исчислении **GP**, то $\Gamma \vdash X$ в исчислении **P**. В частности, если $\vdash (\Rightarrow X)$ в исчислении **GP**, то $\vdash X$ в исчислении **P**.

◄ Доказательство можно построить на тех же принципах, что и доказательство аналогичной теоремы¹ 5.2. Можно показать, что если в исчислении **GP** выводима секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$, где $\Gamma = X_1, X_2, \dots, X_n$, $\Delta = Y_1, Y_2, \dots, Y_m$, то формула $X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_n \rightarrow Y_1 \wedge Y_2 \wedge \dots \wedge Y_m$ является тавтологией. В частности, при $m = 1$ из выводимости в **GP** секвенции $\Gamma \Rightarrow Y$ следует, что $X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_n \rightarrow Y$ есть тавтология и, значит, выводима в **P**. Но тогда имеет место выводимость $X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_n \vdash Y$, откуда получаем выводимость $\Gamma \vdash Y$. ►

¹Но здесь есть один изъян: надо еще доказать, что выводимость любой тавтологии можно обосновать средствами правил естественного вывода.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Алгебра высказываний	2
1.1. Введение	2
1.2. Алгебра логики	4
1.3. Тавтологии и эквивалентность формул	6
1.4. Функции алгебры логики	10
2. Исчисление высказываний	15
2.1. Основные положения теории N	15
2.2. Правила естественного вывода	17
2.3. Глобальные свойства теории N	22
3. Алгебра предикатов	27
3.1. Предикаты и кванторы	27
3.2. Логико-математические языки	28
3.3. Переименования и подстановки	31
3.4. Семантика логико-математического языка	34
3.5. Логические законы	36
3.6. Замены	39
3.7. Упрощение формул	41
4. Исчисление предикатов	43
4.1. Построение теории P	43
4.2. Правила естественного вывода	44
4.3. Глобальные свойства теории P	46
5. Генценовские формальные системы	54
5.1. Исчисление GV	54
5.2. Исчисление GP	58
6. Примеры формальных теорий	61
6.1. Теория групп	61
6.2. Формальная арифметика	64
7. Метод резолюций	70
7.1. Скулемовские функции	70
7.2. Метод резолюций для исчисления высказываний	72
7.3. Метод резолюций для исчисления предикатов	75