

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана

---

Факультет «Фундаментальные науки»  
Кафедра «Математическое моделирование»

**А.Н. Канатников**

**ИЗБРАННЫЕ ЛЕКЦИИ  
ПО АЛГЕБРЕ**

**Конспект лекций**

Для студентов факультета ФН

Москва  
2009

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

## 9. ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

### 9.1. Корневые подпространства

Задача упрощения матрицы линейного оператора связана с анализом инвариантных подпространств этого оператора. Отметим, что для любого линейного оператора  $A$  инвариантными подпространствами являются ядро и образ линейного оператора, а также ядро и образ любой степени этого оператора. Обобщением этого наблюдения является следующий результат.

**Теорема 9.1.** Пусть  $p(x)$  — многочлен с действительными коэффициентами. Подпространства  $\text{Ker } p(A)$  и  $\text{Im } p(A)$  являются инвариантными для линейного оператора  $A$ .

◀ Отметим, что если  $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k$ , то

$$p(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_k A^k.$$

Из этого представления нетрудно установить, что линейные операторы  $p(A)$  и  $A$  коммутируют, т.е.  $Ap(A) = p(A)A$ .

Пусть  $x \in \text{Ker } p(A)$ , т.е.  $p(A)x = 0$ . Тогда  $p(A)Ax = Ap(A)x = A0 = 0$ . Следовательно,  $Ax \in \text{Ker } p(A)$ . Тем самым доказано, что  $A(\text{Ker } p(A)) \subset \text{Ker } p(A)$  и что  $\text{Ker } p(A)$  — инвариантное подпространство для  $A$ .

Пусть  $y \in \text{Im } p(A)$ , т.е.  $y = p(A)x$  для некоторого вектора  $x$ . Тогда  $Ay = Ap(A)x = p(A)Ax$ , и мы делаем вывод, что  $Ay \in \text{Im } p(A)$ . Следовательно,  $A(\text{Im } p(A)) \subset \text{Im } p(A)$ , т.е.  $\text{Im } p(A)$  — инвариантное подпространство. ▶

Мы рассматриваем случай, когда характеристическое уравнение линейного оператора  $A$ , действующего в  $n$ -мерном линейном пространстве, не имеет комплексных корней. Далее  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  обозначают корни линейного оператора  $A$ , а  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$  — их алгебраические кратности.

Рассмотрим линейный оператор  $A_1 = A - \lambda_1 I$ , где  $I$  — единичный оператор. Подпространства  $\mathcal{D}_m = \text{Ker } A_1^m$  и  $\mathcal{R}_m = \text{Im } A_1^m$ , согласно доказанной теореме, являются инвариантными для оператора  $A$ . При этом имеют место соотношения

$$\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 \subset \dots \subset \mathcal{D}_m \subset \dots, \quad \mathcal{R}_1 \supset \mathcal{R}_2 \supset \dots \supset \mathcal{R}_m \supset \dots$$

Полагая  $d_i = \dim \mathcal{D}_i$ ,  $r_i = \dim \mathcal{R}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , заключаем, что

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_m \leq \dots, \quad r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_m \geq \dots$$

При этом  $d_i + r_i = \dim \text{Ker } A_1^i + \dim \text{Im } A_1^i = n$ , где  $n$  — размерность линейного пространства.

Существует такой индекс  $m$ , при котором  $d_m = d_{m+1}$ , в то время как  $d_i < d_{i+1}$  при  $i < m$ . Это значит, что  $\mathcal{D}_m = \mathcal{D}_{m+1}$  и далее  $\mathcal{D}_{m+1} = \mathcal{D}_{m+2}$  и т.д. В самом деле, Если  $x \in \mathcal{D}_{m+2}$ , то  $A_1^{m+2}x = 0$ . Следовательно,  $A_1^{m+1}(A_1 x) = 0$  и  $A_1 x \in \mathcal{D}_{m+1}$ . В силу равенства  $\mathcal{D}_m = \mathcal{D}_{m+1}$  заключаем, что  $A_1 x \in \mathcal{D}_m$ . Это означает, что  $A_1^m(A_1 x) = 0$ , или  $A_1^{m+1}x = 0$ , т.е.  $x \in \mathcal{D}_{m+1}$ .

**Теорема 9.2.** Подпространства  $\mathcal{D}_m$  и  $\mathcal{R}_m$  образуют прямую сумму и  $\mathcal{D}_m \oplus \mathcal{R}_m = L$ .

◀ Отметим, что  $\dim \mathcal{D}_m + \dim \mathcal{R}_m = \dim L$ . Поэтому достаточно показать, что  $\mathcal{D}_m \cap \mathcal{R}_m = \{0\}$ .

Рассмотрим вектор  $x \in \mathcal{D}_m \cap \mathcal{R}_m$ . Для него имеют место соотношения  $A_1^m x = 0$  и  $x = A_1^m y$ . Отсюда следует, что  $A_1^m x = A_1^{2m} y = 0$ , т.е.  $y \in \mathcal{D}_{2m}$ . Так как  $\mathcal{D}_m = \mathcal{D}_{m+1} = \dots = \mathcal{D}_{2m}$ , то  $y \in \mathcal{D}_m$ . Следовательно,  $x = A_1^m y = 0$ . ▶

В соответствии с доказанной теоремой линейное пространство  $L$  распадается в прямую сумму двух инвариантных подпространств. Выбрав базисы в  $\mathcal{D}_m$  и  $\mathcal{R}_m$ , получим базис, в котором матрица линейного оператора имеет блочно-диагональный вид

$$[A] = \begin{pmatrix} [A_d] & 0 \\ 0 & [A_r] \end{pmatrix},$$

где  $A_d$  и  $A_r$  — ограничения оператора  $A$  на инвариантные подпространства  $\mathcal{K} = \mathcal{D}_m$  и  $\mathcal{K}^c = \mathcal{R}_m$ .

Подпространство  $\mathcal{K}_1 = \text{Ker } A_1^m$  называется **корневым подпространством** для линейного оператора  $A$ , соответствующим собственному значению  $\lambda_1$ .

**Теорема 9.3.** Размерность корневого подпространства совпадает с алгебраической кратностью собственного значения, т.е.  $d_m = \sigma_1$ .

◀ Из блочно-диагонального вида матрицы линейного оператора вытекает, что характеристический многочлен  $\chi_A(\lambda)$  линейного оператора  $A$  есть произведение характеристических многочленов  $\chi_{A_d}(\lambda)$  и  $\chi_{A_r}(\lambda)$ . Оказывается, что многочлен  $\chi_{A_d}(\lambda)$  имеет простой вид:  $\chi_{A_d}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^m$ . Действительно, в  $\mathcal{K}_1$  линейный оператор  $A$  не имеет собственных векторов, кроме тех, что отвечают собственному значению  $\lambda_1$ : если  $Ax = \lambda_j x$ , то  $A_1 x = (\lambda_j - \lambda_1)x$  и  $A_1^m x = (\lambda_j - \lambda_1)^m x$ . Это соотношение невозможно в случае  $x \in \mathcal{K}$  и  $\lambda_j \neq \lambda_1$ , поскольку в этом случае  $A_1^m x = 0$ . Поскольку  $\chi_{A_d}(\lambda)$  имеет лишь действительные корни (все его корни являются корнями  $\chi_A(\lambda)$ ), а собственных значений, кроме  $\lambda_1$  в  $\mathcal{K}_1$  нет, то заключаем, что  $\chi_{A_d}(\lambda)$  имеет единственный корень максимальной кратности  $d_m$ .

В то же время любой собственный вектор  $x$ , отвечающий собственному значению  $\lambda_1$  принадлежит  $\mathcal{K}_1$  и не попадает в  $\mathcal{K}_1^c$ , поскольку равенство  $Ax = \lambda_1 x$  означает, что  $x \in \text{Ker } A_1 \subset \mathcal{K}_1$ . Поэтому  $\lambda_1$  не является корнем многочлена  $\chi_{A_r}(\lambda)$ . ▶

Пусть  $\mathcal{K}_i = \text{Ker}(A - \lambda_i I)^{m_i}$  — корневое подпространство, соответствующее собственному значению  $\lambda_i \neq \lambda_1$ . Тогда  $\mathcal{K}_i \subset \mathcal{K}_1^c$ . В самом деле, можно рассмотреть два корневых подпространства: подпространство  $\mathcal{K}_i$  линейного оператора  $A$  и корневое подпространство  $\mathcal{K}'_i$  линейного оператора  $A_r$ , действующего в подпространстве  $\mathcal{K}_1^c$ . Очевидно, что второе есть подпространство первого. В то же время и то, и другое имеют одну и ту же размерность, так как размерность первого совпадает с кратностью корня  $\lambda_i$  характеристического уравнения  $\chi_A(\lambda)$ , а размерность второго — с кратностью того же корня, но для уравнения  $\chi_{A_r}(\lambda)$ . Но, как уже доказано, обе кратности совпадают. Следовательно, оба корневых подпространства совпадают.

**Теорема 9.4.** Линейное пространство представляет собой прямую сумму корневых подпространств:

$$L = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{K}_k,$$

где  $k$  — количество собственных значений линейного оператора  $A$ .

◀ Включение  $\mathcal{K}_i \subset \mathcal{K}_j^c$  показывает, что можно последовательно выделять корневые подпространства, сужая действие линейного оператора сперва на  $\mathcal{K}_1^c$ , затем на подпространство в  $\mathcal{K}_1^c$ , полученное как образ оператора  $(A_r - \lambda_2 I)^{m_2}$  и т.д. Учитывая сочетание размерностей корневых подпространств, приходим к утверждению теоремы. ▶

**Следствие.** Существует базис, в котором матрица линейного оператора  $A$  имеет блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_k \end{pmatrix},$$

где  $R_i$  — блок порядка  $\sigma_i$ , для которого выполняется соотношение  $\det(R_i - \lambda E) = (\lambda_i - \lambda)^{\sigma_i}$ .

## 9.2. Жорданова нормальная форма

В силу вышеизложенного мы можем ограничиться действием линейного оператора в одном из корневых подпространств. Другими словами, мы можем считать, что  $\lambda_1$  — единственный корень характеристического уравнения линейного оператора  $A$  кратности  $n$  и, следовательно,  $\det(A - \lambda_1 I) = (\lambda_1 - \lambda)^n$ .

Как и выше, рассмотрим оператор  $A_1 = A - \lambda_1 I$ . В силу высказанных предположений имеем  $A_1^m = 0$  (т.е. нулевой оператор). Здесь  $m$  — наименьший индекс при котором  $\text{Ker } A_1^m = \text{Ker } A_1^{m+1}$ . Возвращаемся к последовательности чисел  $d_i = \dim \text{Ker } A_1^i$ , связанных соотношениями  $d_1 < d_2 < \dots < d_{m-1} < d_m = n$ . Рассмотрим вектор  $e_m \in \mathcal{D}_m \setminus \mathcal{D}_{m-1}$ , где  $\mathcal{D}_i = \text{Ker } A_1^i$ . Он порождает цепочку векторов  $e_{m-1} = A_1 e_m$ ,  $e_{m-2} = A_1 e_{m-1}$ ,  $\dots$ ,  $e_1 = A_1 e_2$ . Далее построение невозможно, так как  $e_i = A_1^{m-i} e_m$ , в частности  $e_1 = A_1^{m-1} e_m$ , следовательно,  $A_1 e_1 = 0$ . Позже будет показано, что эта система линейно независима. Линейная оболочка указанной системы векторов образует инвариантное подпространство линейного оператора  $A$ : равенство  $e_i = A_1 e_{i+1}$  означает, что  $A e_{i+1} = A_1 e_{i+1} + \lambda_1 e_{i+1} = e_i + \lambda_1 e_{i+1}$  и  $A e_1 = \lambda_1 e_1$ . Матрица сужения оператора на это подпространство имеет следующий вид:

$$J(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Матрица указанного вида называется **жордановой клеткой**, а система векторов  $e_1, e_2, \dots, e_m$  — **жордановой цепочкой**. В жордановой цепочке первый вектор является собственным, а каждый последующий вектор  $e_i$ , называемый **присоединенным вектором** порядка  $i - 1$ , есть решение системы  $A_1 e_i = e_{i-1}$ . Задача — составить базис линейного пространства (точнее, каждого корневого подпространства), состоящий из одной или нескольких жордановых цепочек (включая случай цепочек длины 1). Тогда матрица линейного оператора в рамках одного корневого подпространства будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_s(\lambda_1) \end{pmatrix},$$

в котором диагональные блоки  $J_i(\lambda_1)$  есть жордановы клетки с диагональным элементом  $\lambda_1$ .

Матрица линейного оператора, имеющая блочно-диагональный вид, в котором диагональные блоки представляют собой жордановы клетки, называется **жордановой нормальной формой**, или **каноническим видом линейного оператора**.

**Теорема 9.5.** Пусть подпространство  $\mathcal{H}$  удовлетворяет условию  $\mathcal{D}_k \oplus \mathcal{H} \subset \mathcal{D}_{k+1}$ . Тогда для любого номера  $s = \overline{1, k}$  подпространство  $A_1^s(\mathcal{H})$  изоморфно подпространству  $\mathcal{H}$  и удовлетворяет условию  $\mathcal{D}_{k-s} \oplus A_1^s(\mathcal{H}) \subset \mathcal{D}_{k-s+1}$  (здесь  $\mathcal{D}_0$  — нулевое подпространство).

◀ Во-первых, покажем, что  $A_1^s(\mathcal{H}) \cap \mathcal{D}_{k-s} = \emptyset$ . Если  $x \in A_1^s(\mathcal{H}) \cap \mathcal{D}_{k-s}$ , то  $x = A_1^s z$ , где  $z \in \mathcal{H}$ , и  $A_1^{k-s} x = 0$ . Следовательно,  $A_1^{k-s+s} z = A_1^k z = 0$  и  $z \in \mathcal{D}_k$ . Поэтому  $z \in \mathcal{D}_k \cap \mathcal{H}$ , а так как  $\mathcal{D}_k$  и  $\mathcal{H}$  составляют прямую сумму, то  $\mathcal{D}_k \cap \mathcal{H} = \{0\}$  и  $z = 0$ . Значит,  $x = A_1^s z = 0$ . Итак, подпространства  $A_1^s(\mathcal{H})$  и  $\mathcal{H}$  имеют нулевое пересечение, а следовательно, составляют прямую сумму.

Условие  $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}_{k+1}$  означает, что  $A_1^{k+1} z = 0$  для любого  $z \in \mathcal{H}$ . Следовательно, для вектора  $x = A_1^s z \in A_1^s(\mathcal{H})$  имеем  $A_1^{k-s+1} x = A_1^{k+1} z = 0$ , т.е.  $x \in \mathcal{D}_{k-s+1}$ . Наконец, изоморфность  $A_1^l(\mathcal{H})$  подпространству  $\mathcal{H}$  вытекает из того, что ядро  $\mathcal{D}_s$  линейного оператора  $A_1^s$  не пересекается с  $\mathcal{H}$ , так как  $\mathcal{D}_s \subset \mathcal{D}_k$  и  $\mathcal{D}_k \cap \mathcal{H} = \{0\}$ . ▶

Эта коротенькая теорема порождает большие последствия. Вот как можно разложить линейное пространство в прямую сумму подпространств. Напомним, что в рассматриваемом „монопольном“ (с одним собственным значением) случае  $A_1^m = 0$ , т.е.  $\mathcal{D}_m = L$ .

Выберем в  $\mathcal{D}_m$  прямое дополнение  $\mathcal{H}_1^{(1)}$  к подпространству  $\mathcal{D}_{m-1}$  и с помощью него получим подпространства  $\mathcal{H}_k^{(1)} = A_1^{k-1}(\mathcal{H}_1^{(1)})$ ,  $k = \overline{1, m}$ . Затем в  $\mathcal{D}_{m-1}$  выберем прямое дополнение  $\mathcal{H}_1^{(2)}$  к подпространству  $\mathcal{D}_{m-2} \oplus \mathcal{H}_2^{(1)}$  и с помощью него построим подпространства  $\mathcal{H}_k^{(2)} = A_1^{k-1}(\mathcal{H}_1^{(2)})$ ,  $k = \overline{1, m-1}$ . Схематично построение цепочек подпространств показано на рис. 9.1.

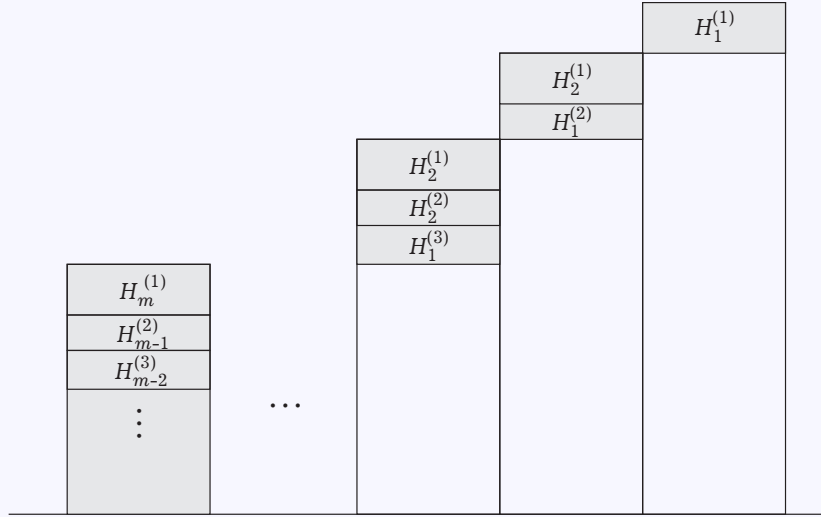


Рис. 9.1

Из этих построений вытекает, что

$$L = \mathcal{D}_m = \mathcal{D}_{m-1} \oplus \mathcal{H}_1^{(1)} = \mathcal{D}_{m-2} \oplus \mathcal{H}_1^{(2)} \oplus \mathcal{H}_2^{(1)} \oplus \mathcal{H}_1^{(1)} = \dots = \sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^{m-k+1} \mathcal{H}_s^{(k)},$$

где знак суммы обозначает прямую сумму.

В подпространствах  $\mathcal{H}_1^{(k)}$  выберем базисы. Пусть, например,  $e_1, \dots, e_t$  — базис в  $\mathcal{H}_1^{(1)}$ . Тогда  $A_1 e_1, \dots, A_1 e_t$  — базис в  $\mathcal{H}_2^{(1)}$ , и т.д. Нетрудно увидеть, что каждый вектор  $e_i$  порождает жорданову цепочку векторов  $e_i, A_1 e_i, \dots, A_1^{m-1} e_i$  длины  $m$ , „протянутую“ сквозь цепочку пространств  $\mathcal{H}_1^{(1)}, \mathcal{H}_2^{(1)}, \dots, \mathcal{H}_m^{(1)}$ . В совокупности все базисы образуют базис линейного пространства  $L$ , состоящий из жордановых цепочек.

Обратим внимание, что  $\dim \mathcal{H}_1^{(1)} = s_m = d_m - d_{m-1}$ ,  $\dim \mathcal{H}_1^{(2)} = s_{m-1} - s_m$  и вообще  $\dim \mathcal{H}_1^{(k)} = s_{m-k+1} - s_{m-k}$ , где  $s_k = d_k - d_{k-1}$ . Размерность подпространства  $\mathcal{H}_1^{(k)}$  определяет количество в базисе жордановых цепочек длины  $m - k + 1$ . Кроме того, величины  $d_k$  могут быть найдены из соотношений  $d_k = n - r_k$ , где  $r_k = \text{rang } A_1^k$ , а величины  $s_k$  — как разности  $s_k = r_{k-1} - r_k$ .

Дадим некоторую сводку характеристик, получаемых в процессе построения жордановой нормальной формы:

- параметр  $m$ , начиная с которого  $\text{rang } A_1^m = \text{rang } A_1^{m+1}$  определяет максимальный порядок жордановых клеток, отвечающих собственному значению  $\lambda_1$ ;
- размерность корневого подпространства, или алгебраическая кратность собственного значения определяет сумму порядков жордановых клеток, отвечающих собственному значению  $\lambda_1$ ;
- размерность собственного подпространства, отвечающего собственному значению  $\lambda_1$ , определяет количество жордановых клеток этого собственного значения.

**Пример 9.1.** Рассмотрим линейный оператор в  $\mathbb{R}^3$ , имеющий в стандартном базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение рассматриваемого линейного оператора имеет вид  $-3 + 5\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 = 0$ . Его корни  $\lambda_1 = 1$  кратности 2 и  $\lambda_2 = -3$  кратности 1.

Решая систему

$$\begin{pmatrix} 12 & 16 & 16 \\ -5 & -8 & -6 \\ -6 & -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

находим один собственный вектор  $\mathbf{u}_1 = (-4, 1, 2)^T$ , отвечающий собственному значению  $\lambda_1 = 1$ . Поскольку собственное пространство для этого собственного значения одномерно, то ему соответствует одна двумерная жорданова клетка. В базис войдут найденный собственный вектор и еще один присоединенный вектор первого порядка. Чтобы найти присоединенный вектор, достаточно решить систему  $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{u}_1$ , имеющую вид

$$\begin{pmatrix} 12 & 16 & 16 \\ -5 & -8 & -6 \\ -6 & -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Составив расширенную матрицу системы, приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 12 & 16 & 16 & -4 \\ -5 & -8 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & -8 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Отсюда видно, что одним из решений системы является вектор  $\mathbf{u}_2 = \left(-1, \frac{1}{2}, 0\right)^T$ .

Для собственного значения  $\lambda_2 = -3$ , решая систему  $(A + 3I)\mathbf{x} = 0$ , находим вектор  $\mathbf{u}_3 = (-2, 1, 1)^T$ .

В базисе  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  рассматриваемый линейный оператор имеет матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Матрицей перехода в новый базис является

$$U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственная проверка показывает, что произведение  $U^{-1}AU$ , дающее матрицу оператора в новом базисе, приводит к записанной выше матрице  $\tilde{A}$ . #

Рассмотренный пример несложный, поскольку в жордановой форме оказалась единственная клетка второго порядка. Рассмотрим более сложный пример.

**Пример 9.2.** Рассмотрим в  $\mathbb{R}^4$  линейный оператор, имеющий в стандартном базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для представленной матрицы очевидно:  $(1 - \lambda)^4 = 0$ . Таким образом, мы имеем единственное собственное значение  $\lambda_1 = 1$  кратности 4. Найдем собственные векторы, отвечающие собственному значению. Система уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

имеет матрицу ранга 2. Значит, фундаментальная система решений должна содержать два вектора, например  $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, -3, 2, 0)^T$ .

Строим жорданову цепочку для вектора  $\mathbf{u}_1$ . Система  $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{u}_1$  дает (промежуточные преобразования опущены):

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Отсюда получаем одно из ее решений  $\mathbf{v}_1 = (0, \frac{1}{2}, 0, 0)^T$ . Система  $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$  имеет вид

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

и не имеет решений. Следовательно, первая жорданова цепочка содержит векторы  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{v}_1$ .

Для вектора  $\mathbf{u}_2$  получаем систему  $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{u}_2$ , имеющую вид

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Нетрудно убедиться в том, что она не имеет решений. Поэтому этому вектору соответствует жорданова цепочка из одного вектора.

В результате вычислений мы получили три вектора, хотя для базиса необходимо четыре. В чем была допущена ошибка? Дело в том, что собственные векторы можно выбирать по-разному и этот выбор влияет на успешность построения базиса. Предложенная схема построения жорданова базиса не всегда приводит к успеху. #

Рассмотренный пример показывает, что построение жорданова базиса начиная от собственных векторов с последующим добавлением присоединенных векторов более высокого порядка не всегда приводит к успеху. Более эффективным является схема выявления старших присоединенных векторов с последующим восстановлением всех предыдущих векторов цепочки.

С учетом сказанного получаем следующую схему построения канонического базиса.

1. Определяем все собственные значения  $\lambda_j$  линейного оператора  $A$ .
2. Для каждого собственного значения  $\lambda_j$  выполняем следующее:

а) вычисляем ранги  $r_i^{(j)}$  линейных операторов  $(A - \lambda_j I)^i$  до того момента  $i = m_j$ , при котором  $r_{i+1}^{(j)} = r_i^{(j)}$ ;

б) составляем последовательность  $s_i^{(j)} = r_{i-1}^{(j)} - r_i^{(j)}$ ,  $i = \overline{1, m_j}$ , определяющую количества присоединенных векторов разных порядков в каноническом базисе (под  $r_0^{(j)}$  понимается нулевое значение как ранг оператора  $A_1^0 = I$ );

в) полагая  $i = m_j$ , строим набор  $e_{1,m_j}^{(j)}, \dots, e_{s_i^{(j)},m_j}^{(j)}$  присоединенных векторов порядка  $i - 1 = m_j - 1$ . Для этого находим фундаментальную систему решений (ФСР) СЛАУ  $(A - \lambda_j E)^{i-1} \mathbf{x} = 0$  и определяем любой набор векторов, который дополняет найденную ФСР до ФСР СЛАУ  $(A - \lambda_j E)^i \mathbf{x} = 0$ .

г) последовательно уменьшая номер  $i$  до  $i = 1$ , определяем присоединенные векторы  $e_{1,i}^{(j)} = (A - \lambda_1 I) e_{1,i+1}^{(j)}$  порядка  $i - 1$ , порождаемые старшими присоединенными векторами, а затем пополняем эту систему новыми присоединенными векторами так, чтобы какая-либо ФСР СЛАУ  $(A - \lambda_j E)^{i-1} \mathbf{x} = 0$  плюс вся совокупность присоединенных векторов порядка  $i - 1$  составляла ФСР СЛАУ  $(A - \lambda_j E)^i \mathbf{x} = 0$ .

3. Объединяем в единую систему все найденные присоединенные векторы, причем жордановы цепочки записываем от младших присоединенных векторов к старшим. Общая система будет каноническим базисом.

**Пример 9.3.** В примере 9.2 для единственного собственного значения  $\lambda = 1$  мы имели  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = 0$ ,  $r_4 = 0$ . Следовательно,  $m = 3$ . Поскольку  $s_m = r_{m-1} - r_m = r_2 - r_3 = 1$ , в жордановой форме присутствует жорданова клетка порядка 3, и для нее необходимо выбрать присоединенный вектор порядка 2. Далее  $s_2 = r_1 - r_2 = 1 = s_3$ , так что жордановых цепочек, заканчивающихся присоединенными векторами порядка 1 (цепочек длины 2) нет. Далее  $s_1 = r_0 - r_1 = 4 - 2 = 2 > s_2$ . Разность  $s_1 - s_2 = 1$  указывает на то, что в жордановой форме есть жорданова цепочка длины 1, т.е. цепочка, состоящая из одного собственного вектора. Такую цепочку в примере 9.2 составил вектор  $\mathbf{u}_2$ .

Чтобы завершить построение канонического базиса для рассматриваемого линейного оператора, найдем жорданову цепочку длины 3. Сперва найдем фундаментальную систему решений СЛАУ  $(A - I)^2 \mathbf{x} = 0$ . Поскольку

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

указанная СЛАУ равносильна одному уравнению  $x_4 = 0$ , а ФСР состоит, например, из векторов  $(1, 0, 0, 0)^T$ ,  $(0, 1, 0, 0)^T$ ,  $(0, 0, 1, 0)^T$ .

Матрица  $(A - I)^3$  имеет нулевой ранг, так как это нулевая матрица. Множество решений совпадает со всем линейным пространством  $\mathbb{R}^4$ , а в качестве дополнительного вектора в ФСР системы  $(A - I)^3 \mathbf{x} = 0$  можно взять  $\mathbf{u}_{1,2} = (0, 0, 0, 1)^T$ . Этому вектору соответствует жорданова цепочка

$$\mathbf{u}_{1,1} = (A - I)\mathbf{u}_{1,2} = (2, 3, 2, 0)^T, \quad \mathbf{u}_{1,0} = (A - I)\mathbf{u}_{1,1} = (12, 0, 0, 0)^T.$$

Следовательно, в качестве канонического базиса можно взять систему векторов

$$\mathbf{u}_{1,0} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В этом базисе матрица линейного оператора будет иметь вид:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 9.3. Комплексные корни

Случай, когда характеристическое уравнение линейного оператора имеет комплексные корни, можно рассмотреть в рамках **комплексного линейного пространства**. В отличие от **действительного линейного пространства** элементы комплексного линейного пространства можно умножать на комплексные числа. Все восемь аксиом линейного пространства остаются неизменными. Сохраняются и все результаты, полученные в действительном случае. В частности, любую квадратную матрицу порядка  $n$  можно рассматривать как матрицу линейного оператора, записанную в данном базисе.

В комплексном линейном пространстве характеристическое уравнение имеет ровно  $n$  корней с учетом их кратности, а любой линейный оператор приводится к жордановой форме.

Если в действительном линейном пространстве характеристическое уравнение линейного оператора имеет комплексные корни, то канонический вид такого оператора можно построить с выходом в комплексное линейное пространство. Это можно выполнить следующим образом.

Матрицу линейного оператора можно интерпретировать как матрицу другого линейного оператора, действующего в комплексном линейном пространстве  $\mathbb{C}^n$ . Построив канонический базис, нужно модифицировать его таким образом, чтобы векторы нового базиса выражались через векторы стандартного базиса с помощью действительных коэффициентов. В этом случае построенный базис можно интерпретировать и как базис действительного арифметического пространства. При этом преобразование матрицы линейного оператора не будет зависеть от того, в каком, комплексном или действительном, линейном пространстве выполняется переход.

Предположим, что матрица с действительными элементами имеет характеристическое уравнение с комплексными корнями. Комплексные корни группируются на пары комплексно сопряженных, причем в кратность комплексно сопряженных корней одинакова. Эту матрицу считаем матрицей линейного оператора в  $n$ -мерном комплексном пространстве  $\mathbb{C}^n$ . Рассмотрим пару комплексно сопряженных корней  $\lambda_0$  и  $\bar{\lambda}_0$ . Если  $e_1, e_2, \dots, e_k$  — жорданова цепочка, построенная для собственного значения  $\lambda_0$ , т.е.  $e_j = (A - \lambda_0 I)e_{j+1}$ ,  $j = \overline{1, k-1}$ , то  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k$  — жорданова цепочка, отвечающая собственному значению  $\bar{\lambda}_0$ . Учитывая это, можно так выбрать канонический базис, что жордановы цепочки будут группироваться парами, в каждой паре цепочки получаются друг из друга комплексным сопряжением\*. Пару жордановых цепочек  $e_1, e_2, \dots, e_k$  и  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k$  заменим системой векторов  $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_k, v_k$ , где

$$u_i = \frac{1}{2}(e_i + \bar{e}_i), \quad v_i = \frac{1}{2i}(e_i - \bar{e}_i),$$

Вновь построенные векторы в стандартном базисе будут иметь действительные координаты и могут рассматриваться как векторы действительного арифметического пространства  $\mathbb{R}^n$ . Если  $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ , то легко проверить, что

$$Au_1 = \alpha_0 u_1 - \beta_0 v_1, \quad Av_1 = \beta_0 u_1 + \alpha_0 v_1.$$

С учетом равенств  $Ae_j = e_{j-1} + \lambda_0 e_j$ ,  $A\bar{e}_j = \bar{e}_{j-1} + \bar{\lambda}_0 \bar{e}_j$  заключаем, что

$$Au_j = u_{j-1} + \alpha_0 u_j - \beta_0 v_j, \quad Av_j = v_{j-1} + \beta_0 u_j + \alpha_0 v_j,$$

Следовательно, линейная оболочка векторов  $u_j, v_j$ ,  $j = \overline{1, k}$ , есть инвариантное подпространство линейного оператора, а система векторов  $u_1, v_1, \dots, u_k, v_k$  будет базисом этого подпространства. Матрица линейного оператора в указанном базисе будет иметь вид

$$C_k(\alpha_0, \beta_0) = \begin{pmatrix} C(\alpha_0, \beta_0) & E & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C(\alpha_0, \beta_0) & E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C(\alpha_0, \beta_0) & E & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C(\alpha_0, \beta_0) & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C(\alpha_0, \beta_0) \end{pmatrix},$$

\*Здесь имеется в виду, что координаты векторов в стандартном базисе являются комплексно сопряженными.

где

$$C(\alpha_0, \beta_0) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ -\beta_0 & \alpha_0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполняя описанные преобразования для всех пар сопряженных жордановых цепочек, мы придем к каноническому виду линейного оператора в действительном случае.

Блочно-диагональную матрицу

$$J = \begin{pmatrix} C_{r_1}(\alpha_1, \beta_1) & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & C_{r_m}(\alpha_m, \beta_m) & & \\ & & & J_{s_1}(\mu_1) & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & J_{s_k}(\mu_k) \end{pmatrix}$$

называют **жордановой нормальной формой**.

**Теорема 9.6.** Любой линейный оператор в действительном линейном пространстве приводится к жордановой нормальной форме.

## 9.4. Теорема Кэли — Гамильтона

Пусть  $p(t)$  — произвольный многочлен с действительными коэффициентами:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_r t^r.$$

В качестве значения переменного  $t$  можно использовать не только числовые значения, но и матричные или операторные. Важно, чтобы было определено произведение объектов, рассматриваемых как значение переменного, и чтобы это произведение обладало свойством ассоциативности. Итак, для произвольного линейного оператора  $A$ , действующего в линейном пространстве  $\mathcal{L}$ , определен линейный оператор

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_r A^r.$$

Для данного линейного оператора  $A$  среди всех многочленов выделим такие многочлены  $p(t)$ , для которых линейный оператор  $p(A)$  является нулевым. Такие многочлены называют **аннулирующими многочленами**.

Аннулирующие многочлены можно строить, используя жорданову нормальную форму линейного оператора. Из изложенного выше вытекает, что если  $\lambda_1$  — собственное значение и  $m_1$  — максимальный порядок жордановых клеток, отвечающих  $\lambda_1$ , то линейный оператор  $(A - \lambda_1 I)^{m_1}$  оказывается нулевым в корневом подпространстве, соответствующем собственному значению  $\lambda_1$ .

Пусть  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , полный перечень собственных значений линейного оператора  $A$ , а  $m_i$  — максимальные размеры соответствующих жордановых клеток в каноническом виде оператора. Тогда линейный оператор

$$(A - \lambda_1 I)^{m_1} (A - \lambda_2 I)^{m_2} \dots (A - \lambda_r I)^{m_r}$$

соответствующий многочлену

$$q_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} (t - \lambda_2)^{m_2} \dots (t - \lambda_r)^{m_r},$$

будет нулевым в каждом корневом пространстве. Поэтому  $q_A(A)$  будет нулевым на всем линейном пространстве, так как линейное пространство есть прямая сумма корневых подпространств. Следовательно, многочлен оказывается аннулирующим.

Отметим, что аннулирующим будет и любой многочлен, делящийся на  $q_A(t)$ . Но верно и обратное: любой аннулирующий многочлен делится на  $q_A(t)$ . Действительно, пусть  $p(A)$  — нулевой оператор. Выберем жорданов базис и рассмотрим в нем некоторую жорданову цепочку  $e_1, e_2, \dots, e_m$ , отвечающую собственному значению  $\lambda_0$ . Вектор  $e_1$  собственный с собственным значением  $\lambda_0$ . Поэтому  $p(A)e_1 = p(\lambda_0)e_1$ . Следовательно, равенство  $p(A)e_1 = 0$  возможно только при  $p(\lambda_0) = 0$ , т.е. когда  $\lambda_0$  — корень многочлена  $p(t)$ . В этом случае  $p(A) = p_1(A)(A - \lambda_0 I)$ . Поэтому для вектора  $e_2$  получаем

$$p(A)e_2 = p_1(A)(A - \lambda_0 I)e_2 = p_1(A)e_1 = p_1(\lambda_0)e_1.$$

Значит, равенство  $p(A)e_2 = 0$  означает, что  $p_1(\lambda_0) = 0$  и кратность корня  $\lambda_0$  многочлена  $p(t)$  не менее 2. Продолжая рассуждения, заключаем, что кратность корня  $\lambda_0$  многочлена  $p(t)$  не менее  $m$  — длины жордановой цепочки.

Из приведенных рассуждений следует, что корнями аннулирующего многочлена  $p(t)$  линейного оператора  $A$  являются все собственные значения  $A$ , причем кратность каждого собственного значения  $\lambda_j$  не меньше, чем максимальная длина жордановых цепочек, отвечающих этому собственному значению, или размерность  $m_j$  корневого подпространства. Поэтому аннулирующий многочлен делится на степени  $(t - \lambda_j)^{m_j}$ , а следовательно, на многочлен  $q_A(t)$ .

Из доказанного вытекает, что многочлен  $q_A(t)$  имеет наименьшую степень среди всех многочленов, аннулирующих  $A$ , и его называют **минимальным аннулирующим многочленом** линейного оператора  $A$ .

**Теорема 9.7 (теорема Кэли — Гамильтона).** Характеристический многочлен линейного оператора является для него аннулирующим.

◀ Доказывать эту теорему удобнее всего в рамках комплексного линейного пространства. Представим характеристический многочлен  $\chi_A(t)$  в виде

$$\chi_A(t) = (t - \lambda_1)^{\sigma_1} (t - \lambda_2)^{\sigma_2} \dots (t - \lambda_r)^{\sigma_r},$$

где  $\sigma_i$ ,  $i = \overline{1, r}$ , — алгебраические кратности собственных значений  $\lambda_i$  линейного оператора. Ранее было установлено, что размерности  $m_i$  корневых подпространств, равные максимальным порядкам жордановых клеток, не превышают алгебраических кратностей  $\sigma_i$ , т.е.  $m_i \leq \sigma_i$ ,  $i = \overline{1, r}$ . Из этого вытекает, что характеристический многочлен  $\chi_A(t)$  делится на минимальный многочлен  $q_A(t)$ . Поэтому характеристический многочлен является аннулирующим. ►

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                       |           |
|-----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4. Псевдорешения и псевдообратная матрица</b>                      | <b>1</b>  |
| 4.1. Метод наименьших квадратов . . . . .                             | 1         |
| 4.2. Псевдорешения . . . . .                                          | 3         |
| 4.3. Скелетное разложение . . . . .                                   | 4         |
| 4.4. Псевдообратная матрица . . . . .                                 | 6         |
| 4.5. Проектирование на подпространство . . . . .                      | 10        |
| <b>9. Жорданова нормальная форма</b>                                  | <b>12</b> |
| 9.1. Корневые подпространства . . . . .                               | 12        |
| 9.2. Жорданова нормальная форма . . . . .                             | 14        |
| 9.3. Комплексные корни . . . . .                                      | 19        |
| 9.4. Теорема Кэли — Гамильтона . . . . .                              | 20        |
| <b>13. Операции над тензорами</b>                                     | <b>22</b> |
| 13.1. Понятие тензора . . . . .                                       | 22        |
| 13.2. Матричная запись тензоров . . . . .                             | 23        |
| 13.3. Преобразование тензоров, записанных в матричной форме . . . . . | 24        |
| <b>14. Множества и отношения</b>                                      | <b>26</b> |
| 14.1. Алгебра множеств . . . . .                                      | 26        |
| 14.2. Отображения и соответствия . . . . .                            | 30        |
| 14.3. Отношения и операции . . . . .                                  | 32        |
| 14.4. Элементы математической логики . . . . .                        | 34        |
| 14.5. Мощность множеств . . . . .                                     | 35        |
| <b>16. Кольца и поля</b>                                              | <b>36</b> |
| 16.1. Кольца . . . . .                                                | 36        |
| 16.2. Специальные типы колец . . . . .                                | 36        |
| 16.3. Гомоморфизмы колец и факторизация . . . . .                     | 36        |
| 16.4. Модули и алгебры . . . . .                                      | 36        |
| 16.5. Алгебры на поле . . . . .                                       | 40        |
| <b>17. Кольцо многочленов</b>                                         | <b>43</b> |
| 17.1. Определение кольца многочленов . . . . .                        | 43        |
| 17.2. Деление с остатком и его свойства . . . . .                     | 45        |
| 17.3. Разложение на неприводимые множители . . . . .                  | 49        |
| 17.4. Использование делимости в теории шифрования . . . . .           | 49        |
| 17.5. Кватернионы . . . . .                                           | 50        |
| <b>19. Полукольца и булевы алгебры</b>                                | <b>51</b> |
| 19.1. Определение полукольца . . . . .                                | 51        |
| 19.2. Ряды в полукольцах . . . . .                                    | 53        |
| 19.3. Замкнутые полукольца . . . . .                                  | 57        |
| 19.4. Системы линейных уравнений в полукольцах . . . . .              | 58        |
| 19.5. Симметричные полукольца . . . . .                               | 63        |
| 19.6. Решетки . . . . .                                               | 67        |