

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Конспект лекций

Для студентов кафедры ИУ9

Москва
2009

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

2. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Напомним, что полностью формализованная математическая теория (*исчисление*) выглядит так. Имеется некоторый язык, позволяющий составлять правильные слова-формулы, которые отражают возможные утверждения теории. Есть некоторый набор формул, изначально объявленных истинными (это аксиомы). Кроме того, задан некоторый набор правил преобразования формул, которые позволяют из истинных формул получать новые истинные формулы. Все истинные утверждения теории получаются путем формальных преобразований формул в рамках узаконенных правил преобразований. Цепочка последовательных преобразований называется **выводом**. В полностью формализованной теории утрачивается содержательный смысл формул, а все построение теории превращается в манипуляции заданными символами.

Алгебра высказываний — это содержательная теория, все ее суждения устанавливаются на базе истинностных функций, которые никак не отражаются в языке алгебры высказываний.

Полная формализация алгебры высказываний устанавливает связь получения тех или иных утверждений с реальным процессом умозаключений, который и представляет собой подлинное математическое доказательство. Кроме того, алгебра высказываний в основном сводится к теории булевых функций, т.е. к исследованию конечных объектов. Поэтому исчисление высказываний — одно из самых простых и в этом смысле удобно как иллюстрация современного подхода к формализации в математике.

Любая теория имеет множество вариантов формализации. В рамках логики высказываний мы остановимся на одном из этих вариантов, который назовем *теорией N*.

2.1. Основные положения теории N

Язык теории *N*. Аксиомы (их одиннадцать): 1) $X \rightarrow (Y \rightarrow X)$; 2) $X \rightarrow Y \rightarrow (X \rightarrow (Y \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Z))$; 3) $X \wedge Y \rightarrow X$; 4) $X \wedge Y \rightarrow Y$; 5) $(X \rightarrow Y) \rightarrow ((X \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Y \wedge Z))$; 6) $X \rightarrow X \vee Y$; 7) $Y \rightarrow X \vee Y$; 8) $X \rightarrow Z \rightarrow (Y \rightarrow Z \rightarrow (X \vee Y \rightarrow Z))$; 9) $X \rightarrow Y \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)$; 10) $\neg \neg X \rightarrow X$; 11) $X \rightarrow \neg \neg X$. Правило вывода $\frac{X, X \rightarrow Y}{Y}$ (modus ponens). Вывод в теории *N*. Вывод из гипотез. Пример: $X \rightarrow X$. Дерево вывода.

Язык теории *N* — это язык алгебры высказываний. В теории *N* одиннадцать **схем аксиом**. Схема аксиом отличается от аксиомы тем, что в ней используются не конкретные переменные, а символы подстановки, вместо которых могут подставляться конкретные формулы теории. При выборе вместо символов подстановки конкретных формул мы получаем конкретную аксиому. Отметим, что можно было бы избежать схем аксиом, но тогда придется вводить дополнительные правила вывода, которые позволили бы „размножить“ аксиому.

Итак, сформулируем одиннадцать схем аксиом теории *N*:

- | | |
|--|---|
| 1) $X \rightarrow (Y \rightarrow X)$; | 7) $Y \rightarrow X \vee Y$; |
| 2) $X \rightarrow Y \rightarrow (X \rightarrow (Y \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Z))$; | 8) $X \rightarrow Z \rightarrow (Y \rightarrow Z \rightarrow (X \vee Y \rightarrow Z))$; |
| 3) $X \wedge Y \rightarrow X$; | 9) $X \rightarrow Y \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)$; |
| 4) $X \wedge Y \rightarrow Y$; | 10) $\neg \neg X \rightarrow X$; |
| 5) $(X \rightarrow Y) \rightarrow ((X \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Y \wedge Z))$; | 11) $X \rightarrow \neg \neg X$. |
| 6) $X \rightarrow X \vee Y$; | |

В теории N всего одно правило вывода — правило заключения (modus ponens):

$$\frac{X, X \rightarrow Y}{Y}.$$

Представленная запись означает, что из двух „правильных“ формул вида X и $X \rightarrow Y$ вытекает „правильная“ формула Y .

После введения языка, аксиом и правил вывода формальная теория готова. Дальше можно начинать „игру в слова“ и получать теоремы (т.е. выводимые формулы) этой теории. На этом, собственно, заканчивается формальная часть и начинается неформальная, т.е. метатеория. Основной вопрос: что дает формальная теория в качестве выводимых формул. Отметим, что добросовестный вывод даже простых теорем оказывается весьма трудоемким, и следует прибегать к приему, хорошо известному математикам: использовать уже выведенные теоремы наравне с аксиомами.

Выводом теории N будем называть последовательность формул $X_1, X_2, \dots, X_n$, в которой каждая формула X_i есть либо аксиома, либо получена из каких-либо предшествующих формул X_k, X_m ($k, m < i$) по правилу modus ponens. Формула X называется выводимой в теории N , если она является конечной формулой некоторого вывода. Этот факт будем обозначать следующим образом: $\vdash X$.

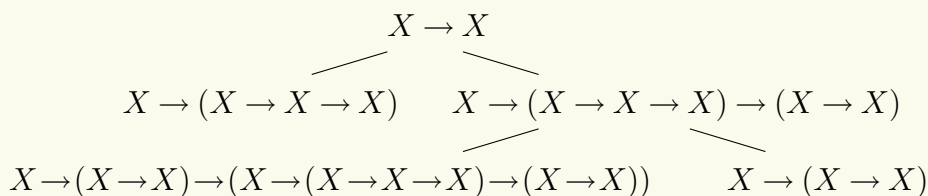
Для нас будет важен условный вывод, или вывод из гипотез, при котором некоторые формулы мы предполагаем истинными и на основании этого строим вывод. Такой условный вывод играет промежуточную роль, позволяя рассматривать отдельные части окончательного вывода. Кроме того, условный вывод можно рассматривать как построение вывода из нелогических аксиом, которые присутствуют во всех математических теориях (они характеризуют основные положения теории). Далее большими греческими буквами будем обозначать списки формул теории N .

Выводом из гипотез Γ в теории N будем называть последовательность формул, в которой каждая формула есть либо аксиома, либо формула из списка Γ , либо она получена из предшествующих формул по правилу modus ponens. При этом конечная формула X любого вывода из гипотез Γ называется **выводимой из гипотез** Γ , что обозначается следующим образом: $\Gamma \vdash X$.

Пример 2.1. Построим вывод формулы $X \rightarrow X$, где X — какая-либо формула теории N :

- 1) из схемы 1 получаем аксиому $X \rightarrow (X \rightarrow X)$;
- 2) из схемы 2, заменяя Z на X и Y на $X \rightarrow X$, получаем аксиому $X \rightarrow (X \rightarrow X) \rightarrow (X \rightarrow (X \rightarrow X \rightarrow X))$;
- 3) из двух предыдущих формул по правилу вывода $X \rightarrow (X \rightarrow X \rightarrow X) \rightarrow (X \rightarrow X)$;
- 4) из схемы 1 при $X \rightarrow X$ взамен Y получаем аксиому $X \rightarrow (X \rightarrow X \rightarrow X)$;
- 5) из двух последних формул по правилу вывода $X \rightarrow X$.

Следует заметить, что фактически вывод представляет собой особую структуру — дерево: каждая формула вывода есть либо аксиома или гипотеза (лист дерева, начальный элемент структуры), либо имеет предшественников, из которых она получена по правилу вывода. Для формулы $X \rightarrow X$ из последнего примера дерево вывода имеет следующий вид:



2.2. Правила естественного вывода

Теорема о дедукции: если $\Gamma, X \vdash Y$, то $\Gamma \vdash X \rightarrow Y$. Структурные правила естественного вывода. Логические правила естественного вывода. Дополнительные правила естественного вывода: присоединение посылки; закон противоречия; двойное отрицание; доказательство от противного; удаление конъюнкции справа. Обобщенное правило введения дизъюнкции.

Одна из целей введения исчисления высказываний — анализ используемой практики построения доказательств. В качестве единственного правила вывода в теории взято правило *modus ponens*, в то время как построение доказательств на практике использует и многие другие правила: правило исключенного третьего, доказательство от противного и т.п. Оказывается, что все подобные правила можно получить из аксиом исчисления высказываний и правила *modus ponens*.

Веденный символ $\vdash$ выводимости в исчислении высказываний позволяет строить формулы нового типа $\Gamma \vdash X$, которые на содержательном уровне можно интерпретировать так: „если истинны формулы списка Γ , то истинна формула X . Это формулы метаязыка, позволяющие упростить процесс установления того, выводима данная формула или нет. Само правило *modus ponens* можно трактовать как формулу $X, X \rightarrow Y \vdash Y$. Формулу вида $\Gamma \vdash X$ будем называть **секвенцией**. Секвенция — это логическая формула, которая может быть истинной или нет.

Чтобы приблизиться к общепринятой практике доказательств, выведем в теории ***N*** ряд дополнительных правил, называемых **правилами естественного вывода**. Следующая теорема дает основополагающее правило естественного вывода, в некотором смысле обращающее правило *modus ponens*. Фактически эта теорема представляет собой утверждение об эквивалентности символа импликации $\rightarrow$ и символа выводимости $\vdash$.

Теорема 2.1 (теорема о дедукции). Если $\Gamma, X \vdash Y$, то $\Gamma \vdash X \rightarrow Y$.

◀ Доказательство строится на анализе последовательности вывода. Фактически надо показать, что для любого вывода $Z_1, Z_2, \dots, Z_n = Y$ из гипотез Γ, X существует вывод из гипотез Γ формулы $X \rightarrow Y$. Доказательство проведем индукцией по длине вывода.

При $n = 1$ конечная формула вывода $Z_n = Y$ есть либо аксиома, либо формула из списка Γ , либо формула X (правило *modus ponens* в данном случае не применялось, так как длина вывода меньше двух). В первом и втором случаях строим последовательность формул $Y, Y \rightarrow (X \rightarrow Y)$ (аксиома схемы 1), $X \rightarrow Y$ (*modus ponens*), которая является выводом формулы X и списка гипотез Γ . В третьем случае $X = Y$ и формула $X \rightarrow Y$ совпадает с выводимой формулой $X \rightarrow X$ (см. пример 2.1). Таким образом, при $n = 1$ утверждение доказано.

Предположим, что утверждение доказано для всех формул Y , имеющих вывод из гипотез Γ, X длины менее n . Рассмотрим произвольный вывод $Z_1, Z_2, \dots, Z_n = Y$. Формула Y есть либо аксиома, либо формула из списка Γ , либо X , либо получена по правилу *modus ponens*. В первых трех случаях рассуждения те же, что и при $n = 1$ (в выводе можно оставить только последнюю формулу и свести дело к $n = 1$). Рассмотрим случай, когда Y получена по правилу *modus ponens* из формул Z_k и Z_j . В этом случае одна из формул, например Z_j , есть импликация $Z_k \rightarrow Y$. В соответствии с индукционным предположением из гипотез Γ выводимы формулы $X \rightarrow Z_k$ и $X \rightarrow (Z_k \rightarrow Y)$. Объединим два этих вывода, удалив из списка повторения формул, если они есть*. Дополняем полученное объединение следующими тремя формулами:

$X \rightarrow Z_k \rightarrow (X \rightarrow (Z_k \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Y))$ (аксиома схемы 2);

$X \rightarrow (Z_k \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Y)$ (*modus ponens*);

$X \rightarrow Y$ (*modus ponens*).

В результате получаем вывод формулы $X \rightarrow Y$ из гипотез Γ . В соответствии с методом математической индукции утверждение теоремы доказано для конечной формулы любого вывода из гипотез Γ, X . ►

* По определению в выводе каждая формула есть либо аксиома, либо гипотеза, либо выводится из предыдущих по правилу *modus ponens*, т.е. формулы в выводе, строго говоря, могут повторяться. Однако ясно, что повторения можно убрать, не нарушая связей в выводе.

Следующая теорема устанавливает пять правил, называемых **структурными правилами естественного вывода**. Правила сформулированы не для формул языка алгебры высказываний, а для секвенций. Они позволяют из уже известных выводимостей получать новые. При этом соответствующий вывод на самом деле не строится, а лишь формулируется заключение о существовании такого вывода.

Теорема 2.2. Для любых списков формул Γ и Δ и любых формул X, Y, Z истинны следующие секвенции:

- 1) $\Gamma, X, \Delta \vdash X$ (закон тождества);
- 2) $\frac{\Gamma \vdash X}{\Gamma, \Delta \vdash X}$ (правило добавления гипотез);
- 3) $\frac{\Gamma, Y, Y, \Delta \vdash X}{\Gamma, Y, \Delta \vdash X}$ (правило сокращения гипотез);
- 4) $\frac{\Gamma, Y, Z, \Delta \vdash X}{\Gamma, Z, Y, \Delta \vdash X}$ (правило перестановки гипотез);
- 5) $\frac{\Delta \vdash Y; \Gamma, Y \vdash X}{\Gamma, \Delta \vdash X}$ (правило сечения).

Правила, обозначенные в теореме, — элементарные следствия из определения понятия „вывод из гипотез“ и лишь фиксируют очевидное.

Отметим также очевидный факт, что мы можем произвольно вводить аксиомы в список Γ гипотез или выводить аксиомы из списка, не меняя сути. первое вытекает из правила добавления гипотез, а второе утверждение можно получить как формальное следствие правила сечения:

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma \vdash X & \\ / & & \backslash \\ \Gamma, Y \vdash X & & \vdash Y \end{array}$$

Следующая теорема вводит так называемые **логические правила естественного вывода**, описывающие некоторые общепринятые приемы проведения математических доказательств.

Теорема 2.3. Для любого списка формул Γ и любых формул X, Y, Z верны следующие утверждения:

- 1) $\frac{\Gamma, Y \vdash X}{\Gamma \vdash Y \rightarrow X}$ (введение импликации, теорема о дедукции);
- 2) $\frac{\Gamma \vdash X; \Gamma \vdash X \rightarrow Y}{\Gamma \vdash Y}$ (удаление импликации, modus ponens);
- 3) $\frac{\Gamma \vdash X; \Gamma \vdash Y}{\Gamma \vdash X \wedge Y}$ (введение конъюнкции);
- 4) $\frac{\Gamma, X, Y \vdash Z}{\Gamma, X \wedge Y \vdash Z}$ (удаление конъюнкции);
- 5) $\frac{\Gamma \vdash X}{\Gamma \vdash X \vee Y}$ и $\frac{\Gamma \vdash X}{\Gamma \vdash Y \vee X}$ (введение дизъюнкции);
- 6) $\frac{\Gamma, X \vdash Z; \Gamma, Y \vdash Z}{\Gamma, X \vee Y \vdash Z}$ (удаление конъюнкции, правило разбора случаев);
- 7) $\frac{\Gamma, X \vdash Y; \Gamma, X \vdash \neg Y}{\Gamma \vdash \neg X}$ (введение отрицания);
- 8) $\frac{\Gamma \vdash \neg \neg X}{\Gamma \vdash X}$ (удаление отрицания).

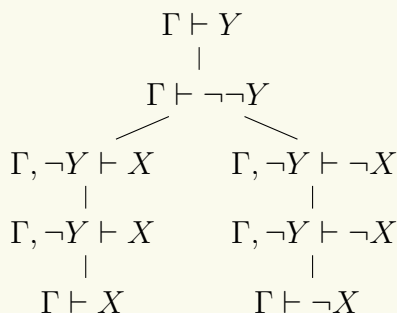
◀ Первые два правила — это теорема о дедукции и правило modus ponens в применении к выводу из гипотез. В самом деле, объединив выводы из Γ формул X и $X \rightarrow Y$, получим последовательность, в которой есть эти формулы. Применив modus ponens, получим Y , которую добавим в конец последовательности формул. Получим вывод Y из Γ .

Для доказательства правила 3 для произвольно заданных формул X и Y используем какую-либо аксиому T и аксиому $T \rightarrow X \rightarrow (T \rightarrow Y \rightarrow (T \rightarrow X \wedge Y))$ схемы 5. Из выводимости формул X

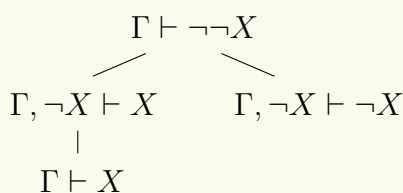
Отметим, что из схемы 11 вытекает правило, обратное к правилу 8: $\frac{\Gamma \vdash X}{\Gamma \vdash \neg \neg X}$.

$$\begin{array}{c} \Gamma \vdash Y \rightarrow X \\ | \\ \Gamma, Y \vdash X \\ | \\ \Gamma \vdash X \end{array}$$

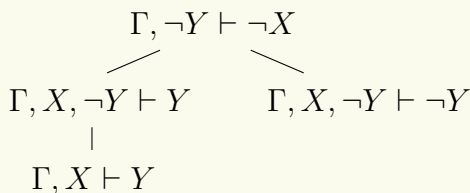
б. Правило $\frac{\Gamma \vdash X; \Gamma \vdash \neg X}{\Gamma \vdash Y}$ (закон противоречия) вытекает из правила введения отрицания добавлением гипотез:



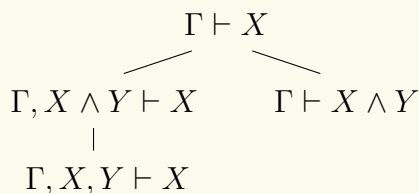
в. Правило введения двойного отрицания $\frac{\Gamma \vdash X}{\Gamma \vdash \neg \neg X}$ может быть получено из схемы аксиом 11. Его можно также вывести из правил естественного вывода:



г. Полезно правило $\frac{\Gamma, X \vdash Y}{\Gamma, \neg Y \vdash \neg X}$ доказательства от противного, которого вытекает из правила введения отрицания:



д. Правила $\frac{\Gamma \vdash X \wedge Y}{\Gamma \vdash X}$ и $\frac{\Gamma \vdash X \wedge Y}{\Gamma \vdash Y}$ удаления конъюнкции справа вытекают из правила удаления конъюнкции (но также могут быть получены из схем аксиом 6 и 7). Например, первое из этих правил получается применением правила сечения и правила удаления конъюнкции:



Второе правило удаления конъюнкции справа можно получить аналогично. #

Правила естественного вывода и их следствия позволяют доказать выводимость широкого круга секвенций. Однако отметим, что наиболее тяжело устанавливаются выводимости вида $\Gamma \vdash X \vee Y$. Правило введения дизъюнкции сводит задачу к выводу более сильного утверждения $\Gamma \vdash X$ или $\Gamma \vdash Y$.

Пример 2.3. На практике для доказательства утверждения вида $X \vee Y$ можно рассуждать так: „пусть X не верно, т.е. истинно $\neg X$. Докажем, что тогда истинно Y .“ Этому варианту рассуждений соответствуют правила $\frac{\Gamma, \neg X \vdash Y}{\Gamma \vdash X \vee Y}$ и $\frac{\Gamma, \neg Y \vdash X}{\Gamma \vdash X \vee Y}$, которые можно получить и в исчислении высказываний. Для этого достаточно использовать правило введения отрицания и

правило доказательства от противного:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \vdash X \vee Y \\
 | \\
 \Gamma \vdash \neg\neg(X \vee Y) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \Gamma, \neg(X \vee Y) \vdash X \quad \Gamma, \neg(X \vee Y) \vdash \neg X \\
 | \qquad \qquad \qquad | \\
 \Gamma, \neg(X \vee Y) \vdash \neg\neg X \quad \Gamma, X \vdash X \vee Y \\
 | \qquad \qquad \qquad | \\
 \Gamma, \neg X \vdash X \vee Y \quad \Gamma, X \vdash X \\
 | \qquad \qquad \qquad | \\
 \Gamma, \neg X \vdash Y
 \end{array}$$

Это правило назовем *обобщенным правилом введения дизъюнкции*.

2.3. Глобальные свойства теории N

Выводимые формулы и тавтологии. Непротиворечивость теории N . Полнота теории N . Разрешимость теории N . Независимость аксиом в теории N .

Остановимся на описании множества выводимых формул в теории N . Нетрудно убедиться в том, что все аксиомы этой теории являются тавтологиями. Например, любая аксиома, полученная по схеме 1, может быть получена подстановкой формул в тавтологию $x \rightarrow (y \rightarrow x)$, а потому сама является тавтологией (следствие 1.1).

Если формулы X и $X \rightarrow Y$ являются тавтологиями, то правило modus ponens приводит к формуле Y , также являющейся тавтологией (теорема 1.1). Это означает, что в любом выводе все формулы являются тавтологиями, поскольку либо являются аксиомами, либо получены из тавтологий по правилу modus ponens (аккуратное доказательство может быть проведено методом математической индукции по длине вывода). Можно также утверждать, что если в списке Γ все формулы — тавтологии, то и все формулы, выводимые из гипотез Γ , также будут тавтологиями.

Теорема 2.4. Любая формула, выводимая в теории N , является тавтологией. #

Итак, множество формул, выводимых в теории N содержится в множестве всех тавтологий. На самом деле оба множества совпадают. Чтобы это доказать, установим одно вспомогательное утверждение. Как и в случае булевых функций для произвольной пропозициональной переменной x введем обозначение x^σ , $\sigma \in \mathbb{B}$, полагая, что $x^1 = x$ и $x^0 = \neg x$.

Теорема 2.5. Пусть Y — формула, построенная на переменных $x_1, \dots, x_n$, $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ — истинностная функция формулы Y , $\alpha_i \in \mathbb{B}$, $i = \overline{1, n}$, — набор истинностных значений для переменных $x_1, \dots, x_n$. Если $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$, то имеет место выводимость $x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n} \vdash Y$. Если $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$, то имеет место выводимость $x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n} \vdash \neg Y$.

◀ Доказательство строится индукцией по построению формулы. В этом случае базис индукции относится к элементарным формулам, т.е. к переменным. Пусть $Y = x$ и задано истинностное значение α . При $\alpha = 1$ имеем $x^\alpha = x$, $Y = x$, и севенция $x^\alpha \vdash Y$ истинна, поскольку и левая, и правая части секвенции — одна и та же формула. При $\alpha = 0$ имеем $x^\alpha = \neg x$, $\neg Y = \neg x$, и истинной является секвенция $x^\alpha \vdash \neg Y$.

Чтобы доказать шаг индукции, необходимо в предположении, что утверждение верно для формул Z и W , установить его истинность для формул $(Z \vee W)$, $(Z \wedge W)$, $(Z \rightarrow W)$ и $(\neg Z)$. Пусть $z_1, \dots, z_n$ — общий список переменных формул Z и W .

Рассмотрим случай $Y = Z \wedge W$. Для заданного набора α значений $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ введем обозначение $\Gamma = x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}$. Предположим, что на наборе α истинностные функции f_Z и

f_W принимают значение 1. Тогда по индуктивному предположению имеем $\Gamma \vdash Z$ и $\Gamma \vdash W$, откуда по правилу введения конъюнкции получаем выводимость $\Gamma \vdash Y$, так как $Y = Z \wedge W$. Пусть одна из истинностных функций, например f_Z , принимает значение 0. Тогда имеет место выводимость $\Gamma \vdash \neg Z$. Используя правила естественного вывода, получаем

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \vdash \neg(Z \wedge W) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \Gamma, Z \wedge W \vdash \neg Z \quad \Gamma, Z \wedge W \vdash Z \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 \Gamma, Z, W \vdash \neg Z \quad \Gamma, Z, W \vdash Z \\
 \downarrow \\
 \Gamma \vdash \neg Z
 \end{array}$$

В результате получена выводимость $\Gamma \vdash \neg Y$, поскольку $\neg Y = \neg(Z \wedge W)$.

Рассмотрим случай $Y = Z \vee W$. Опять выберем набор значений α и введем, как и выше, обозначение Γ . Если одна из функций f_Z f_W на наборе α имеет значение 1, например $f_Z(\alpha) = 1$, то по индуктивному предположению имеет место выводимость $\Gamma \vdash Z$. Отсюда сразу получаем выводимость $\Gamma \vdash Z \vee W = Y$ в силу правила введения дизъюнкции. Осталось рассмотреть вариант $f_Z(\alpha) = f_W(\alpha) = 0$. В этом варианте $f_Y(\alpha) = f_Z(\alpha) \vee f_W(\alpha) = 0$ и, значит, нужно установить выводимость $\Gamma \vdash \neg Y$ исходя из индуктивных предположений $\Gamma \vdash \neg Z$ и $\Gamma \vdash \neg W$. Имеем:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \vdash \neg(Z \vee W) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \Gamma, Z \vee W \vdash U \quad \Gamma, Z \vee W \vdash \neg U \\
 \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\
 \Gamma, Z \vdash U \quad \Gamma, W \vdash U \quad \Gamma, Z \vdash \neg U \quad \Gamma, W \vdash \neg U
 \end{array}$$

В результате требуемая секвенция оказалась сведена к четырем однотипным секвенциям, в которых выбор формулы U (соответственно $\neg U$) не имеет значения. Истинность всех четырех секвенций устанавливается по единому сценарию с помощью закона противоречия. Рассмотрим, например, первую из них:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma, Z \vdash U \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \Gamma, Z \vdash Z \quad \Gamma, Z \vdash \neg Z \\
 \downarrow \\
 \Gamma \vdash \neg Z
 \end{array}$$

Рассмотрим случай $Y = Z \rightarrow W$. Выделим вариант $f_W(\alpha) = 1$. В этом варианте $f_Y(\alpha) = 1$ и нужно установить выводимость $\Gamma \vdash Z \rightarrow W$ исходя из $\Gamma \vdash W$. Это верно в силу правила присоединения посылки. Пусть $f_Z(\alpha) = 1$, $f_W(\alpha) = 0$. Тогда $f_Y(\alpha) = 0$, и нужно установить выводимость $\Gamma \vdash \neg(Z \rightarrow W)$ исходя из $\Gamma \vdash Z$ и $\Gamma \vdash \neg W$. Это можно сделать следующим образом:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma \vdash \neg(Z \rightarrow W) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \Gamma, Z \rightarrow W \vdash W \quad \Gamma, Z \rightarrow W \vdash \neg W \\
 \swarrow \quad \searrow \quad \downarrow \\
 \Gamma, Z \rightarrow W \vdash Z \quad \Gamma, Z \rightarrow W \vdash Z \rightarrow W \quad \Gamma \vdash \neg W \\
 \downarrow \\
 \Gamma \vdash Z
 \end{array}$$

Пусть $f_Z(\alpha) = 0$, $f_W(\alpha) = 0$. Тогда $f_Y(\alpha) = 1$, и требуется установить $\Gamma \vdash Z \rightarrow W$ исходя из $\Gamma \vdash \neg Z$ и $\Gamma \vdash \neg W$. Из первой секвенции добавлением гипотезы получаем $\Gamma, Z \vdash \neg Z$, что с очевидной секвенцией $\Gamma, Z \vdash Z$ по закону противоречия приводит к выводимости $\Gamma, Z \vdash W$ и далее по правилу введения импликации к $\Gamma \vdash Z \rightarrow W$.

Рассмотрим случай $Y = \neg Z$. Если $f_Z(\alpha) = 1$, то $f_Y(\alpha) = 0$ и $\Gamma \vdash Z$. Введением отрицания получаем $\Gamma \vdash \neg \neg Z = \neg Y$. Аналогично при $f_Z(\alpha) = 0$ имеем $f_Y(\alpha) = 1$ и $\Gamma \vdash \neg Z$, что равносильно $\Gamma \vdash Y$. ►

Теорема 2.6. Любая тавтология Y выводима в теории N .

◀ Пусть формула Y построена из переменных $x_1, \dots, x_n$. Поскольку Y — тавтология, ее истинностная функция на любом булевом векторе α принимает значение 1. Значит, для любых значений $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ имеет место выводимость $x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n} \vdash Y$.

Обозначим $\Gamma_2 = x_2^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}$. Имеют место выводимости $x_1, \Gamma_2 \vdash Y$ и $\neg x_1, \Gamma_2 \vdash Y$. По правилу удаления конъюнкции находим $x_1 \vee \neg x_1, \Gamma_2 \vdash Y$. Используя выводимость $\vdash x_1 \vee \neg x_1$, по правилу сечения получаем $\Gamma_2 \vdash Y$.

Повторяя рассуждения, последовательно убираем из списка гипотез переменные x_2, x_3 и т.д. В конечном счете получим выводимость $\vdash Y$, что равносильно утверждению теоремы. ▶

Полученное описание выводимых в теории N формул позволяет установить такие свойства этой теории, как непротиворечивость, полноту и разрешимость. Установление этих свойств — цель, преследуемая при формализации любой теории.

Под непротиворечивостью формальной теории понимают отсутствие в этой теории такой формулы X , для которой выводимыми являются и сама формула X , и ее отрицание $\neg X$. Иногда дают такое определение непротиворечивости теории: теория непротиворечива, если в ней существует невыводимая формула. Формально утверждение о выводимости любой формулы сильнее, чем утверждение о выводимости какой либо пары X и $\neg X$ (из первого утверждения очевидно вытекает второе). Однако в данном случае оба подхода дают одно и то же: если в теории выводимы и X , и $\neg X$, то по закону противоречия выводима любая формула.

Теорема 2.7. Теория N является непротиворечивой.

◀ Выводимыми в теории N являются только тавтологии. Если формула X выводима в теории N , то X — тавтология. Но тогда $\neg X$ является противоречием и не относится к числу выводимых формул. ▶

Под полнотой формальной теории понимают свойство, согласно которому не существует такой невыводимой формулы X , добавление которой к аксиомам приводит к непротиворечивой теории. Другими словами, в такой теории для каждой формулы X выводима либо сама формула, либо ее отрицание. Наша теория не полна в этом смысле. Действительно, если, добавив в качестве аксиомы некоторую формулу X , мы найдем вывод формулы $\neg X$, то, с иной точки зрения, мы получим вывод $\neg X$ из гипотезы X в теории N , т.е. $X \vdash \neg X$. Значит, согласно дереву (2.1), имеет место выводимость $\vdash \neg X$. Однако, как доказано, такое возможно только, если X — противоречие. Следовательно, добавление любой формулы, не являющейся тавтологией или противоречием, дает непротиворечивую теорию.

Впрочем, если в теорию ввести дополнительную схему аксиом, построенную на формуле, не являющейся тавтологией, то подставляя в схему вместо символов подстановки определенные формулы, можно получить противоречие. Это противоречие, с одной стороны, является аксиомой, поскольку получено из схемы аксиом, а с другой стороны, его отрицание есть тавтология, выводимая в теории N . Пусть например, схема аксиом построена на формуле, представленной истинностной функцией $f(x_1, \dots, x_n)$. Так как формула — не тавтология, существует набор значений $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ аргументов функции, на котором она принимает значение 0. Каждую переменную x_j заменим формулой $x_j \vee \neg x_j$, если $\alpha_j = 1$, и формулой $x_j \wedge \neg x_j$. Полученная формула, построенная по схеме аксиом, будет противоречием.

При построении исчисления высказываний (и далее исчисления предикатов) различают полноту в широком смысле, означающую сказанным выше, и полноту в узком смысле, означающую, что выводимыми являются все тавтологии. В узком смысле теория N полна. Впрочем, отсутствие полноты в широком смысле легко устраняется простой модификацией формальной теории: достаточно вместо каждой схемы аксиом записать обычную аксиому, заменив места подстановки переменными и добавить еще одно правило вывода, заключающееся в подстановке вместо переменных произвольных формул. Отметим, что свойством полноты обладают очень

простые математические теории: согласно теореме Геделя о неполноте любая достаточно содержательная теория не является полной, поскольку в рамках такой теории удастся построить такую формулу Z , что ни эта формула, ни ее отрицание не являются выводимыми.

Под разрешимостью теории понимают наличие алгоритма, который для любой формулы позволяет установить за конечное число элементарных операций, выводима эта формула или нет. В данном случае в качестве такого алгоритма может рассматривать процедуру построения истинностной функции и проверки ее на наличие значений 0. Отсутствие таких значений означает, что функция является постоянной, а формула — тавтологией, т.е. выводимой в теории N . Указанная процедура выполняется за конечное число алгебраических операций и дает однозначный ответ, выводима формула или нет. В этом смысле теория N является разрешимой теорией.

Еще один вопрос, связанный с построением формальной теории — независимость аксиом. Аксиома формальной теории не зависит от остальных аксиом этой теории, если эта аксиома не является выводимой формулой в теории, которая получается из исходной удалением указанной аксиомы. Если ни одна из аксиом формальной теории не является логическим следствием остальных, то говорят о **независимой системе аксиом**.

Система аксиом теории N является независимой в том смысле, что удалив одну из схем аксиом теории, мы не сможем вывести ни одну из формул, получаемой в рамках этой схемы аксиом. Как можно доказать утверждения подобного рода. Напомним, что в формальной теории формулы теряют всякий содержательный смысл; например, знак импликации может означать какую угодно бинарную операцию на множестве возможных значений переменных, а сами переменные могут быть связаны с любыми математическими объектами. Придание смысла символам формальной теории называют интерпретацией этой теории. В данном случае множество всех высказываний как область изменения переменных и естественный логический смысл символов операций — это одна из возможных интерпретаций исчисления N .

Интерпретация формальной теории строится в рамках какой-либо другой математической теории. Надежность интерпретации определяется надежностью той теории, в которой интерпретируется исчисление. Так, суждения о непротиворечивости, полноте и разрешимости исчисления N получены в рамках так называемой теории булевых функций, т.е. теории функций с областью изменения переменных и функций 0 и 1. В этом смысле подобные суждения носят относительный характер. В математике считают абсолютно надежными теории, связанные с конечными множествами. В этом смысле утверждения о непротиворечивости, полноте и разрешимости исчисления N являются абсолютными. Утверждение о независимости системы аксиом тоже будет абсолютным, если оно будет получено на базе какой-либо конечной интерпретации.

Теорема 2.8. Схемы аксиом исчисления N не зависят друг от друга.

◀ Наиболее просто доказать независимость схем, начиная с 3-й, так как все эти схемы используют, кроме импликации, еще одну операцию, которая участвует лишь в двух других схемах аксиом. Можно ограничиться двухэлементной областью изменения переменных и стандартной интерпретацией операций, кроме одной. В табл. 2.1 приведены схемы аксиом и новая интерпретация одной из операций. При этой интерпретации указанная схема аксиом при некоторых значениях входящих в нее формул принимает значение 0, в то время как остальные аксиомы

Таблица 2.1

№	Схема аксиом	Интерпретируемая операция	№	Схема аксиом	Интерпретируемая операция
3	$X \wedge Y \rightarrow X$	$x \wedge y = y$	8	$X \rightarrow Z \rightarrow (Y \rightarrow Z \rightarrow (X \vee Y \rightarrow Z))$	$x \vee y = 1$
4	$X \wedge Y \rightarrow Y$	$x \wedge y = x$	9	$X \rightarrow Y \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)$	$\neg x = x$
5	$X \rightarrow Y \rightarrow (X \rightarrow Z \rightarrow (X \rightarrow Y \wedge Z))$	$x \wedge y = 0$	10	$\neg \neg X \rightarrow X$	$\neg x = 1$
6	$X \rightarrow Y \vee Z$	$x \vee y = z$	11	$X \rightarrow \neg \neg X$	$\neg x = 0$
7	$Y \rightarrow Y \vee Z$	$x \vee y = y$			

имеют постоянное истинностное значение 1. Изменение интерпретации не затрагивает правила *modus ponens*, так что при удалении указанной схемы аксиом мы получаем теорию, в которой все выводимые формулы — тавтологии, но некоторые формулы, получаемые из указанной схемы, выводимыми не являются. Это и означает, что указанная схема аксиом не зависит от остальных.

Независимость первых двух схем доказать сложнее, поскольку они касаются импликации, затрагивающей все схемы. Ответ можно найти, рассмотрев в качестве области изменения переменных множество из трех целых чисел $\{0, 1, 2\}$ и выбрав следующие интерпретации операций: $x \wedge y = \min\{x, y\}$, $x \vee y = \max\{x, y\}$, $\neg x = 2 - x$. Для импликации потребуем выполнения условия, что $x \rightarrow y = n$ тогда и только тогда, когда $x \leq y$. При поставленных условиях схемы 3, 4, 6, 7, 10, 11 будут давать формулы с тождественным значением n , а в силу условия, наложенного на импликацию, значение Y будет тождественное n при $X \equiv n$ и $X \rightarrow Y \equiv n$. Недоопределенность импликации можно использовать для получения нужных значений первых двух схем аксиом и для обеспечения тождественного значения n схем 5, 8, 9.

Положим $x \rightarrow y = 0$ при $x > y$. Тогда схема $X \rightarrow (Y \rightarrow X)$ будет иметь значение 0 при $X = 1$, $Y = 2$, в то время как остальные аксиомы будут давать тождественное значение 2. Действительно, в схеме 2 исключаем случай $X > Y$ или $X \leq Z$, так как тогда она имеет вид $0 \rightarrow W$ или $W \rightarrow 1$. Значит, $Z < X \leq Y$ и схема имеет вид $2 \rightarrow (X \rightarrow 0 \rightarrow 0)$. Но $X > Z \geq 0$, значит, $X \rightarrow 0 = 0$ и $2 \rightarrow (X \rightarrow 0 \rightarrow 0) = 2 \rightarrow (0 \rightarrow 0) = 2 \rightarrow 2 = 2$. В схеме 5 исключаем случай $X > Y$ или $X > Z$, когда она имеет значение 2. Но тогда $X \leq \min\{Y, Z\}$ и $X \rightarrow Y \vee Z = 2$. Поэтому $X \rightarrow Y \rightarrow (X \rightarrow Z \rightarrow (X \rightarrow Y \wedge Z)) = X \rightarrow Y \rightarrow (X \rightarrow Z \rightarrow 2) = 2$. В схеме 8 исключаем случай $X > Z$ или $Y > Z$. Тогда $\max\{X, Y\} \leq Z$, $X \vee Y \rightarrow Z = 2$ и схема 8 имеет тождественное значение 2. В схеме 9 исключаем случай $X > Y$. Но тогда $X \leq Y$, $\neg Y \leq \neg X$ и формула имеет вид $2 \rightarrow 2$.

Положим $x \rightarrow y = 1$ при $x > y$. Тогда схема 8 будет иметь значение 1, например, при $X = 1$, $Y = 2$, $Z = 0$. В схеме 1 исключаем случай $Y \leq X$. Тогда $X < Y \leq 2$, а значит, $X \leq 1$ и $X \rightarrow (Y \rightarrow X) = X \rightarrow 1 = 2$. Схемы 5, 8, 9 проверяются так же, как выше. ►

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Алгебра высказываний	1
1.1. Введение	1
1.2. Алгебра логики	3
1.3. Тавтологии и эквивалентность формул	5
1.4. Функции алгебры логики	9
2. Исчисление высказываний	14
2.1. Основные положения теории N	14
2.2. Правила естественного вывода	16
2.3. Глобальные свойства теории N	21
3. Алгебра предикатов	26
3.1. Предикаты и кванторы	26
3.2. Логико-математические языки	27
3.3. Переименования и подстановки	30
3.4. Семантика логико-математического языка	33
3.5. Логические законы	35
3.6. Замены	38
3.7. Упрощение формул	40
4. Исчисление предикатов	42
4.1. Построение теории P	42
4.2. Правила естественного вывода	43
4.3. Глобальные свойства теории P	45
5. Генценовские формальные системы	52
5.1. Исчисление GV	52
5.2. Исчисление GP	56
6. Примеры формальных теорий	59
6.1. Теория групп	59
6.2. Формальная арифметика	61
7. Метод резолюций	66
7.1. Скулемовские функции	66
7.2. Метод резолюций для исчисления высказываний	68
7.3. Метод резолюций для исчисления предикатов	71