

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана

---

Факультет «Фундаментальные науки»  
Кафедра «Математическое моделирование»

**А.Н. Канатников**

**ИЗБРАННЫЕ ЛЕКЦИИ  
ПО АЛГЕБРЕ**

**Конспект лекций**

Для студентов факультета ФН

Москва  
2009

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

# 14. МНОЖЕСТВА И ОТНОШЕНИЯ

## 14.1. Алгебра множеств

Основные понятия. Отношение принадлежности. Отношение включения. Операции объединения и пересечения. Разность и симметрическая разность. Свойства операций (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность). Зависимость операций. Основные и второстепенные операции. Универсум. Способы доказательства теоретико-множественных равенств. Диаграммы Венна. Характеристические функции. Способы задания и записи множеств. Антиномии. Декартово произведение.

**Множество** — это любая совокупность объектов, понимаемая как единое целое.

Эту фразу не следует рассматривать как определение. На самом деле множество — неопределимое математическое понятие, а сказанное лишь описывает, каким образом это понятие может использоваться на практике. С точки зрения математики важно, каким образом объекты, называемые множествами, могут использоваться.

Множество — это совокупность объектов, каждый из которых называется **элементом множества**. Если  $x$  — элемент множества  $A$ , то пишут  $x \in A$ . Два множества могут быть связаны **отношением включения**. Запись  $A \subset B$  означает, что каждый элемент множества  $A$  является и элементом множества  $B$ . Если  $A \subset B$  и  $B \subset A$ , то множества  $A$  и  $B$  состоят из одних и тех же элементов, т.е. совпадают, иначе говоря, равны:  $A = B$ . Иногда различают **строгое включение**, при котором  $A \subset B$  и  $A \neq B$ , и **нестрогое включение**, при котором  $A \subset B$ , но, возможно, что и  $A = B$ . В этом случае строгое включение обозначают  $A \subset B$ , а нестрогое —  $A \subseteq B$ .

С множествами можно выполнять различные операции. **Объединением**  $A \cup B$  множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит  $A$  или  $B$  (или обоим множествам сразу). **Пересечением**  $A \cap B$  множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит одновременно и  $A$ , и  $B$ . **Разностью**  $A \setminus B$  множеств  $A$  и  $B$  называется множество, представляющее собой совокупность элементов множества, не принадлежащих множеству  $B$ .

Операции над множествами обладают следующими свойствами:

- 1)  $A \cup B = B \cup A$  (коммутативность объединения);
- 2)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  (ассоциативность объединения);
- 3)  $A \cap B = B \cap A$  (коммутативность пересечения);
- 4)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  (ассоциативность пересечения);
- 5)  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$  (дистрибутивность пересечения относительно объединения);
- 6)  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$  (дистрибутивность объединения относительно пересечения);
- 7)  $A \cap B \subset A$ ;
- 8)  $A \subset A \cup B$ ;
- 9)  $(A \cap B) \cup B = B$ ;
- 10)  $(A \cup B) \cap B = B$ ;
- 11)  $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ ;
- 12)  $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ .

Перечислены не все свойства, а только основные.

С помощью трех введенных операций над множествами можно определить и другие операции. Одна из наиболее употребительных — **симметрическая разность**  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Это коммутативная ассоциативная операция.

Множества  $A$  и  $B$  могут вообще не иметь общих элементов. Для таких множеств операция пересечения будет иметь смысл, если определить специальное **пустое множество**, которое вообще не имеет элементов. Такое множество обозначают  $\emptyset$ . Оно имеет следующие свойства:

- 1\*  $\emptyset \subset A$ ;
- 2\*  $A \cup \emptyset = A$ ;
- 3\*  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;
- 4\*  $A \setminus \emptyset = A$ ;
- 5\*  $\emptyset \setminus A = \emptyset$ ;
- 6\*  $A \Delta \emptyset = A$ .

Видно, что пустое множество играет роль „нулевого“ множества, если ассоциировать объединение со сложением чисел, а пересечение — с умножением чисел.

Операции можно выражать друг через друга. Можно выделить некоторые операции как основные, первоначальные, отнеся остальные операции к второстепенным, поскольку они могут записаны с помощью основных. В представленном изложении роль основных операций играют объединение, пересечение и разность, а операция симметрической разности оказывается второстепенной. Но могут быть и другие варианты. Например,  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ , т.е. пересечение выражается через разность. Аналогично объединение можно выразить через пересечение и симметрическую разность:  $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$ . Таким образом, выбор основных операций не является однозначным.

В каждой области математики или каком-либо разделе естествознания (говорят **в предметной области**) используют вполне определенный набор объектов, рассматриваемых как элементы множества. Например, в планиметрии элементами множеств могут быть точки или прямые, в математическом анализе рассматривают множества, состоящие из чисел или групп чисел (элементов арифметических пространств). Совокупность всех элементов всех множеств, рассматриваемых в данной предметной области называется **универсумом**. В качестве универсума в рамках частной теории может рассматриваться какое-либо конкретное множество (например, множество действительных чисел).

Если задано универсальное множество  $U$ , содержащее все рассматриваемые объекты, то для любого рассматриваемого множества  $A$  имеем  $A \subset U$ . Можно определить операцию  $\bar{A} = U \setminus A$ . Множество  $\bar{A}$  называют **дополнением** множества  $A$ . Для дополнения используют другие обозначения:  $CA$ ,  $\bar{C}A$ ,  $A^c$  и т.п.

Сформулированные свойства можно доказывать по-разному. Во-первых, можно использовать графический метод, изображая множества как множества точек плоскости, ограниченные замкнутыми кривыми (такие изображения называют диаграммами Венна). Например, ассоциативность объединения видна из диаграмм на рис. 14.1.

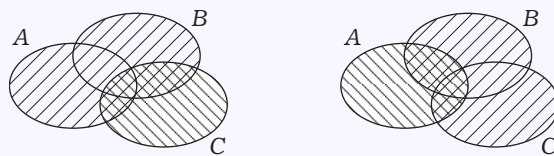


Рис. 14.1

Во-вторых, можно использовать метод двух включений, смысл которого состоит в следующем. Пусть мы доказываем равенство  $A = B$ . Сначала, предполагая, что  $x \in A$ , мы путем некоторых умозаключений доказываем, что  $x \in B$ . Затем точно так же мы показываем, что если  $x \in B$ , то  $x \in A$ .

В-третьих, можно использовать метод эквивалентных преобразований. Используя уже известный набор равенств, преобразуем левую часть доказываемого равенства так, чтобы получить правую. Можно также преобразовывать правую часть равенства, получая левую часть, или обе его части, получая слева и справа одно и то же выражение.

Наконец, можно использовать **метод характеристических функций**. Каждое множество  $A$  можно описать **характеристической функцией множества**

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \in \bar{A}. \end{cases}$$

Основные операции над множествами можно выразить соотношениями между их характеристическими функциями:

- $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$ ;
- $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$ ;
- $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x) = \chi_A(x)(1 - \chi_B(x))$ ;
- $\chi_{A \Delta B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x)$ ;
- $\chi_{\bar{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$ .

Доказав равенство характеристических функций двух множеств с использованием известных преобразований функций и операций над функциями, мы тем самым установим равенство самих множеств.

Множества можно разделить на **конечные множества** и **бесконечные множества**. Первые можно определять, перечисляя их элементы. При этом используют запись:

$$A = \{a, b, c, \dots\}.$$

Например:  $\{1, 2, 5\}$ .

Для бесконечных множеств, и даже конечных с большим количеством элементов этот способ неприемлем. В этом случае множество можно определять, указывая одно или несколько свойств, выделяющих элементы множества в ряду остальных. В этом случае говорят о **коллективизирующем свойстве**. Коллективизирующее свойство можно представить как некое утверждение, которое истинно для элементов множества и не истинно для других объектов, например: множество целых четных чисел (коллективизирующее свойство: число целое четное), множество непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций (коллективизирующее свойство: функция непрерывна на  $[a, b]$ ). Записав коллективизирующее свойство через  $\varphi(x)$ , множество, им определяемое, можно записать следующим образом:

$$A = \{x: \varphi(x)\}.$$

Говорят, что множество  $A$  определено **свертыванием по свойству**  $\varphi(x)$ , называя правую часть равенства **сверткой по этому свойству**. Например, запись  $\{x: x \in \mathbb{R}, x > 0\}$  определяет множество всех положительных действительных чисел ( $\mathbb{R}$  — множество всех действительных чисел).

Иногда используют следующую форму свертки:

$$A = \{x \in U: \varphi(x)\}.$$

При этом говорят об **определении множества выделением**. Например, можно вместо  $\{x: x \in \mathbb{R}, x > 0\}$  записать  $\{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$ .

Из пояснения понятия множества можно сделать вывод, что множество рассматривается как самостоятельный объект (единое целое). Из таких объектов могут составляться новые множества. Таким образом, любое множество может оказаться элементом другого множества. Зачастую множества обозначают прописными буквами, а их элементы — строчными (это соглашение выдержано выше). Но поскольку множество может быть элементом другого множества, такое разделение обозначений (элемент, множество) теряет смысл. Впрочем, в ряде случаев рассматриваются только простые множества, элементами которых являются простые объекты. Например, дифференциальное исчисление функций одного переменного ограничивается рассмотрением числовых множеств. В этом случае разделение обозначений остается оправданным.

Определение множества свертыванием не связано какими-либо ограничениями. Например, можно попытаться определить „множество всех множеств, не принадлежащих самому себе“, что записывается следующим образом:  $\{x: x \notin x\}$ . Формальная сторона определения соблюдена: любое множество, как элемент, может находиться слева от знака принадлежности, и в то же время оно может находиться справа от этого знака. Однако определение  $A = \{x: x \notin x\}$  внутренне противоречиво. Действительно, что верно  $A \in A$  или  $A \notin A$ ? Если предположить, что  $A \in A$ , то по своему определению заключаем:  $A \notin A$ . А если предположить, что  $A \notin A$ , то заключаем, что  $A \in A$ . В результате в любом случае имеем два взаимоисключающих утверждения.

Полученное противоречие называют **парадоксом Рассела**. Это не единственное противоречие в теории множеств, использующей неограниченное свертывание — **наивной теории множеств**. Такие противоречия часто называют **антиномиями** или **парадоксами** теории множеств.

Причины возникновения парадоксов в теории множеств можно понять на содержательном уровне: объект определяется через другие еще не определенные объекты (в данном случае через себя). Налицо нарушение причинно-следственной связи. Это противоречие проявляется и в таком определении: „множество всех множеств“. Если это множество, то оно должно принадлежать самому себе. Но если мы допускаем такое свойство, то мы можем рассмотреть часть этого множества, а именно множество всех множеств, не принадлежащих самому себе! Так что и здесь есть противоречие.

**Замечание 14.1.** В качестве парадокса иногда приводят следующее. Деревенский парикмахер бреет тех и только тех в своей деревне, кто сам не бреется. Бреет ли этот парикмахер себя? Конструкция очень похожа на парадокс Рассела, но на самом деле от него отличается. Здесь нет ссылки на себя самого: все объекты, рассматриваемые в качестве элементов множества (жители деревни) определены, и их конечное число. Здесь не может возникнуть нарушения причинно-следственной связи, как в парадоксе Рассела, приводящей к незамкнутости определения. Можно проверить всех жителей деревни на соответствие условию и убедиться в том, что множество описанных парикмахеров пусто. Коллективизирующее свойство содержит противоречие и определяет пустое множество. Увязать рассмотренный пример с парадоксом Рассела можно только в аллегорическом плане.

Выход из создавшегося положения может быть таким. Мы четко оговариваем, каким образом могут образовываться множества. Вот часть этих правил (список неполон и далее могут добавляться новые правила):

- 1) существует пустое множество;
- 2) из любой конечной совокупности множеств  $M_1, M_2, \dots, M_k$  можно образовать конечное множество  $\{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ ;
- 3) объединение, пересечение, разность двух множеств есть множество;
- 4) существует множества  $\mathbb{N}$  натуральных чисел,  $\mathbb{Z}$  целых чисел,  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел,  $\mathbb{R}$  действительных чисел,  $\mathbb{C}$  комплексных чисел\*;
- 5) для всякого множества  $M$  существует множество всех его подмножеств  $2^M$  — **булеан**;
- 6) для любого множества  $M$  и любого условия  $\varphi(x)$  существует множество  $\{x \in M: \varphi(x)\}$ .

Запись  $\{x: \varphi(x)\}$  в общем случае определяет **класс**. Частным случаем класса является множество. Но есть классы, не являющиеся множествами (например, класс Рассела). Собственно классы отличаются от множества только в одном: они не могут рассматриваться в качестве элементов других классов или множеств. Такое разделение позволяет снять парадоксы теории множеств.

\* На самом деле было бы достаточно оговорить существование множества  $\mathbb{N}$ ; существование остальных можно доказать.

Отметим, что в подавляющем числе предметных областей универсум оказывается множеством. В этом случае все рассматриваемые множества получаются выделением, и противоречий не возникает.

Рассмотрим еще один способ определения множеств. Напомним, что из двух объектов  $a$  и  $b$  можно образовать **упорядоченную пару** — новый объект  $(a, b)$ . Термин „упорядоченный“ указывает на то, что объекты  $(a, b)$  и  $(b, a)$  при различных  $a$  и  $b$  различаются. Формально упорядоченную пару можно определить как множество  $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ . С помощью объектов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  можно определить упорядоченную  $n$ -ку, или **кортеж**  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Объекты  $a_1, a_2, \dots, a_n$  называются **компонентами** этого кортежа.

Для любого конечного набора множеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$  определено множество

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

всех кортежей длины  $n$ . Это множество называется **декартовым произведением** множеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Множество  $A \times A \times \dots \times A$  называют  $n$ -й декартовой степенью множества  $A$  и обозначают  $A^n$ . В частности,  $A^2$  — декартов квадрат  $A$ ,  $A^3$  — декартов куб  $A$ .

**Замечание 14.2.** Обратим внимание на то, что, например,  $A_1 \times A_2 \times A_3$  и  $(A_1 \times A_2) \times A_3$  — разные множества. Первое состоит из кортежей длины 3, а второе из кортежей длины 2, первая компонента которых есть кортеж длины 2. Элементы первого множества имеют вид  $(a_1, a_2, a_3)$ , а элементы второго — вид  $((a_1, a_2), a_3)$ . Однако указанное различие формально, на практике такие конструкции не различают.

## 14.2. Отображения и соответствия

Определение. Обозначения. Виды отображений (сюръекция, инъекция и биекция). Композиция.

Обратное отображение. Соответствия. Композиция соответствий и обратное соответствие.

Пусть даны множества  $X$  и  $Y$ . Любое подмножество  $F \subset X \times Y$  называется **соответствием**. Выделим два тривиальных соответствия: **пустое соответствие**  $\emptyset \subset X \times Y$  и **универсальное соответствие**  $F = X \times Y$ .

Соответствия обозначаются так же, как и отображения:  $F: X \rightarrow Y$ . Это становится понятным, если заметить, что отображения — фактически частный случай соответствия.

Напомним, что отображением  $F$  множества  $X$  в множество  $Y$  называют закон или правило, которое с каждым элементом  $x \in X$  сопоставляет единственный элемент  $y \in Y$ . В этом определении есть неопределенный термин „закон или правило“. Но в действительности такой неопределенный термин в определении отображения не нужен. Этот „закон или правило“ — всего лишь способ определения множества  $F$  упорядоченных пар  $(x, y)$ , удовлетворяющих двум условиям:

- $\forall x \in X \exists y: (x, y) \in F$ ;
- $(x, y_1) \in F, (x, y_2) \in F, \Rightarrow y_1 = y_2$ .

Каждому соответствию  $F: X \rightarrow Y$  отвечают **область определения соответствия**

$$D(F) = \{x \in X : \exists y \in Y : (x, y) \in F\}$$

и **область значений соответствия**

$$R(F) = \{y \in Y : \exists x \in X : (x, y) \in F\}.$$

Соответствие  $F: X \rightarrow Y$  **всюду определено**, если  $D(F) = X$ . Соответствие  $F: X \rightarrow Y$  **функционально** по второй (первой) компоненте, если для любых упорядоченных пар  $(x, y_1) \in F$  и  $(x, y_2) \in F$  выполняется условие  $y_1 = y_2$ . Всюду определенное функциональное по второй компоненте соответствие называется **отображением**.

**Замечание 14.3.** Данное определение соответствия (отображения) приводит к тому, что с этим понятием сливается другое понятие — **график соответствия (отображения)**. Это понятие появляется как прямое обобщение понятия графика функции действительного переменного. Но если график функции действительного переменного — ее удобное графическое представление, то абстрактное понятие графика соответствия ничего не добавляет к самому понятию соответствия.

Хотя соответствие определено нейтрально — как определенного вида множество, его обозначение указывает, с какой точки зрения рассматривается этот объект. Можно сказать, что соответствие — это многозначное отображение, при котором одному значению  $x$  может соответствовать несколько (или ни одного) значений  $y$ . Нетрудно сформулировать эквивалентное определение соответствия  $F: X \rightarrow Y$  как отображения  $F: X \rightarrow 2^Y$ , при котором каждому элементу  $x \in X$  в соответствие ставится некоторое подмножество  $y \in 2^Y$  (иначе  $y \subset Y$ ).

Основная операция над отображениями — композиция отображений. Она без изменений переносится на соответствия. **Композицией  $G \circ F$  соответствий  $F: X \rightarrow Y$  и  $G: Y \rightarrow Z$**  называется множество

$$\{(x, z) \in X \times Z: \exists y \in Y (x, y) \in F, (y, z) \in G\}.$$

Легко увидеть, что в частном случае отображений композиция соответствий совпадает с композицией отображений.

**Замечание 14.4.** Установилась традиция, когда отображения, участвующие в композиции, записываются справа налево. Это связано с равенством  $g \circ f(x) = g(f(x))$ . Для композиции соответствий принято то же соглашение, однако это не является обязательным\*.

Для соответствия  $F: X \rightarrow Y$  множество

$$\{(y, x) \in Y \times X: (x, y) \in F\}$$

определяет **обратное соответствие  $F^{-1}$** . Композиция  $F^{-1} \circ F$  есть **тождественное отображение\*\***  $\text{id}_X: X \rightarrow X$ , определяемое как **диагональ декартова квадрата**

$$\text{id}_X = \{(x, y) \in X^2: x = y\}.$$

Пусть  $I, U$  — некоторые множества. Отображение  $F: I \rightarrow 2^U$  можно интерпретировать как **индексированное семейство множеств  $\{A_i, i \in I\}$** . Например, когда мы пишем  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , то тем самым каждому значению индекса в соответствие ставим множество семейства. С помощью индексированных семейств можно ввести объединение и пересечение бесконечного числа множеств. Пусть задано семейство  $\{A_i, i \in I\}$ . Тогда определены множества

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x: \exists i \in I, x \in A_i\}, \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x: \forall i \in I, x \in A_i\},$$

Индексация семейства множеств нужна лишь из соображений удобства. Например, можно было бы рассмотреть множество  $A$ , элементами которого являются множества и ввести операцию  $\cup A = \{z: \exists u \in A, z \in u\}$ , которая представляет собой объединение всех элементов множества  $A$ .

\*В книге „Дискретная математика“ А.И. Белоусова, С.Б. Ткачева (вып. XIX серии „Математика в техническом университете“) как раз использовано прямое обозначение композиции.

\*\*Это не совсем точно: область определения  $F^{-1} \circ F$  может не совпадать с множеством  $X$ .

### 14.3. Отношения и операции

Определения. Арность. Бинарные отношения и операции. Способы обозначений операций и отношений. Виды бинарных отношений. Отношение эквивалентности и факторизация.

**Бинарное отношение арности  $n$**  на множестве  $A$  — это любое подмножество  $n$ -й декартовой степени  $A^n$  множества  $A$ .

Отношения служат для описания связей между группами объектов. Например, отношение компланарности трех векторов можно интерпретировать как подмножество в  $(V_3)^3$ , т.е. упорядоченных троек векторов, в которое попадают любые тройки компланарных векторов и не попадают тройки некомпланарных векторов. Абстрагируясь от способа описания отношения, мы как раз и приходим к понятию отношения как к некоторой совокупности кортежей.

Наиболее распространенными являются отношения арности 2, или **бинарные отношения**. Бинарное отношение  $\rho \in A^2$  всегда можно интерпретировать как соответствие  $\rho: A \rightarrow A$ . Иногда вообще отношения и соответствия отождествляют. В самом деле, соответствие  $\rho: A \rightarrow B$  легко превратить в соответствие  $\rho: A \cup B \rightarrow A \cup B$ , которое фактически есть бинарное отношение. Использование разных терминов указывает на то, что один и тот же математический объект трактуется в разных смыслах: в первом случае как преобразование, трансформация (т.е. некоторое действие), а во втором — как некоторая связь между объектами.

Для бинарных соответствий вместо  $(x, y) \in \rho$  часто пишут  $x \rho y$ , причем в качестве символа отношения используют специальные знаки, например:  $x = y$ ,  $x < y$ ,  $A \subset B$ ,  $x \neq y$ ,  $m \parallel n$ .

Отношение на множестве  $A$  — ключевое понятие современной алгебры. Второе ключевое понятие — операция. **Операцией арности  $n$**  на множестве  $A$  будем называть любое отображение  $P: A^n \rightarrow A$ . Наиболее простые операции: **унарные** (арности 1) и **бинарные** (арности 2). Унарные операции представляют собой произвольное отображение  $P: A \rightarrow A$ . Пример унарной операции: унарный минус, означающий изменение знака числа. Бинарные операции: сложение, умножение, вычитание, деление, возведение в степень и т.п.

Операция арности  $n$  обозначается как функция многих переменных  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Для бинарных операций можно выделить три формы записи: префиксную (как функцию двух переменных); инфиксную, в которой операцию часто обозначают специальным знаком (стандартный способ записи арифметических операций); постфиксную (знак операции ставится после операндов).

Среди бинарных отношений выделяются те, которые имеют специальные свойства:

- **рефлексивные**  $x \rho x$  (т.е.  $\forall x(x, x) \in \rho$ ) и **иррефлексивные**  $x \rho y \Rightarrow x \neq y$  (т.е.  $\forall x(x, x) \notin \rho$ );
- **симметричные**  $x \rho y \Rightarrow y \rho x$  и **антисимметричные**  $x \rho y, y \rho x \Rightarrow x = y$ ;
- **транзитивные**  $x \rho y, y \rho z \Rightarrow x \rho z$ .

Можно также выделить **нерефлексивные отношения**, которые не относятся ни к рефлексивным, ни к иррефлексивным, и **несимметричные отношения**, которые не относятся ни к симметричным, ни к антисимметричным отношениям.

Указанные виды отношений можно определить, используя операции композиции и обратного отношения (в этих операциях отношение интерпретируется как соответствие):

- рефлексивное  $\text{id}_A \subset \rho$ , иррефлексивное  $\text{id}_A \cap \rho = \emptyset$ ;
- симметричное  $\rho^{-1} = \rho$ , антисимметричное  $\rho^{-1} \cap \rho \subset \text{id}_A$ ;
- транзитивное  $\rho^2 \subset \rho$  (здесь  $\rho^2 = \rho \circ \rho$ ).

Рефлексивное, антисимметричное, транзитивное отношение называется **порядком** (отношением порядка). Пример — отношение неравенства  $a \leq b$  на множестве действительных чисел (**естественный порядок на множестве действительных чисел**).

Иррефлексивное, антисимметричное, транзитивное отношение называется **строгим порядком**. Пример — отношение строгого неравенства  $a < b$  на множестве действительных чисел.

Рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение называется **эквивалентностью** (отношением эквивалентности). Пример: отношение коллинеарности векторов в  $V_3$ , отношение равенства геометрических векторов.

Выделяют и другие классы отношений.

С отношением эквивалентности связана следующая распространенная в математике конструкция.

Пусть на множестве  $A$  задано отношение эквивалентности  $\sim$ . Для каждого  $x \in A$  сформируем множество  $C_x = \{y \in A: x \sim y\}$ .

**Теорема 14.1.** Для любых  $x_1, x_2 \in A$  имеем либо  $C_{x_1} = C_{x_2}$ , либо  $C_{x_1} \cap C_{x_2} = \emptyset$ .

◀ Покажем, что если  $y \in C_x$ , то  $C_y = C_x$ . Пусть  $z \in C_y$ . Тогда  $y \sim z$ . В то же время  $y \in C_x$  и, следовательно,  $x \sim y$ . Из соотношений  $x \sim y$  и  $y \sim z$  в силу транзитивности получаем  $x \sim z$ , т.е.  $z \in C_x$ . Итак, если  $z \in C_y$ , то  $z \in C_x$ , т.е.  $C_y \subset C_x$ .

Пусть  $z \in C_x$ . Тогда  $x \sim z$  и по-прежнему  $x \sim y$ . С учетом симметричности и транзитивности заключаем, что  $y \sim z$ , т.е.  $z \in C_y$  и  $C_x \subset C_y$ .

Мы показали, что если  $y \in C_x$ , то  $C_y = C_x$ . Пусть  $C_{x_1} \cap C_{x_2} \neq \emptyset$  и  $z \in A$  принадлежит указанному пересечению. Тогда  $C_{x_1} = C_z = C_{x_2}$ . ▶

Множества  $C_x$  для различных элементов  $x \in A$  называются **классами эквивалентности**. Множество всех классов эквивалентности называют **фактор-множеством** множества  $A$  по отношению эквивалентности  $\sim$  и обозначают  $\frac{A}{\sim}$ .

**Пример 14.1.** Понятие равенства геометрических векторов вводит на множестве всех векторов отношение эквивалентности. Классы эквивалентности по этому отношению называют свободными векторами, множество всех классов эквивалентности приводит к линейному пространству  $V_3$ .

Описанная конструкция является математической интерпретацией агрегирования понятий. Например, понятие „стул“ выделяет среди всех предметов мебели те, которые используются для того, чтобы сидеть. С точки зрения математики „стул“ — это совокупность всех предметов мебели, предназначенных для того, чтобы сидеть.

Задание отношения эквивалентности на множестве  $A$  приводит к разбиению этого множества на непересекающиеся классы эквивалентности. И наоборот, любое разбиение множества на классы эквивалентности связано с некоторым отношением эквивалентности. В самом деле, пусть  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$  и  $A_i \cap A_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ . Рассмотрим отношение:  $x \rho y$ , если  $x$  и  $y$  принадлежат одному множеству  $A_i$ . нетрудно убедиться в том, что это отношение есть отношение эквивалентности, причем классами эквивалентности по этому отношению будут множества  $A_i$ ,  $i \in I$ .

Таким образом, факторизацию можно осуществить либо с помощью отношения эквивалентности, либо непосредственно задав разбиение множества на семейство попарно не пересекающихся подмножеств.

Рассмотрим какое-либо отображение  $f: A \rightarrow M$  множества  $A$  в множество  $M$ . Для любого  $y \in M$  множество  $\{x \in A: f(x) = y\}$  называется **полным прообразом** элемента  $y$ . Полные прообразы различных элементов множества  $M$  либо не пересекаются, либо совпадают, т.е. задают разбиение множества  $A$  на попарно не пересекающиеся подмножества. Такое разбиение соответствует отношению эквивалентности  $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$  и может использоваться для факторизации множества  $A$ . Использование отображений — третий вариант факторизации множеств.

При факторизации множества с помощью отображения, всем элементам одного класса эквивалентности соответствует одно значение отображения, а элементам других классов соответствуют другие значения. В этом смысле значения отображения могут рассматриваться как обобщенная характеристика эквивалентных (неразличимых) элементов.

В каждом случае факторизации можно рассмотреть отображение  $\Phi: A \rightarrow 2^A$ , которое каждому элементу  $x \in A$  ставит в соответствие его класс эквивалентности  $C_x$ . Такое отображение называют **каноническим**. Каноническое отображение можно рассматривать как математическую реализацию идеи агрегирования: совокупности объектов с аналогичными свойствами в соответствие ставится один элемент, играющий роль символа, знака этой совокупности.

## 14.4. Элементы математической логики

Высказывания. Операции над высказываниями. Логические связки. Высказывания с переменными (предикаты). Алгебра предикатов. Связь алгебры множеств и алгебры предикатов. Логическая интерпретация отношений.

**Высказывание** — это то или иное суждение, утверждение о протекающем процессе, свойствах объекта и т.п. Высказывание, строго говоря, как и множество — неопределимое понятие. Главным свойством высказываний является их истинность: каждое высказывание может быть истинным или ложным.

Высказывания можно объединять в более сложные с помощью **логических связок**. Логические связки можно рассматривать как операции, заданные на множестве (точнее, классе) всех высказываний. Главной особенностью логических связок является то, что истинность сложного, составного высказывания однозначно определяются истинностью исходных высказываний. Соединяя высказывания с помощью логических связок, можно получать весьма сложные высказывания, об истинности которых нельзя сказать „с лету“. Анализ таких высказываний — одна из задач математической логики.

Опишем употребляемые логические связки (табл. 14.1).

Таблица 14.1

| Операция         | Обозначение           | Описание                                            |
|------------------|-----------------------|-----------------------------------------------------|
| Логическое „или“ | $A \vee B$            | истина, если хотя бы одно из высказываний ложно     |
| Логическое „и“   | $A \wedge B$          | истина, если оба высказывания истинны               |
| Импликация       | $A \Rightarrow B$     | истина, если $A$ ложно или $B$ истинно              |
| Эквиваленция     | $A \Leftrightarrow B$ | истина, если оба высказывания истинны или оба ложны |
| Отрицание        | $\neg A$              | истина, если $A$ ложно                              |

Логическое „или“ также называют дизъюнкцией, а логическое „и“ — конъюнкцией.

При использовании логических связок действуют соглашения о приоритетах:

- отрицание имеет более высокий приоритет, чем любые бинарные операции;
- остальные логические связки имеют более низкий приоритет, чем алгебраические операции (арифметические, операции над векторами или множествами и т.п.);
- дизъюнкция и конъюнкция имеют более высокий приоритет, чем импликация и эквиваленция;
- дизъюнкция и конъюнкция, импликация и эквиваленция имеют одинаковый приоритет.

Как и в алгебраических выражениях, порядок выполнения операций регулируется приоритетом и расставленными скобками.

Наряду с обычными высказываниями используют и высказывания, содержащие переменные. Они называются **предикатами**. Истинность таких высказываний зависит от того, какие значения приняли входящие в него переменные. Предикат можно рассматривать как некую высказывательную форму, которая становится высказыванием, если все входящие в него переменные имеют конкретное значение. Каждая переменная может пробегать некоторое множество значений, называемое областью значений переменной. Однако область значений переменной в предикате может быть и класс.

Различают предикаты одноместные, двуместные, трехместные и т.д. — по количеству входящих в предикат переменных. Предикат „Множество  $A$  пустое“ — одноместный предикат, областью значений переменной в котором является класс всех множеств. Предикат  $x \leq y$  двуместный, а областью значений переменных может быть одна из числовых систем (множество целых чисел, рациональных чисел, действительных чисел).

Предикаты так же, как и высказывания, можно соединять логическими связками (например,  $x \geq 0 \wedge x < 1$ ).

Предикат может задавать коллективизирующее свойство при описании множества с помощью свертки или выделения, например  $\{x: x \in \mathbb{R} \wedge |x - 1| < 2\}$ . В действительности мы любой одноместный предикат можем использовать для описания класса или множества. Наоборот, если множество  $A$  определено, то предикат  $x \in A$  является логическим эквивалентом любого другого, описывающего коллективизирующее свойство. При этом класс или множество  $\{x: \varphi(x) \vee \psi(x)\}$  есть объединение классов (множеств)  $\{x: \varphi(x)\}$  и  $\{x: \psi(x)\}$ , а запись  $\{x: \varphi(x) \wedge \psi(x)\}$  — пересечение этих классов (множеств). Тем самым между теоретико-множественными операциями объединения и пересечения, с одной стороны, и логическими дизъюнкцией и конъюнкцией, с другой, устанавливается соответствие. Аналогично соответствие между дополнением множеств и отрицанием высказываний. В результате любое выражение теории множеств можно трансформировать в некоторый предикат с использованием логических связок и наоборот.

Одно из следствий такого соответствия — логическая интерпретация отношений. Пусть  $\rho \subset A^n$  —  $n$ -арное отношение на множестве  $A$ . Тогда мы можем сформировать запись

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \rho,$$

которую можно рассматривать как логический эквивалент отношения. Таким образом, мы всегда можем интерпретировать  $n$ -арное отношение как  $n$ -местный предикат. Наиболее распространено это в категории бинарных отношений. Знаки равенства, неравенства, принадлежности, параллельности, эквивалентности и т.п. — тому примеры. Например, запись  $x < y$  надо рассматривать как предикатную запись отношения  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x < y\}$ .

## 14.5. Мощность множеств

Равномощные множества. Конечные, счетные и несчетные множества. Понятие о нумерации счетного множества. Отображения конечных множеств: сюръекция  $\Leftrightarrow$  инъекция. Свойства мощности: а) бесконечное множество имеет счетное подмножество; б) в любом бесконечном множестве можно выделить любое конечное число непересекающихся счетных подмножеств; в) любое подмножество счетного множества конечно или счетно; г) объединение не более чем счетного семейства счетных множеств счетно; д) объединение бесконечного множества  $M$  с не более чем счетным множеством равномощно  $M$ . Теорема Кантора — Бернштейна. Мощность булеана. Континуум. Мощность множества отображений  $f: X \rightarrow Y$ .

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                       |           |
|-----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4. Псевдорешения и псевдообратная матрица</b>                      | <b>1</b>  |
| 4.1. Метод наименьших квадратов . . . . .                             | 1         |
| 4.2. Псевдорешения . . . . .                                          | 3         |
| 4.3. Скелетное разложение . . . . .                                   | 4         |
| 4.4. Псевдообратная матрица . . . . .                                 | 6         |
| 4.5. Проектирование на подпространство . . . . .                      | 10        |
| <b>9. Жорданова нормальная форма</b>                                  | <b>12</b> |
| 9.1. Корневые подпространства . . . . .                               | 12        |
| 9.2. Жорданова нормальная форма . . . . .                             | 14        |
| 9.3. Комплексные корни . . . . .                                      | 19        |
| 9.4. Теорема Кэли — Гамильтона . . . . .                              | 20        |
| <b>13. Операции над тензорами</b>                                     | <b>22</b> |
| 13.1. Понятие тензора . . . . .                                       | 22        |
| 13.2. Матричная запись тензоров . . . . .                             | 23        |
| 13.3. Преобразование тензоров, записанных в матричной форме . . . . . | 24        |
| <b>14. Множества и отношения</b>                                      | <b>26</b> |
| 14.1. Алгебра множеств . . . . .                                      | 26        |
| 14.2. Отображения и соответствия . . . . .                            | 30        |
| 14.3. Отношения и операции . . . . .                                  | 32        |
| 14.4. Элементы математической логики . . . . .                        | 34        |
| 14.5. Мощность множеств . . . . .                                     | 35        |
| <b>16. Кольца и поля</b>                                              | <b>36</b> |
| 16.1. Кольца . . . . .                                                | 36        |
| 16.2. Специальные типы колец . . . . .                                | 36        |
| 16.3. Гомоморфизмы колец и факторизация . . . . .                     | 36        |
| 16.4. Модули и алгебры . . . . .                                      | 36        |
| 16.5. Алгебры на поле . . . . .                                       | 40        |
| <b>17. Кольцо многочленов</b>                                         | <b>43</b> |
| 17.1. Определение кольца многочленов . . . . .                        | 43        |
| 17.2. Деление с остатком и его свойства . . . . .                     | 45        |
| 17.3. Разложение на неприводимые множители . . . . .                  | 49        |
| 17.4. Использование делимости в теории шифрования . . . . .           | 49        |
| 17.5. Кватернионы . . . . .                                           | 50        |
| <b>19. Полукольца и булевы алгебры</b>                                | <b>51</b> |
| 19.1. Определение полукольца . . . . .                                | 51        |
| 19.2. Ряды в полукольцах . . . . .                                    | 53        |
| 19.3. Замкнутые полукольца . . . . .                                  | 57        |
| 19.4. Системы линейных уравнений в полукольцах . . . . .              | 58        |
| 19.5. Симметричные полукольца . . . . .                               | 63        |
| 19.6. Решетки . . . . .                                               | 67        |