

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников

**ИЗБРАННЫЕ ЛЕКЦИИ
ПО АЛГЕБРЕ**

Конспект лекций

Для студентов факультета ФН

Москва
2009

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

13. ОПЕРАЦИИ НАД ТЕНЗОРАМИ

13.1. Понятие тензора

Говорят, что в n -мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ задан **тензор типа** (p, q) (p раз ковариантный, q раз контравариантный), если каждому базису $\mathbf{b}$ в $\mathcal{L}$ сопоставлена упорядоченная система чисел $a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}(\mathbf{b})$, называемых **компонентами тензора**, причем системы чисел, соответствующие разным базисам $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, связаны между собой соотношениями

$$a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}(\mathbf{c}) = \sum_{s_1=1}^n \dots \sum_{s_q=1}^n \sum_{r_1=1}^n \dots \sum_{r_p=1}^n v_{s_1}^{j_1} \dots v_{s_q}^{j_q} a_{r_1 \dots r_p}^{s_1 \dots s_q}(\mathbf{b}) u_{i_1}^{r_1} \dots u_{i_p}^{r_p},$$

где $U = (u_j^i)$ — матрица перехода из базиса $\mathbf{b}$ в базис $\mathbf{c}$; $V = (v_j^i)$ — обратная к U матрица (верхний индекс в обозначениях u_j^i и v_j^i обозначает номер строки в матрице). Сумму $p + q$ называют **валентностью тензора** (или его **рангом**).

В приведенном **законе преобразования тензора** опускают знаки сумм в соответствии с **правилом умолчания**. Согласно этому правилу выполняется суммирование по любой паре одинаковых индексов, один из которых верхний, а другой нижний, причем с одними и теми же пределами, определяемыми размерностью n линейного пространства: от 1 до n .

С учетом правила умолчания тензорный закон преобразования записывается следующим образом:

$$a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}(\mathbf{c}) = v_{s_1}^{j_1} \dots v_{s_q}^{j_q} a_{r_1 \dots r_p}^{s_1 \dots s_q}(\mathbf{b}) u_{i_1}^{r_1} \dots u_{i_p}^{r_p},$$

Например, для тензора типа $(1, 1)$ закон преобразования выглядит так:

$$a_j^i(\mathbf{c}) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_l^k(\mathbf{b}) u_j^l v_k^i.$$

Записывая компоненты тензора в матрицу A (верхний индекс — номер строки), получим $A(\mathbf{c}) = VA(\mathbf{b})U$ — обычный закон преобразования матрицы линейного оператора. Таким образом, если каждому базису поставить в соответствие элементы матрицы данного линейного оператора, мы получим тензор типа $(1, 1)$. Об этом кратко говорят так: линейный оператор есть тензор типа $(1, 1)$.

Можно привести и другие примеры тензоров, возникающие как в самой линейной алгебре, так и в предметных областях (механике, физике и т.п.)^{*}. Здесь лишь заметим, что тензор типа (p, q) определяется набором координат полилинейной формы типа (p, q) . Более того, любой тензор типа (p, q) всегда можно рассматривать как набор координат соответствующей полилинейной формы. Тем самым полилинейные формы становятся удобным геометрическим представлением тензоров.

В наборе чисел $a_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ используют как верхние, так и нижние индексы. Это связано с тем, что в законе преобразования тензора верхние и нижние индексы ведут себя по-разному: для нижних индексов парный индекс относится к матрице перехода U , в то время как для верхних — к обратной матрице V . Нижние индексы принято называть **ковариантными**, а верхние — **контравариантными**.

Тип тензора определяется парой целых чисел: количеством контравариантных и ковариантных индексов. Заметим, что в литературе нет устоявшихся правил, в каком порядке указываются эти количества. Тензор, которому мы приписали тип (p, q) в ряде учебников обозначают

^{*}См.: А.Н. Канатников, А.П. Крищенко. Линейная алгебра. п. 10.3.

как тензор типа (q, p) . Но расположение индексов (контравариантные вверх) соблюдается в большинстве литературных источников.

13.2. Матричная запись тензоров

Матрицы могут использоваться для записи тензоров небольшого ранга (до четырех). При этом используем следующие соглашения:

- индексы тензора нумеруются слева направо, сперва все верхние, а затем все нижние;
- векторы (т.е. тензоры типа $(0, 1)$) записываются в виде столбца;
- ковекторы (линейные функции — тензоры типа $(1, 0)$) записываются в виде строки;
- тензоры ранга 2 записываются в виде обычной матрицы, причем первый индекс является номером строки (например, для матрицы линейного оператора номером строки является верхний индекс);
- тензоры ранга 3 записываются в виде блочной матрицы-строки, причем первый индекс — это номер строки в блоке, второй индекс — номер столбца в блоке, третий индекс — номер блока.
- тензоры ранга 4 записываются в виде квадратной блочной матрицы, для которой первый индекс — номер строки в блоке, второй индекс — номер столбца в блоке, третий индекс — номер блочной строки, а четвертый индекс — номер блочного столбца.

Например, трехвалентный тензор a_{jk}^i записывается в виде

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_{11}^1 & a_{21}^1 & a_{31}^1 & a_{12}^1 & a_{22}^1 & a_{32}^1 & a_{13}^1 & a_{23}^1 & a_{33}^1 \\ a_{11}^2 & a_{21}^2 & a_{31}^2 & a_{12}^2 & a_{22}^2 & a_{32}^2 & a_{13}^2 & a_{23}^2 & a_{33}^2 \\ a_{11}^3 & a_{21}^3 & a_{31}^3 & a_{12}^3 & a_{22}^3 & a_{32}^3 & a_{13}^3 & a_{23}^3 & a_{33}^3 \end{array} \right),$$

а трехвалентный тензор a_k^{ij} — в виде

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1^{11} & a_1^{12} & a_1^{13} & a_2^{11} & a_2^{12} & a_2^{13} & a_3^{11} & a_3^{12} & a_3^{13} \\ a_1^{21} & a_1^{22} & a_1^{23} & a_2^{21} & a_2^{22} & a_2^{23} & a_3^{21} & a_3^{22} & a_3^{23} \\ a_1^{31} & a_1^{32} & a_1^{33} & a_2^{31} & a_2^{32} & a_2^{33} & a_3^{31} & a_3^{32} & a_3^{33} \end{array} \right).$$

Тензорное произведение тензора второго ранга на вектор зависит от типа тензора. Произведение $a_j^i b^k$ в матричной форме записывается в виде

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1^1 b^1 & a_1^1 b^2 & a_1^1 b^3 & a_2^1 b^1 & a_2^1 b^2 & a_2^1 b^3 & a_3^1 b^1 & a_3^1 b^2 & a_3^1 b^3 \\ a_1^2 b^1 & a_1^2 b^2 & a_1^2 b^3 & a_2^2 b^1 & a_2^2 b^2 & a_2^2 b^3 & a_3^2 b^1 & a_3^2 b^2 & a_3^2 b^3 \\ a_1^3 b^1 & a_1^3 b^2 & a_1^3 b^3 & a_2^3 b^1 & a_2^3 b^2 & a_2^3 b^3 & a_3^3 b^1 & a_3^3 b^2 & a_3^3 b^3 \end{array} \right),$$

а произведение $a_{ij} b^k$ — в виде

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_{11} b^1 & a_{21} b^1 & a_{31} b^1 & a_{12} b^1 & a_{22} b^1 & a_{32} b^1 & a_{13} b^1 & a_{23} b^1 & a_{33} b^1 \\ a_{11} b^2 & a_{21} b^2 & a_{31} b^2 & a_{12} b^2 & a_{22} b^2 & a_{32} b^2 & a_{13} b^2 & a_{23} b^2 & a_{33} b^2 \\ a_{11} b^3 & a_{21} b^3 & a_{31} b^3 & a_{12} b^3 & a_{22} b^3 & a_{32} b^3 & a_{13} b^3 & a_{23} b^3 & a_{33} b^3 \end{array} \right).$$

Видно, что блочную матрицу-строку составляют всевозможные произведения элементов матрицы на компоненты вектора, но расположение этих произведений в матрице разное.

Приведем матричную запись одного из четырехвалентных тензоров, рассматривая двумерное линейное пространство. Тензор a_{ijk}^l записывается следующим образом:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{111}^1 & a_{211}^1 & a_{112}^1 & a_{212}^1 \\ a_{111}^2 & a_{211}^2 & a_{112}^2 & a_{212}^2 \\ \hline a_{121}^1 & a_{221}^1 & a_{122}^1 & a_{222}^1 \\ a_{121}^2 & a_{221}^2 & a_{122}^2 & a_{222}^2 \end{array} \right).$$

13.3. Преобразование тензоров, записанных в матричной форме

Преобразование тензоров с использованием матричной записи рассмотрим на примере трехвалентных тензоров типа $(2, 1)$.

Запишем закон преобразования тензора a_{ij}^k при замене базиса:

$$\tilde{a}_{ij}^k = v_r^k a_{pq}^r u_i^p u_j^q$$

Это можно реализовать как три операции, связанные с матричным произведением. Порядок операций в данном случае не важен, так как это связано с перестановкой знаков сумм. Рассмотрим сумму $a_{pq}^r u_i^p$. Здесь индексом суммирования является p , а два других выступают как параметры. Зафиксируем номер блока q . Тогда эта сумма есть произведение матрицы a_p^r на матрицу u_i^p , так как индекс суммирования в первом множителе есть номер столбца, а во втором — номер строки. Мы получаем, что эта операция реализуется как умножение каждого блока $a_{\circ q}^{\circ}$ (точкой в кружочке отмечены меняющиеся индексы) на матрицу U справа. Пусть матрица U имеет простейший вид и получается из единичной матрицы одним элементарным преобразованием столбцов или строк. Тогда умножение на эту матрицу справа реализуется как соответствующее элементарное преобразование столбцов левого множителя. Например, в случае

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13.1)$$

матрица U получается из единичной прибавлением ко второму столбцу первого. Значит операция умножения блочной строки на эту матрицу состоит в том, что в каждом блоке ко второму столбцу добавляется первый.

Вторая операция $a_{pq}^r u_j^q$ с индексом суммирования q может быть реализована аналогично. Зафиксируем индекс p , что соответствует выбору из каждого блока столбца с номером p . В этой матрице (т.е. при фиксированном p) индекс q является номером столбца, он же в матрице u_j^q — номером строки. Следовательно, рассматриваемая операция есть умножение каждой матрицы из столбцов с одинаковыми номерами справа на матрицу U . Это равносильно элементарному преобразованию матрицы столбцов. Так, для матрицы (13.1) преобразование состоит в прибавлении ко второму блоку первого.

Рассмотрим третью операцию $v_r^k a_{pq}^r$. Здесь удобно зафиксировать индекс q (номер блока). Индекс суммирования в первом множителе является номером столбца, во втором — номером строки. Поэтому операция состоит в умножении каждого блока на матрицу V слева.

Может быть так, что, зафиксировав один индекс, мы придем к ситуации, в которой индекс суммирования в обоих множителях будет строки или номером столбца. Скорректировать такую ситуацию можно, не трансформируя блочной матрицы, а лишь меняя положение матрицы перехода (прямой или обратной) и, возможно, транспонируя ее. Если индекс суммирования оба раз есть номер строки, то матрица тензора должна быть правым множителем (ситуация определяется индексом в записи тензора), а для перевода индекса суммирования в матрице перехода

вниз ее надо транспонировать. Таким образом, операция сводится к умножению слева на транспонированную матрицу перехода. Аналогично рассматриваются и другие варианты. Например билинейная форма a_{ij} преобразуется по закону $\tilde{a}_{ij} = a_{pq} u_i^p u_j^q$. Суммирование по индексу q — это умножение матрицы билинейной формы справа на матрицу U , а суммирование по индексу p (номеру строки матрицы билинейной формы) — это умножение слева на матрицу U^T . Тем самым мы получаем известную формулу преобразования матрицы квадратичной формы.

Альтернирование также реализуется в матричной форме. Для тензора a_k^{ij} альтернирование по двум верхним индексам, определяемое формулой

$$s_k^{ij} = \frac{1}{2}(a_k^{ij} - a_k^{ji}),$$

равносильно выполнению для каждого блока A_k операции $\frac{1}{2}(A_k - A_k^T)$. Для тензора a_{ij}^k альтернирование можно реализовать следующим образом. Фиксирование индекса k равносильно выбору одной строки блочной матрицы, т.е. трех строк в трех разных блоках с одним номером. Записав эти три строки в матрицу A^k и выполнив операцию $\frac{1}{2}(A^k - (A^k)^T)$, получим новую матрицу S^k , которую в обратном порядке следует записать в блочную матрицу (первую строку в первый блок и т.д.).

Свертку в тензоре a_{ij}^k можно выполнить двумя способами: a_{kj}^k и a_{ik}^k . Зафиксировав индекс j или i , мы получим вариант свертки для матрицы, которая на самом деле есть след матрицы. Найдя след для каждого значения фиксированного индекса, мы получим компоненты тензора ранга 1. В данном случае это ковектор, и его следует записать в виде строки.

ОГЛАВЛЕНИЕ

4. Псевдорешения и псевдообратная матрица	1
4.1. Метод наименьших квадратов	1
4.2. Псевдорешения	3
4.3. Скелетное разложение	4
4.4. Псевдообратная матрица	6
4.5. Проектирование на подпространство	10
9. Жорданова нормальная форма	12
9.1. Корневые подпространства	12
9.2. Жорданова нормальная форма	14
9.3. Комплексные корни	19
9.4. Теорема Кэли — Гамильтона	20
13. Операции над тензорами	22
13.1. Понятие тензора	22
13.2. Матричная запись тензоров	23
13.3. Преобразование тензоров, записанных в матричной форме	24
14. Множества и отношения	26
14.1. Алгебра множеств	26
14.2. Отображения и соответствия	30
14.3. Отношения и операции	32
14.4. Элементы математической логики	34
14.5. Мощность множеств	35
16. Кольца и поля	36
16.1. Кольца	36
16.2. Специальные типы колец	36
16.3. Гомоморфизмы колец и факторизация	36
16.4. Модули и алгебры	36
16.5. Алгебры на поле	40
17. Кольцо многочленов	43
17.1. Определение кольца многочленов	43
17.2. Деление с остатком и его свойства	45
17.3. Разложение на неприводимые множители	49
17.4. Использование делимости в теории шифрования	49
17.5. Кватернионы	50
19. Полукольца и булевы алгебры	51
19.1. Определение полукольца	51
19.2. Ряды в полукольцах	53
19.3. Замкнутые полукольца	57
19.4. Системы линейных уравнений в полукольцах	58
19.5. Симметричные полукольца	63
19.6. Решетки	67