

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ

Конспект лекций

Для студентов специальности
«Прикладная математика»

Москва
2009

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

Лекция 12

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Понятие числового ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд. Свойства сходящихся числовых рядов : сложение и вычитание рядов, умножение ряда на число, принцип отбрасывания (теорема об остатке ряда). Знакоположительные числовые ряды и признаки их сходимости: признаки сравнения; признак Даламбера; признак Коши (радикальный). Интегральный признак Коши и ряды Дирихле.

12.1. Основные понятия

Пусть $\{a_n\}$ — произвольная числовая последовательность. Запись этой последовательности в виде

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (12.1)$$

называют **числовым рядом**. Форма записи говорит об основной задаче, связанной с введенным понятием: суммировании членов последовательности в каком-либо смысле (количество слагаемых бесконечно и поэтому о сумме в обычном смысле слова говорить нельзя).

Введем первичные понятия. Сумма нескольких последовательных членов ряда $S_n = a_1 + \dots + a_n$ называется **частичной суммой**. Частичные суммы S_n образуют последовательность, называемую **последовательностью частичных сумм**. Предел последовательности частичных сумм, если он существует, называют **суммой ряда**. Таким образом, под суммой S ряда (12.1) понимается предел

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right).$$

Если указанный предел частичных сумм ряда существует, то говорят, что **ряд сходится**. В противном случае говорят, что **ряд расходится**.

Между последовательностями и рядами существует тесная связь. Каждый ряд $\sum a_k$ генерирует специальную последовательность — последовательность своих частичных сумм $\{S_n\}$. В то же время любая числовая последовательность $\{S_n\}$ является последовательностью частичных сумм некоторого ряда, именно, достаточно положить $a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$. Это рассуждение показывает, что задачи определения суммы ряда и предела последовательности фактически совпадают или, точнее, являются различными формулировками одной задачи.

На практике последовательность членов ряда может задаваться различными способами. Простейший — задание с помощью формулы, т.е. как и любой другой функции (последовательность — это функция, определенная на натуральных числах). В этом случае определяющую формулу называют **общим членом ряда**. Например:

ряд	общий член
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	$a_n = \frac{1}{n}$
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$	$a_n = (-1)^n$

Но существуют и другие способы определения последовательностей. Например, рекуррентный: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n = 2, 3, \dots$

Пример 12.1. Один из немногих рядов, которые можно суммировать непосредственно — геометрическая прогрессия. **Геометрической прогрессией** называют ряд, у которого отношение двух

соседних членов постоянно: $a_{n+1}/a_n = \text{const}$. Несложно убедиться, что общий член такого ряда задается формулой $a_n = cq^n$. Параметр q определяет отношение двух соседних членов прогрессии и называется ее **знаменателем**. Параметр c представляет собой значение „нулевого“ слагаемого (первого члена ряда, если этот ряд нумеровать с нуля). n -я частичная сумма прогрессии вычисляется непосредственно:

$$S_n = c \sum_{k=1}^n q^k = c \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Исходя из этой формулы, делаем вывод, что указанный ряд сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$. При этом его суммой является

$$\sum_{n=0}^{\infty} cq^n = \frac{c}{1 - q}.$$

Теорема 12.1 (Необходимый признак сходимости). Если ряд (12.1) сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

◀ Ряд сходится, если существует предел частичных сумм $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Но тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0.$$

▶

Пример 12.2. Ряд $\sum (-1)^n$ расходится, так как последовательность его членов $\{(-1)^n\}$ не имеет предела.

Пример 12.3. Необходимый признак сходимости рядов не является достаточным. Например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

называемый **гармоническим**, расходится. Действительно, для частичных сумм

$$S_{2n} = S_n + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq S_n + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = S_n + \frac{1}{2}.$$

Поэтому, если $n = 2^p$, то $S_n > p/2$. Последовательность частичных сумм не имеет конечного предела, т.е. ряд расходится. В то же время необходимый признак выполняется.

Теорема 12.2 (об остатке). Если ряд $a_1 + \dots + a_k + \dots$ сходится, то и ряд $a_k + a_{k+1} + \dots$ сходится. Обратно, из сходимости второго ряда следует сходимость первого.

Ряд, полученный выбрасыванием из данного ряда первых слагаемых, называют **остатком** исходного. Последовательность S_n частичных сумм исходного ряда и последовательность S'_l его остатка, полученного отбрасыванием первых k слагаемых, связаны соотношением: $S'_l = S_{k+l} - S_k$. При $l \rightarrow \infty$ обе части равенства имеют один и тот же предел или не имеют его одновременно.

12.2. Операции над рядами

Произведением ряда $\sum a_n$ на число λ называют ряд, полученный умножением каждого члена исходного ряда на число λ , т.е. ряд $\sum (\lambda a_n)$. **Суммой двух рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$** называют ряд $\sum (a_n + b_n)$.

Теорема 12.3. При умножении ряда на число его сумма умножается на число. При сложении двух рядов их суммы складываются:

$$\sum (\lambda a_n) = \lambda \sum a_n. \quad \sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n.$$

Сформулированное утверждение дает обобщение обычных правил операции над числовыми выражениями: свойства коммутативности и дистрибутивности. Чтобы доказать утверждение, нужно

убедиться, что свойство верно для частичных сумм, а затем воспользоваться свойствами пределов последовательностей.

Операция сложения рядов имеет обратную операцию вычитания. Именно, **разностью** $A - B$ двух рядов A и B является такой ряд C , что $B + C = A$. Нетрудно убедиться, что разностью рядов $A = \sum a_n$ и $B = \sum b_n$ является ряд $\sum (a_n - b_n)$. Очевидно, что суммой разности двух рядов является разность их сумм:

$$\sum (a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n.$$

12.3. Знакоположительные числовые ряды

Особый интерес представляют ряды, у которых все члены имеют одинаковый знак, т.е. **знакопостоянные ряды**. Если все члены ряда отрицательны, то можно одновременно у них всех поменять знак, умножив ряд на -1 . Получим ряд из положительных членов, который называют **знакоположительным**. Мы можем ограничиться рассмотрением знакоположительных рядов, так как (мы это показали) все знакоотрицательные ряды легко сводятся к знакоположительным.

Утверждение, что все члены ряда являются положительными, равносильно утверждению, что последовательность частичных сумм является монотонно возрастающей. Возрастание строгое, если ряд не имеет нулевых слагаемых. Последовательность частичных сумм знакоположительного ряда, будучи монотонной, всегда имеет предел, конечный или бесконечный. Конечность предела означает сходимость ряда. Таким образом, для сходимости знакоположительного ряда (и вообще знакопостоянного ряда) достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной.

Теорема 12.4 (1-й признак сравнения). Пусть знакоположительные ряды $A = \sum a_n$ и $B = \sum b_n$ удовлетворяют условию $a_n \leq b_n$, $n = \overline{1, \infty}$. Если ряд B сходится, то и ряд A сходится. Если ряд A расходится, то и ряд B расходится.

◀ Обозначив через $\{s_n\}$ последовательность частичных сумм ряда A , через $\{S_n\}$ — ряда B , заключаем, что $s_n \leq S_n$, $n = \overline{1, \infty}$. Если ряд B сходится, то последовательность $\{S_n\}$ монотонно возрастает и ограничена. Но тогда и монотонно возрастающая последовательность $\{s_n\}$ ограничена, т.е. ряд A сходится. Второе утверждение является логическим отрицанием первого. ▶

Замечание. Если для рядов $A = \sum a_n$ и $B = \sum b_n$ выполняется условие $a_n \leq b_n$, $n = \overline{1, \infty}$, то мы будем обозначать это неравенством: $A \leq B$. В этом случае говорят, что ряд B является **мажорирующим** или **мажорантой** для A .

Следствие 12.1 (2-й признак сравнения). Пусть для знакоположительных рядов $A = \sum a_n$ и $B = \sum b_n$ существует конечный ненулевой предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c.$$

Тогда ряд A сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд B .

◀ Из условия вытекает, что последовательность a_n/b_n , имеющая конечный предел, ограничена, т.е. $a_n/b_n \leq c$. Но это значит, что ряд cB является мажорантой для A . Если ряд B сходится, то и ряд cB сходится. По теореме 13.1 сходится и ряд A . Обратное утверждение тоже верно в силу симметричности условия относительно пары рядов. ▶

Замечание. Условие в следствии можно ослабить, потребовав всего лишь, чтобы

$$0 < c_1 \leq \liminf \frac{a_n}{b_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_n}{b_n} \leq c_2 < \infty.$$

Следствие 12.2 (3-й признак сравнения). Если $a_n \sim b_n$ при $n \rightarrow \infty$, то ряды $A = \sum a_n$ и $B = \sum b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Напомним, что бесконечно малые последовательности эквивалентны, если существует предел их отношения, равный 1. Таким образом, 3-й признак сравнения является прямым следствием 2-го, но он имеет самостоятельное значение в силу эффективности техники бесконечно малых.

Пример. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 - n + 1}}$$

расходится, так как

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - n + 1}} \sim \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Признаки сравнения позволяют решать задачу исследования сходимости ряда при помощи его сравнения с одним из известных. Однако ограничиться сравнением лишь с одним „универсальным“ рядом не удастся.

Теорема 12.5. Для любого сходящегося ряда $\sum a_n$ существует сходящийся ряд $\sum b_n$, для которого $a_n = o(b_n)$ при $n \rightarrow \infty$. Для любого расходящегося ряда $\sum c_n$ существует расходящийся ряд $\sum d_n$, для которого $d_n = o(c_n)$ при $n \rightarrow \infty$.

◀ Пусть $\sum a_n$ сходится. Положим

$$A_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \sqrt{A_n} - \sqrt{A_{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$ и

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sqrt{A_1} - \sqrt{A_{n+1}} \rightarrow \sqrt{A_1},$$

при $n \rightarrow \infty$, т.е. ряд $\sum b_n$ сходится. При этом при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\sqrt{A_n} - \sqrt{A_{n+1}}}{A_n - A_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{A_n} + \sqrt{A_{n+1}}} \rightarrow \infty.$$

Второе утверждение доказывается аналогично. Необходимо положить $d_n = \sqrt{C_{n+1}} - \sqrt{C_n}$, где C_n — частичные суммы ряда $\sum c_n$. ▶

В простейшем случае сравнение с некоторым „стандартным“ рядом может быть сформулировано в виде самостоятельного признака сходимости, который на практике более удобен, чем непосредственное сравнение. К таким признакам относятся два наиболее известных (может быть, в силу своей простоты) — признаки Коши и Даламбера.

Теорема 12.6 (признак Коши радикальный). Если существует предел

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = q,$$

где $a_n \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$, то:

- при $q < 1$ ряд $\sum a_n$ сходится;
- при $q > 1$ ряд $\sum a_n$ расходится.

◀ Если $q < 1$, то, выбрав произвольное число q' , $q < q' < 1$, заключаем, что, начиная с некоторого номера, $\sqrt[n]{a_n} < q'$. Но тогда $a_n < (q')^n$, т.е. исходный ряд мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем $q' < 1$ а потому сходится.

Если $q > 1$, то, начиная с некоторого номера $\sqrt[n]{a_n} > 1$ или $a_n > 1$, откуда следует, что не выполняется необходимый признак сходимости рядов. Поэтому ряд $\sum a_n$ расходится. ▶

Теорема 12.7 (признак Даламбера). Если существует предел

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

где $a_n \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$, то:

- при $q < 1$ ряд $\sum a_n$ сходится;
- при $q > 1$ ряд $\sum a_n$ расходится.

Доказательство этого признака строится по той же схеме, что и для признака Коши, его предлагается освоить самостоятельно.

Пример. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

сходится, так как по признаку Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} < 1.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

также сходится, так как по признаку Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Теорема 12.8 (признак Коши интегральный). Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[0, +\infty)$, неотрицательна и монотонно убывает на этом промежутке. Тогда несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходятся или расходятся одновременно.

◀ В силу монотонности функции $f(x)$ для любого натурального числа n имеем неравенства

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n).$$

Складывая эти неравенства для различных значений n , получаем

$$\sum_{n=1}^N f(n) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n+1) \leq \sum_{n=0}^{N-1} \int_n^{n+1} f(x) dx = \int_0^N f(x) dx$$

и

$$\int_1^N f(x) dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, то его частичные суммы ограничены. Значит, для некоторого числа M верно неравенство

$$\int_1^N f(x) dx \leq M.$$

Таким образом, функция $F(x) = \int_1^x f(x) dx$ монотонно возрастает, так как подынтегральная функция неотрицательна, причем $F(N) \leq M$. Значит, $F(x)$ ограничена и имеет предел при $x \rightarrow +\infty$. Но существование предела равносильно сходимости несобственного интеграла $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Если сходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$, то функция, определенная равенством $F(x) = \int_0^x f(x) dx$, ограничена. Значит, ограничена последовательность частичных сумм $S_N = \sum_{n=1}^N f(n)$, что равносильно сходимости знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. ▶

Замечание. Если функция $f(x)$ определена, неотрицательна и убывает на промежутке $[a, +\infty)$, для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ равенство $a_n = f(n)$ выполняется, начиная с некоторого номера N , то утверждение теоремы 13.4 остается в силе. Действительно, в этом случае достаточно рассмотреть функцию $\tilde{f}(x) = f(x + N)$, определенную на $[0, +\infty)$, и остаток $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ исходного ряда. В этом случае условия теоремы будут выполнены и сходимость ряда будет равносильна сходимости интеграла. Предпринятые модификации интеграла и ряда не влияют на их сходимость.

Пример. Исследуем на сходимость *ряд Дирихле*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Если $p \leq 0$, данный ряд расходится согласно необходимому признаку. Поэтому остановимся на случае $p > 0$. В этом случае функция $f(x) = 1/x^p$ неотрицательна и монотонно убывает на промежутке $[1, +\infty)$. Можно применить интегральный признак Коши, и мы заключаем, что сходимость ряда эквивалентна сходимости соответствующего интеграла, который можно вычислить непосредственно:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \Big|_1^{+\infty} \quad \text{—} \quad \begin{cases} \text{сходится при } p > 1, \\ \text{расходится при } p \leq 1. \end{cases}$$

Итак, ряд Дирихле сходится, если показатель степени p превышает 1, и расходится в остальных случаях.

Лекция 13

ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Знакопеременные числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося знакопеременного числового ряда. Признаки Дирихле и Абеля. Свойства знакопеременных числовых рядов (группирование, изменение порядка суммирования, умножение рядов). Знакопеременные числовые ряды. Признак Лейбница. Оценка суммы и остатка знакопеременного ряда, удовлетворяющего признаку Лейбница.

Теорема 13.1. Если ряд $\sum |a_n|$ сходится, то и ряд $\sum a_n$ тоже сходится.

◀ Док-во использует критерий Коши. Если ряд $\sum |a_n|$ сходится, то по критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \implies \sum_{i=n+1}^{n+p} |a_i| < \varepsilon.$$

Но тогда для выбранного δ

$$\left| \sum_{i=N+1}^{N+p} a_i \right| \leq \sum_{i=N+1}^{N+p} |a_i| < \varepsilon,$$

что равносильно сходимости ряда $\sum a_n$. ▶

Замечание. Приведенное доказательство наиболее естественно. Для сравнения приведем другое, более красивое, хотя и не такое очевидное доказательство. Положим

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n > 0, \\ 0, & a_n \leq 0, \end{cases} \quad a_n^- = \begin{cases} 0, & a_n > 0, \\ -a_n, & a_n \leq 0. \end{cases}$$

Тогда $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ и $a_n = a_n^+ - a_n^-$. Из первого равенства вытекает сходимость знакоположительных рядов $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$, а из второго — сходимость $\sum a_n$.

Ряд $\sum a_n$, для которого $\sum |a_n|$ сходится, называют **абсолютно сходящимся**. Если ряд $\sum a_n$ сходится, но $\sum |a_n|$ расходится, то его называют **сходящимся условно**. Теорема 14.1 утверждает, что абсолютная сходимость влечет за собой обычную сходимость или, другими словами, абсолютная сходимость есть усиление требования обычной сходимости.

Признак абсолютной сходимости — простейший признак сходимости знакопеременных рядов. Этот признак, в частности, позволяет для анализа знакопеременных рядов применять признаки Даламбера и Коши. В самом деле, рассмотрим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q.$$

Если $q < 1$, то по признаку Коши ряд $\sum |a_n|$ сходится, т.е. исходный ряд сходится абсолютно. Если же $q > 1$, то, как следует из доказательства признака Коши, последовательность $\{|a_n|\}$ не стремится к 0. Но тогда это верно и для последовательности $\{a_n\}$, т.е. для ряда не выполняется необходимый признак сходимости и потому он расходится. Те же рассуждения верны и для признака Даламбера.

13.1. Другие признаки сходимости

Ряд $\sum a_n$ называют **знакопеременным**, если любые два соседних члена ряда имеют противоположные знаки. Такой ряд можно записать в виде $\sum (-1)^n |a_n|$, разделив знак и абсолютное значение членов ряда.

Теорема 13.2 (Признак Лейбница). Пусть для знакопередающегося ряда $\sum (-1)^n a_n$, $a_n > 0$, при $n = \overline{1, \infty}$, выполняются условия:

- а) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;
- б) $a_{n+1} \leq a_n$, $n = \overline{1, \infty}$.

Тогда ряд сходится.

◀ Знак первого члена ряда не является существенным (при необходимости можно ряд умножить на -1). Для определенности считаем, что он положителен. Тогда последовательность четных частичных сумм ряда является возрастающей, ограниченной сверху любой нечетной частичной суммой. С другой стороны, последовательность нечетных частичных сумм монотонно убывает и ограничена снизу любой четной частичной суммой. В самом деле,

$$\begin{aligned} S_{2n+2} &= S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}, \\ S_{2n+3} &= S_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} \leq S_{2n+1} \\ S_{2n+1} &= S_{2n} + a_{2n+1} \geq S_{2n} \\ S_{2n+2} &= S_{2n+1} - a_{2n+2} \leq S_{2n+1} \end{aligned}$$

Эти выкладки означают, что последовательности четных и нечетных частичных сумм имеют предел. Но разность этих последовательностей есть последовательность членов ряда, т.е. стремится к 0. Поэтому единая последовательность частичных сумм имеет предел, т.е. ряд сходится. ▶

Замечание. Анализируя доказательство, можно получить неравенство

$$|S_n - S| \leq a_{n+1}.$$

Значит, сумма остатка знакопередающегося ряда не превосходит первого отброшенного члена. Таким образом, теорема 14.2 дает не только доказательство сходимости ряда, но и оценку его остатка. Например, чтобы вычислить приближенно сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

с точностью 0.001, нужно взять 1000 первых членов ряда. Можно было бы точнее оценить остаток ряда, но в данном случае признак Лейбница дает завышение всего лишь в 2 раза.

Следующие два признака основываются на техническом приеме, аналогичном интегрированию по частям.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Непосредственно трудно сказать, сходится ли этот несобственный интеграл. Но если его проинтегрировать по частям:

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = - \int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{x} d(\cos x) = - \frac{\cos x}{x} \Big|_{\pi}^{\infty} - \int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx,$$

то приходим к интегралу, сходящемуся абсолютно. Поэтому исходный интеграл сходится.

Рассмотрим две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Сумма

$$S = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \quad (13.1)$$

(**сегмент ряда**) может быть преобразована следующим образом. Выберем последовательность $\{S_n\}$ так, что $a_n = S_n - S_{n-1}$, $n = \overline{1, \infty}$ (например, S_n — последовательность частичных сумм ряда $\sum a_n$).

Подставим выражение a_n через S_n в сумму (13.1):

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^p (S_{n+k} - S_{n+k-1}) b_{n+k} = \sum_{k=1}^p S_{n+k} b_{n+k} - \sum_{k=1}^p S_{n+k-1} b_{n+k} = \\ &= \sum_{k=1}^p S_{n+k} b_{n+k} - \sum_{k=0}^{p-1} S_{n+k} b_{n+k+1} = S_{n+p} b_{n+p} - S_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{p-1} S_{n+k} (b_{n+k} - b_{n+k+1}). \end{aligned}$$

Полученное преобразование аналогично рассмотренному выше интегрированию по частям, роль производных играют первые разности последовательностей. Это преобразование иногда называют **преобразованием Абеля**.

Теорема 13.3 (Признак Дирихле). Пусть:

- 1) последовательность частичных сумм ряда $\sum a_n$ ограничена;
- 2) последовательность b_n является монотонной и бесконечно малой.

Тогда ряд $\sum a_n b_n$ сходится.

◀ Считаем, что $b_n > 0$ для всех n . Пусть A_n — последовательность частичных сумм ряда $\sum a_n$. Применим к сегменту ряда $\sum a_n b_n$ преобразование Абеля:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = A_{n+p} b_{n+p} - A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{p-1} A_{n+k} (b_{n+k} - b_{n+k+1}).$$

Оно приводит к оценке сегмента ряда (здесь M — некоторое положительное число):

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| &\leq |A_{n+p} b_{n+p}| + |A_n b_{n+1}| + \sum_{k=1}^{p-1} |A_{n+k}| (b_{n+k} - b_{n+k+1}) \leq \\ &\leq M \left[b_{n+p} + b_{n+1} + \sum_{k=1}^{p-1} (b_{n+k} - b_{n+k+1}) \right] = M (b_{n+p} + b_{n+1} + b_{n+1} - b_{n+p}) = 2M b_{n+1}. \end{aligned}$$

Применение критерия Коши завершает доказательство. ►

Теорема 13.4 (Признак Абеля). Пусть:

- 1) ряд $\sum a_n$ сходится;
- 2) последовательность b_n является монотонной и ограниченной.

Тогда ряд $\sum a_n b_n$ сходится.

Признак доказывается аналогично предыдущему. В качестве последовательности S_n нужно взять последовательность остатков ряда $\sum a_n$, которая стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$.

13.2. Группировки

Рассмотрим ряд $\sum a_n$. При помощи любой строго возрастающей последовательности $\{n_k\}$ натуральных чисел, начинающейся с 0, можно образовать новый ряд $\sum b_k$, положив

$$b_k = \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i.$$

В результате получим ряд

$$(a_1 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}) + \dots$$

который получается из исходного **группированием членов** (грубо говоря, расстановкой скобок). Такое преобразование может быть полезно при исследовании на сходимость.

Сформулируем два утверждения, касающиеся сходимости группированного ряда:

- если ряд $\sum a_n$ сходится, то любой ряд $\sum b_n$, полученный группировкой исходного, сходится к той же сумме;
- если общий член ряда $\sum a_n$ стремится к 0, ряд $\sum b_n$ получен группировкой первого, причем каждый его член есть сумма не более K членов ряда $\sum a_n$, то из сходимости $\sum b_n$ следует сходимость $\sum a_n$.

Отметим, что группировка ряда равнозначна выделению из последовательности S_n его частичных сумм некоторой подпоследовательности S_{n_k} . Таким образом, первое утверждение — это перефразировка следующего свойства сходящихся последовательностей: любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится. Если каждая группа содержит не более фиксированного числа K членов исходного ряда, то любая из отброшенных частичных сумм отличается от ближайшей оставшейся не более чем на сумму модулей K подряд идущих членов исходного ряда:

$$|S_n - S_{n_k}| \leq |a_{n_k+1}| + \dots + |a_{n_{k+1}}|, \quad n_k + 1 \leq n \leq n_{k+1}.$$

Если общий член ряда стремится к 0, то и указанная сумма как сумма K бесконечно малых, тоже стремится к 0.

Если в ряде часть членов (конечное или бесконечное их число) равна 0, то их можно выбросить из ряда. При этом вновь полученный ряд будет сходиться или расходиться наравне с исходным. Описанная операция может интерпретироваться как вариант группирования (нулевые члены группируются с последним ненулевым из предшествующих членов). Но в этом случае дополнительных условий не требуется. С точки зрения последовательности частичных сумм указанная операция есть исключение в последовательности идущих подряд повторений.

13.3. Перестановки

Рассмотрим взаимно однозначное отображение $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ множества натуральных чисел на себя, $p(n)$ — значение отображения для аргумента n . Ряд $\sum a_{p(n)}$ называется перестановкой ряда $\sum a_n$. Перестановка — расположение членов ряда в ином порядке. Утверждение, что после перестановки ряд сходится к той же сумме, является обобщением закона коммутативности для конечных сумм. Однако такое утверждение верно лишь при некоторых дополнительных условиях. Сформулируем некоторые из таких условий.

- Если существует такое число K , что $p(n) - n < K$ при всех n , то исходный ряд и его перестановка сходятся или расходятся одновременно, причем если сходятся, то к одной сумме.
- Если ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно, то любая его перестановка сходится абсолютно и к той же сумме.
- Если ряд сходится условно, то в результате его перестановки можно получить как расходящийся ряд, так и ряд, сходящийся к любому наперед заданному числу (**теорема Римана**).

Первое утверждение близко по своей природе к соответствующему утверждению о группировках. Но наиболее существенным является второе. Теорема Римана, приведенная без доказательства, иллюстрирует необходимость требования абсолютной сходимости. Мы остановимся на втором утверждении подробнее. Оно распадается на два относительно самостоятельных утверждения:

- перестановка знакоположительного сходящегося ряда всегда сходится;
- при перестановке абсолютно сходящегося ряда сумма не меняется.

Для доказательства первого достаточно показать ограниченность частичных сумм переставленного ряда. Пусть исходный ряд $\sum a_n$, переставленный — $\sum b_n$, где $b_n = a_{p(n)}$. Положим $K(n) = \max \{p(1), \dots, p(n)\}$. Тогда частичные суммы рядов A_n и B_n связаны соотношением $B_n < A_{K(n)}$, так как все слагаемые левой частичной суммы входят в правую. Неравенство доказывает, что последовательность $\{B_n\}$ ограничена.

Отметим, что перестановка является симметричной операцией: исходный ряд может быть восстановлен обратной перестановкой. Поэтому доказательство любого из утверждений в одну сторону является доказательством и в обратную сторону. В терминологии предыдущего рассуждения частная сумма B_n отличается от $A_{p(n)}$ еще не добавленными членами, которые в ряде $\sum b_n$ имеют номера более

n . Если этот ряд сходится абсолютно, то для любого ε можно выбрать такой номер n , что выполняется неравенство

$$|b_{n+1}| + |b_{n+2}| + \dots < \varepsilon. \quad (13.2)$$

Во-первых, это означает, что частичная сумма B_n отличается от суммы B ряда $\sum b_n$ не более чем на ε , так как $|B_n - B| = |b_{n+1} + b_{n+2} + \dots|$. Во-вторых, указанное неравенство приводит к соотношению $|A_{K(n)} - B_n| < \varepsilon$, так как $A_{K(n)}$ получается из B_n добавлением некоторых из членов b_k с $k > n$. Поэтому $|A_{K(n)} - B| < 2\varepsilon$. Остается заметить, что последовательность $K(n)$ стремится к ∞ , а потому $\{A_{K(n)}\}$ сходится к сумме A ряда $\sum a_n$. Тем самым доказано, что $A = B$.

13.4. Умножение рядов

При перемножении двух конечных сумм $(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_m)$ необходимо вычислить все попарные произведения левых слагаемых с правыми, а потом все произведения сложить. Порядок сложения не является существенным. Все попарные произведения составляют матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_m \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_m \end{pmatrix}$$

В случае произведения двух рядов все попарные произведения образуют бесконечную в обе стороны матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_m & \dots \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_m & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_m & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

В общем случае сумма всех этих попарных произведений зависит от их порядка. Поэтому для получения содержательного смысла суммы всех слагаемых необходимо дополнительное требование абсолютной сходимости.

Если исходные ряды знакоположительны, то и ряд из их попарных произведений является знакоположительным. Суммируя „по квадратам“, в последовательности частичных сумм будем иметь подпоследовательность произведений частичных сумм исходных рядов. Это доказывает и сходимость, и то, что сумма произведения рядов в этом случае равна произведению сумм исходных рядов. Как и ранее, это сразу переносится на знакопеременные абсолютно сходящиеся ряды (если исходные ряды сходятся абсолютно, то ряд из попарных произведений сходится тоже абсолютно, его можно суммировать „по квадратам“).

Принято произведение рядов суммировать „по диагоналям“ с группировкой членов одной диагонали. Именно, под произведением рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$ понимают ряд $\sum c_n$ с членами

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}. \quad (13.3)$$

Группировка членов может обеспечить основную формулу (произведение сумм равно сумме произведений) при более слабых условиях. В частности, если указанные ряды сходятся, причем хотя бы один из них (не обязательно оба) сходится абсолютно, то ряд $\sum c_n$ с общим членом (13.3) сходится абсолютно, и его суммой является произведение сумм исходных рядов (это утверждение не доказываем).

Лекция 14

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Основные свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы ряда, почленное дифференцирование и интегрирование). Признаки равномерной сходимости Дирихле и Абеля.

14.1. Функциональные последовательности

Функциональная последовательность (ФП) представляет собой последовательность, составленную из функций. Другими словами, такая последовательность представляет собой отображение натурального ряда в некоторое пространство функций. Мы будем полагать, что все члены функциональной последовательности имеют одну и ту же область определения, которую будем называть **областью определения функциональной последовательности**. В этом случае можно сказать и так: ФП — это отображение $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, т.е. функция от 2-х переменных, причем первый аргумент является натуральным, а второй — действительным.

Фиксируя натуральный аргумент, получаем функцию действительного переменного, являющуюся **членом функциональной последовательности**. Если же фиксировать действительный аргумент, мы получим числовую последовательность — последовательность значений членов ФП в данной точке. Множество тех точек области, в которых такая числовая последовательность сходится, называют **областью сходимости Функциональной последовательности**.

Если множество X принадлежит области сходимости данной ФП, то также говорят, что ФП сходится на X **поточечно**. Областью сходимости X часто оказывается область определения ФП. Поточечная сходимость проста и естественна, так как опирается на свойства числовых последовательностей. Однако она не сохраняет важнейших свойств, присущих функциям: непрерывности, дифференцируемости и т.п. Например, последовательность $\{x^n\}$ непрерывных на $[0, 1]$ функций сходится поточечно к функции, равной 0 на $[0, 1)$ и 1 в точке 1. Эта функция, очевидно, не является непрерывной.

На понятие сходимости ФП можно посмотреть в более широком плане. Предположим, что все члены ФП являются элементами некоторого линейного пространства функций L (например, непрерывных, дифференцируемых и т.п.). Пусть в этом пространстве функций задано **расстояние** $\rho(f, g)$ между любыми двумя функциями. Такое расстояние должно подчиняться **аксиомам расстояния**:

- $\rho(f, g) = \rho(g, f)$;
- $\rho(f, g) \geq 0$, причем $\rho(f, g) = 0$ тогда и только тогда, когда $f = g$;
- $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$ (**неравенство треугольника**).

С таким расстоянием пространство L становится **метрическим**, и в нем можно определить сходимость обычным образом: последовательность $\{f_n\} \subset L$ сходится к некоторому пределу $f \in L$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n (n > N \implies \rho(f_n, f) < \varepsilon).$$

Такой подход к понятию сходимости ФП дает неограниченное множество конкретных вариантов. Подход может быть расширен еще больше, если вместо расстояния использовать непосредственное описание окрестностей функций (превращая тем самым пространство функций в **топологическое пространство**). Если понятие окрестности определено, то под пределом ФП надо понимать следующее: функция f есть предел последовательности $\{f_n\}$, если для любой окрестности $O(f)$ функции f существует такое натуральное N , что при $n > N$ имеем $f_n \in O(f)$. Таким способом может быть введена поточечная сходимость.

Окрестности могут определяться расстоянием (метрикой). В свою очередь метрика в линейном функциональном пространстве может задаваться **нормой**. Норма в линейном пространстве — это функция, определенная на этом пространстве и обозначаемая $\|f\|$, которая удовлетворяет **аксиомам нормы**:

- $\|f\| \geq 0$;
- $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$;
- $\|f\| = 0 \implies f = 0$;
- $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (**неравенство треугольника**).

Каждой норме $\|f\|$ соответствует расстояние $\rho(f, g) = \|f - g\|$. Приведем примеры норм:

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|;$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}.$$

Сходимость на основе первой из этих норм называют **равномерной сходимостью**, обозначение: $f_n \xrightarrow{X} f$. Сходимость на основе второй обычно называют **сходимостью в среднем квадратичном**.

Этот вариант сходимости встретится нам позже.

Альтернативные формулировки для равномерной сходимости:

- $f_n \xrightarrow{X} f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$;
- $f_n \xrightarrow{X} f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \sup_{x \in X} \{|f_n(x) - f(x)|\} < \varepsilon$.

Сравним первую из этих формулировок с определением на языке „ ε - δ “ поточечной сходимости:

$$f_n \xrightarrow{X} f \iff \forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \forall n > N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Как видим, изменился лишь порядок кванторов: квантор всеобщности, перемещенный влево (для x), усиливает высказывание, так как в первом случае (равномерная сходимость) N зависит лишь от ε , в то время как во втором — еще и от x .

Равномерная сходимость, будучи сходимостью по норме, сохраняет основные свойства предела. Перечислим их:

- 1) если $f_n \xrightarrow{X} f$, то $f_n \xrightarrow{X} f$ (см. выше);
- 2) если $f_n \xrightarrow{X} f$, $g_n \xrightarrow{X} g$, то: а) для любых действительных α и β $\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{X} \alpha f + \beta g$, б) $f_n g_n \xrightarrow{X} f g$;
- 3) если $f_n \xrightarrow{X} f$, причем для некоторого действительного числа $c > 0$ выполняется неравенство $|f(x)| \geq c$ в каждой точке $x \in X$, то $1/f_n \xrightarrow{X} 1/f$.

◀ Из условия $\inf_{x \in X} |f(x)| \geq c$ получаем, что в каждой точке $x \in X$ $|f_n(x)| \geq |f(x)| - |f_n(x) - f(x)| \geq c/2$. Поэтому

$$\left\| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} \right\| = \sup_{x \in X} \left| \frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)} \right| = \sup_{x \in X} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{|f_n(x)| |f(x)|} \leq \frac{2}{c^2} \|f_n - f\| \quad \blacktriangleright$$

4) равномерно сходящаяся последовательность равномерно ограничена, т.е. если $f_n \xrightarrow{X} f$, то существует такая постоянная $M > 0$, что $\|f_n\|_{\infty} < M$ для любого $n \in \mathbb{N}$ (другими словами $|f(x)| < M$ в каждой точке $x \in X$ и для любого n);

5) критерий Коши: последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве X , если и только если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (14.1)$$

(условие (14.1) означает, что последовательность $\{f_n\}$ **равномерно фундаментальна** на X).

Следующие свойства, отражающие связь понятия равномерной сходимости с такими свойствами, как непрерывность, являются ключевыми.

Теорема 14.1. Если $f_n \in C(X)$, $n = 1, 2, \dots$, и $f_n \xrightarrow{X} f$, то $f \in C(X)$.

◀ Выберем произвольную точку $x_0 \in X$ и докажем, что функция $f(x)$, являющаяся равномерным пределом последовательности, непрерывна в этой точке. По условию для любого наперед выбранного

числа $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при $n > N$ и $x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Выберем произвольное $n > N$ и зафиксируем. Для выбранного нами числа ε можно также указать такие окрестности $O_n(x_0)$ и $O(x_0)$ точки x_0 , что $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$ при $x \in O_n(x_0) \cap X$ и $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $x \in O(x_0) \cap X$. Если $x \in O_n(x_0) \cap O(x_0) \cap X$, то

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Так как ε выбиралось произвольно, мы тем самым доказали непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 . ►

Теорема 14.2. Если $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$, то $\int_a^x f_n(\xi) d\xi \xrightarrow{[a,b]} \int_a^x f(\xi) d\xi$.

◀ В самом деле,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x f_n(\xi) d\xi - \int_a^x f(\xi) d\xi \right| &= \left| \int_a^x (f_n(\xi) - f(\xi)) d\xi \right| \leq \\ &\leq \int_a^x |f_n(\xi) - f(\xi)| d\xi \leq \int_a^b |f_n(\xi) - f(\xi)| d\xi \leq \|f_n - f\| (b - a). \end{aligned}$$

Поэтому, обозначив первообразные функций $f_n(x)$ и $f(x)$ через $F_n(x)$ и $F(x)$ соответственно, получим $\|F_n - F\| \leq (b - a)\|f_n - f\|$. ►

Следствие 14.1. Если $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$, то $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$.

Сформулированное следствие говорит о том, что равномерно сходящиеся последовательности можно интегрировать почленно. Следующая теорема дает условия, достаточные для почленного дифференцирования функциональной последовательности.

Теорема 14.3. Пусть каждая из функций $f_n(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и выполняются условия:

- последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in (a, b)$;
- $f'_n \xrightarrow{(a,b)} \varphi$.

Тогда $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$, причем функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) = \varphi(x)$ всюду на (a, b) .

◀ Если дополнительно предположить, что все производные непрерывны, то утверждение теоремы может быть получено из теоремы 15.2, так как в этом случае можно воспользоваться формулой Ньютона–Лейбница. Положив $g_n = f'_n$, $G_n = f_n$, получим, что

$$G_n(x) = G_n(x_0) + \int_{x_0}^x g_n(\xi) d\xi.$$

Остается применить теорему 15.2 к последовательности $\{g_n\}$.

Приведенная формулировка теоремы чуть более мягкая, так как не требует непрерывности производных, а доказательство опирается на теорему Лагранжа.

Сначала докажем, что при выполнении условий теоремы последовательность $\{f_n\}$ на отрезке $[a, b]$ сходится равномерно к некоторой функции $f(x)$. Для этого воспользуемся критерием Коши. Обозначим $\psi_{nm}(x) = f_n(x) - f_m(x)$. Тогда для любого $x \in [a, b]$ имеем

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |\psi_{nm}(x)| \leq |\psi_{nm}(x) - \psi_{nm}(x_0)| + |\psi_{nm}(x_0)| = |\psi'_{nm}(\xi)| |x - x_0| + |\psi_{nm}(x_0)|$$

Последовательность $\{f'_n(x)\}$ равномерно фундаментальна. Поэтому для произвольного наперед выбранного $\varepsilon > 0$ можем выбрать число N так, что при $m, n > N$ и $a < x < b$ будет $|\psi'_{nm}(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Для того же числа ε можно выбрать N' так, что при $m, n > N'$ в точке x_0 будет $|\psi_{nm}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для любых $m, n > \max\{N, N'\}$ и произвольного $x \in X$ получим

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |\psi'_{nm}(\xi)| |x - x_0| + |\psi_{nm}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (14.2)$$

Таким образом, мы доказали равномерную фундаментальность последовательности $\{f_n\}$, из которой, согласно критерию Коши, следует ее равномерная сходимость к некоторой функции $f(x)$. Покажем, что эта функция на (a, b) дифференцируема и что ее производной является функция $\varphi(x)$, предел последовательности $\{f'_n(x)\}$.

Выберем и зафиксируем произвольную точку $\xi \in (a, b)$. Рассмотрим функциональную последовательность $\left\{ \frac{f_n(x) - f_n(\xi)}{x - \xi} \right\}$. Члены этой последовательности непрерывны всюду, кроме точки ξ . Но в этой точке существует предел $\lim_{x \rightarrow \xi} \left\{ \frac{f_n(x) - f_n(\xi)}{x - \xi} \right\} = f'_n(\xi)$. Поэтому мы можем доопределить члены последовательности в точке ξ так, что они будут непрерывны на всем интервале (a, b) .

Выкладками, аналогичными (14.2), убеждаемся, что эта последовательность сходится на $[a, b]$ равномерно:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_n(x) - f_n(\xi)}{x - \xi} - \frac{f_m(x) - f_m(\xi)}{x - \xi} \right| &= \left| \frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(\xi) - f_m(\xi))}{x - \xi} \right| = \\ &= \frac{|[f'_n(\zeta) - f'_m(\zeta)](x - \xi)|}{|x - \xi|} = |f'_n(\zeta) - f'_m(\zeta)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f'_n(x) - f'_m(x)| = \|f'_n - f'_m\|_\infty. \end{aligned}$$

Видим, что последовательность $\left\{ \frac{f_n(x) - f_n(\xi)}{x - \xi} \right\}$ равномерно фундаментальна, так как равномерно фундаментальна последовательность $\{f'_n(x)\}$. Следовательно, по критерию Коши она сходится равномерно. Но равномерный предел последовательности непрерывных функций является функцией непрерывной. Отметим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(\xi)}{x - \xi} = \begin{cases} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}, & x \neq \xi, \\ \varphi(x), & x = \xi, \end{cases}$$

Следовательно, из непрерывности равномерного предела получаем

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \varphi(\xi).$$

Полученное равенство означает, что функция $f(x)$ имеет в точке ξ производную, равную $\varphi(\xi)$. ►

Анализ функциональной последовательности на равномерную сходимость достаточно трудоемок. При некоторых дополнительных ограничениях равномерная сходимость будет вытекать из поточечной.

Теорема 14.4 (теорема Дини). Если последовательность $\{f_n(x)\}$ непрерывных функций сходится поточечно на компакте¹ X к некоторой непрерывной функции $f(x)$, причем для каждого $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ монотонна, то $\{f_n\}$ сходится на X равномерно.

14.2. Функциональные ряды

Функциональный ряд (ФР) представляет собой особую форму записи функциональной последовательности: рядом называют запись

$$f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x),$$

где $\{f_k(x)\}$ — произвольная функциональная последовательность.

Для функциональных рядов вводят понятие n -й частичной суммы:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x).$$

¹Множество K числовой прямой является компактом, если оно замкнуто и ограничено.

Суммой функционального ряда называют предел последовательности его частичных сумм. Этот предел может рассматриваться различными способами введением разных расстояний, норм и т.п. Соответственно этому варьируется и понятие сходимости функционального ряда. Отметим поточечную и равномерную сходимость.

Между функциональными последовательностями и функциональными рядами вне зависимости от способа предельного перехода сохраняется та же связь, что и между числовыми, а именно: любая функциональная последовательность может интерпретироваться как последовательность частичных сумм ряда, в то время как любой ряд ассоциируется со своей последовательностью частичных сумм. Поэтому большинство свойств функциональных последовательностей переносится на функциональные ряды:

- из равномерной сходимости ряда на данном множестве следует его поточечная сходимость на том же множестве;
- сумма равномерно сходящихся рядов, произведение равномерно сходящегося ряда на функцию равномерно сходятся;
- сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций есть функция непрерывная (на множестве равномерной сходимости);
- равномерно сходящийся ряд можно интегрировать почленно, полученный при этом ряд из интегралов с переменным верхним пределом сходится равномерно;
- функциональный ряд из дифференцируемых на данном интервале функций можно дифференцировать почленно, если он сходится хотя бы в одной точке интервала, а ряд из производных сходится на интервале равномерно;
- если ряд $\sum f_n$ из непрерывных и неотрицательных на компакте X функций f_n сходится к непрерывной на X функции f поточечно, то он сходится на X и равномерно (теорема Дини).

Тем не менее, как и для числовых рядов, исследование функциональных рядов может быть более простым по сравнению с последовательностями. Отметим основные факты, которыми ряды отличаются от последовательностей.

14.3. Признаки равномерно сходящихся рядов

Теорема 14.5. Пусть ФР $\sum f_k(x)$ сходится на множестве X поточечно. Тогда этот ряд сходится на X равномерно $\iff r_n(x) \xrightarrow{X} 0$ при $n \rightarrow \infty$, где

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).$$

◀ Утверждение немедленно вытекает из соотношения $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$, в котором $S(x)$ — сумма ряда в точке x , $S_n(x)$ — n -я частичная сумма ряда в точке x и которое верно для любого натурального n . ▶

Теорема 14.6 (необходимый признак сходимости). Если ряд $\sum f_k(x)$ сходится равномерно на множестве X , то $f_k(x) \xrightarrow{X} 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство то же, что и в случае числовых рядов.

Теорема 14.7 (признак Вейерштрасса). Теорема 15.7 Если $|f_n(x)| \leq a_n$ при $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$, ряд $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum f_n(x)$ сходится на X равномерно.

◀ В каждой точке $x \in X$ числовой ряд $\sum f_n(x)$ сходится абсолютно в силу 1-го признака сравнения. Значит, $\sum f_n$ сходится на X поточечно. Для доказательства равномерной сходимости воспользуемся теоремой 15.4. В каждой точке $x \in X$ имеем оценку

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \alpha_n,$$

откуда $\|r_n\|_{\infty} \leq \alpha_n$. В силу сходимости ряда $\sum a_n$ последовательность α_n его остатков сходится к 0. А это означает, что $\|r_n\|_{\infty} \xrightarrow{X} 0$ при $n \rightarrow \infty$. ▶

Замечание 14.1. Ряд $\sum a_n$, на основании которого делают вывод о равномерной сходимости ФР, называют **мажорантой**. Минимальной мажорантой для данного ФР на множестве X является ряд $\sum \|f_n\|_\infty$. Так что признак Вейерштрасса можно было бы сформулировать так: ряд $\sum f_n$ сходится равномерно, если ряд $\sum \|f_n\|_\infty$ сходится. В такой интерпретации признак Вейерштрасса представляет собой обобщение признака абсолютной сходимости.

Замечание 14.2. Признак Вейерштрасса не является необходимым. Именно, можно построить сходящийся равномерно ряд $\sum f_n$, для которого $\sum \|f_n\|_\infty$ расходится. Далеко ходить не надо, так как для частного случая функционального ряда — числового — признак Вейерштрасса превращается в признак абсолютной сходимости!

Но даже если потребовать, чтобы $f_n(x) \geq 0$, $x \in X$, $n = 1, 2, \dots$, избавляясь от эффекта абсолютной сходимости, признак Вейерштрасса не станет необходимым. Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 4(n+1)((n+1)x-1)(1-nx), & x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right), \\ 0, & x \notin \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

Ряд $\sum f_n$ сходится поточечно на $[0, 1]$, так как в каждой точке отрезка только один из членов ряда отличен от 0. При этом

$$\|r_n\|_\infty = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \right\|_\infty = \max_{k \geq n+1} \left\{ \frac{4(k+1)}{4k(k+1)} \right\} = \frac{1}{n+1},$$

т.е. сходимость равномерная. Однако $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, так что $\sum \|f_n\|_\infty = \infty$.

Теорема 14.8 (признак Дирихле). Теорема 15.8 Пусть:

- последовательность частичных сумм ряда $\sum \alpha_n(x)$ равномерно ограничена на множестве X ;
- последовательность $\{\beta_n(x)\}$ монотонна для любого

Тогда функциональный ряд $\sum \alpha_n(x)\beta_n(x)$ сходится на X равномерно.

◀ Вспоминаем преобразование Абеля:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k(x)\beta_k(x) = A_{n+p}(x)\beta_{n+p}(x) - A_n(x)\beta_{n+1}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x)),$$

где $A_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(x)$. Учитывая, что частичные суммы $A_n(x)$ для ряда $\sum \alpha_n(x)$ равномерно ограничены, т.е. существует такая константа M , что $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in X |A_n(x)| \leq M$, заключаем, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k(x)\beta_k(x) \right| &\leq M|b_{n+p}(x)| + M|b_{n+1}(x)| + M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |b_k(x) - b_{k+1}(x)| = \\ &= Mb_{n+p}(x) + Mb_{n+1}(x) + M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} [b_k(x) - b_{k+1}(x)] = \\ &= Mb_{n+p}(x) + Mb_{n+1}(x) + M[b_{n+1}(x) - b_{n+p}(x)] = 2Mb_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Следовательно, $\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k\beta_k \right\|_\infty \leq \|b_{n+1}\|_\infty$. Применение критерия Коши завершает доказательство. ▶

Теорема 14.9 (признак Абеля). Теорема 15.9 Пусть:

- ряд $\sum \alpha_n(x)$ равномерно сходится на множестве X ;
- последовательность $\{\beta_n(x)\}$ монотонна для любого $x \in X$ и на X равномерно ограничена.

Тогда функциональный ряд $\sum \alpha_n(x)\beta_n(x)$ сходится на X равномерно.

Доказательство аналогично предыдущей теореме, но использует несколько модифицированное преобразование Абеля. Как видно уже из доказательства предыдущей теоремы, практически воспроизводится обоснование аналогичного признака для числовых рядов. Детали предлагается восстановить самостоятельно.

Лекция 15

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Первая теорема Абеля. Интервал сходимости. Формула Коши — Адамара. Теорема о равномерной сходимости. Основные свойства (непрерывность, почленное дифференцирование и интегрирование). Вторая теорема Абеля.

15.1. Интервал сходимости

Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

называют **степенным**. Параметр x_0 — это *центр степенного ряда*, а члены последовательности $\{a_n\}$ — коэффициенты степенного ряда.

Область сходимости степенного ряда всегда непуста: ряд заведомо сходится в своем центре, точке x_0 . Отметим, что область сходимости D_0 степенного ряда $\sum a_n x^n$ получается из области сходимости D ряда $\sum a_n (x - x_0)^n$ сдвигом на величину x_0 влево (если первый сходится в точке y , то второй сходится в точке $x = y + x_0$, значит между точками двух областей устанавливается взаимно однозначное соответствие $y = x - x_0$). Это соображение позволяет остановиться на частном случае степенного ряда, имеющего центр в точке 0, и тем самым несколько упростить изложение материала.

Степенной ряд по своему характеру близок к геометрической прогрессии. Поэтому для него эффективно применение признаков Коши (радикального) и Даламбера.

Пример 15.1. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Положив $a_n = x^n/n$, вычисляем варианту Даламбера q :

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = |x|.$$

При $|x| < 1$ ряд сходится абсолютно, при $|x| > 1$ ряд расходится (если варианта Даламбера превосходит 1, то нарушается необходимый признак). Наконец, при $|x| = 1$, т.е. в точках -1 и 1 , признак Даламбера ничего сказать не может, и мы должны исследовать ряд дополнительно. В этих точках степенной ряд дает соответственно ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Первый из них (точка $x = -1$) сходится согласно признаку Лейбница, второй расходится, так как является гармоническим рядом. Итак, областью сходимости указанного ряда является полуинтервал $[-1, 1)$.

В общем случае областью сходимости степенного ряда является интервал, полуинтервал или отрезок. Все варианты описываются термином „связное множество“. При этом граничные точки могут входить в область сходимости, а могут и не входить. Частным случаем интервала является вся числовая ось, а частным случаем отрезка — единственная точка, центр степенного ряда.

Теорема 15.1 (первая теорема Абеля). Если ряд $\sum a_n x^n$ сходится в точке x_0 , то он сходится абсолютно в любой точке x , для которой $|x| < |x_0|$.

◀ Так как ряд $\sum a_n x_0^n$ сходится, последовательность $\{a_n x_0^n\}$ является бесконечно малой и потому ограничена. Это значит, что существует такое положительное число M , что $|a_n x_0^n| \leq M$. Но тогда

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|,$$

т.е. ряд $\sum a_n x^n$ при $|x| < |x_0|$ мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем $q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$, а потому сходится согласно 1-му признаку сравнения. ▶

Следствие 15.1. Любой степенной ряд имеет такой интервал $(-R, R)$, внутри которого ряд сходится абсолютно, а вне — расходится. При этом на концах интервала ряд может как сходиться, так и расходиться.

◀ Рассмотрим область D сходимости ряда и пусть $R = \sup\{|z| : z \in D\}$. Тогда согласно определению числа R ряд при $|x| > R$ расходится. Пусть $|x| < R$. Существует такое значение x_0 , что ряд сходится в точке x_0 и при этом $|x| < |x_0| < R$. Из первой теоремы Абеля заключаем, что в точке $|x|$ ряд сходится абсолютно. ▶

Число R называют **радиусом сходимости** степенного ряда, интервал $(-R, R)$ — **интервалом сходимости** этого ряда. Область сходимости степенного ряда представляет собой его интервал сходимости с добавлением, возможно, граничных точек интервала.

Применим к ряду $\sum a_n x^n$ признак Коши (радикальный):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x|q$$

Если предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$ существует, то согласно признаку ряд сходится абсолютно при $|x| < 1/q$ и расходится при $|x| > 1/q$. Значит, число $R = 1/q$ представляет собой радиус сходимости ряда. Итак,

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (15.1)$$

Соотношение (15.1) известно как **формула Коши — Адамара**.

Предел в (15.1) может не существовать, тогда можно использовать более общую формулу

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (15.2)$$

Если использовать не признак Коши, а признак Даламбера, то получим еще одну формулу для радиуса сходимости:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

в которой также можно заменить обычный предел на верхний (если обычный не существует).

Применение формулы Коши — Адамара может приводить к ошибкам. Поэтому более предпочтительным является исследование степенного ряда непосредственно при помощи признака Коши или Даламбера.

Пример 15.2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k},$$

содержащий только четные степени. „Лобовое“ применение формулы Коши — Адамара к последовательности $\{a_k\}$ приводит к пределу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n},$$

в то время как правильно применять эту формулу к последовательности

$$b_n = \begin{cases} a_k, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

Это равносильно вычислению предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}}$$

(предел по нечетным членам последовательности равен 0). В результате предел $\lim \sqrt[n]{a_n}$ дает неверный результат, если он отличен от 1. #

Радиус сходимости может быть нулевым. В этом случае область сходимости состоит из одного центра ряда. Радиус может быть и бесконечным, тогда область сходимости есть вся числовая ось.

Пример 15.3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ расходится всюду, кроме точки 0, так как

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$, наоборот, сходится всюду на числовой оси, так как

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Теорема 15.2 (о равномерной сходимости). Пусть $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n x^n$. Тогда на любом отрезке $[-r, r]$, $r < R$, ряд $\sum a_n x^n$ сходится равномерно.

◀ В точке r интервала сходимости ряд $\sum a_n x^n$ сходится абсолютно, т.е. сходится ряд $\sum |a_n| r^n$. А так как $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$ при $x \in [-r, r]$, то по признаку Вейерштрасса ряд на отрезке $[-r, r]$ сходится равномерно. ▶

Теорема 15.3 (вторая теорема Абеля). Теорема 16.3 Пусть ряд $\sum a_n x^n$ имеет радиус сходимости $R > 0$. Если этот ряд сходится в точке R (точке $-R$), то он сходится равномерно на любом отрезке $[-r, R]$ (отрезке $[-R, r]$), $0 \leq r < R$.

◀ Доказательство этого утверждения опирается на признак Абеля. Мы можем считать, что $r = 0$. В самом деле, например, для случая сходимости в точке R отрезок $[r, R]$ содержится в $[0, R]$ при $r \geq 0$ и является объединением двух отрезков $[r, 0]$ и $[0, R]$ при $r < 0$. Но если ряд на каждом из двух множеств сходится равномерно, то он будет сходиться равномерно и на объединении этих множеств.

Положив $\alpha_n(x) = a_n R^n$, $\beta_n(x) = \left(\frac{x}{R}\right)^n$, $n = 1, 2, \dots$, получим, что ряд $\sum \alpha_n(x)$ сходится равномерно на $[0, R]$ (это просто числовой ряд), последовательность $\{\beta_n(x)\}$ для каждого значения $x \in [0, R]$ является монотонной и равномерно ограниченной на $[0, R]$ (числом 1). По признаку Абеля ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) \beta_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится на $[0, R]$ равномерно. ▶

15.2. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов

Из изложенного ясно, что степенной ряд можно почленно интегрировать. Именно, если дан степенной ряд $\sum a_n x^n$ с радиусом сходимости $R > 0$, то степенной ряд

$$\sum a_n \left(\int_0^x x^n dx \right) = \sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

сходится равномерно на любом отрезке $[-r, r]$, $0 < r < R$, причем

$$\sum a_n \left(\int_0^x x^n dx \right) = \int_0^x \left(\sum a_n x^n \right) dx.$$

Поскольку полученный в процессе почленного интегрирования ряд тоже является степенным, он по теореме 16.1 сходится на интервале $(-R, R)$ абсолютно.

Остается неясным вопрос, может ли при интегрировании степенного ряда увеличиться радиус сходимости (из изложенного выше вытекает, что он не уменьшается)?

Теорема 15.4. Степенной ряд можно интегрировать почленно. При этом радиус сходимости проинтегрированного степенного ряда не изменяется.

◀ Нам осталось показать, что радиус сходимости степенного ряда при интегрировании не увеличивается. Пусть ряд $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, полученный интегрированием ряда $\sum a_n x^n$, сходится в точке x_0 . Тогда

$$|a_n x^n| = \left| a_n \frac{x_0^{n+1}}{n+1} \right| \frac{n+1}{|x_0|} \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \leq M \frac{n+1}{|x_0|} q^n,$$

где $M = \sup \left| a_n \frac{x_0^{n+1}}{n+1} \right|$, $q = \frac{x}{x_0}$. Нетрудно убедиться, что ряд $\sum M \frac{n+1}{x_0} q^n$ сходится абсолютно при $|q| < 1$. Согласно признаку сравнения заключаем, что ряд $\sum a_n x^n$ сходится при $|x| < |x_0|$, а это значит, что радиус сходимости исходного ряда не меньше, чем радиус сходимости проинтегрированного. ▶

Теорема 15.5. Если R — радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n x^n$, то ряд $\sum n a_n x^{n-1}$, полученный почленным дифференцированием исходного, имеет тот же радиус сходимости R и, кроме того,

$$\left(\sum a_n x^n \right)' = \sum a_n (x^n)'. \quad (15.3)$$

◀ Это утверждение следует из предыдущей теоремы. Действительно, ряд $\sum a_n x^n$ может быть получен из ряда $\sum n a_n x^{n-1}$ почленным интегрированием. Значит радиусы сходимости этих двух рядов совпадают. При этом

$$\sum a_n x^n = \sum \left(\int_0^x n a_n \xi^{n-1} \right) = \int_0^x \left(\sum n a_n \xi^{n-1} \right).$$

Остается продифференцировать записанное равенство, и мы получим равенство (15.3). ▶

Следствие 15.2. Сумма степенного ряда является функцией, бесконечно дифференцируемой в интервале сходимости: $\sum a_n x^n \in C^\infty(-R, R)$.

15.3. Ряд Тейлора

Теорема 15.6. Если функция $f(x)$ есть сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, сходящегося на интервале $|x - x_0| < R$, то $f \in C^\infty(x_0 - R, x_0 + R)$ и

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \quad (15.4)$$

◀ Бесконечная дифференцируемость функции f констатируется следствием из предыдущей теоремы. Кроме того, из этой теоремы следует, что степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз в его интервале сходимости. Поэтому

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n (x - x_0)^n)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1) (x - x_0)^{n-k} = \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1) (x - x_0)^{n-k} = |n-k=m| = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k} (m+k)(m+k-1) \cdots (m+1) (x - x_0)^m \end{aligned}$$

Полагая $x = x_0$, получим $f^{(k)}(x_0) = a_k k(k-1) \cdots 1$, что равносильно (15.4). ▶

Следствие 15.3. Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ в некоторой окрестности точки x_0 , то $a_n = b_n$, $n = 1, 2, \dots$

◀ И коэффициенты a_n , и коэффициенты b_n определяются по формуле (15.4) одной и той же функцией, которая в окрестности точки x_0 равна сумме каждого из рядов. ▶

Определение 15.1. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

называют **рядом Тейлора** бесконечно дифференцируемой в окрестности точки x_0 функции $f(x)$.

Очевидно, что бесконечная дифференцируемость функции является необходимым условием для разложения ее в ряд Тейлора. Если функция бесконечно дифференцируема, то ряд Тейлора для нее можно выписать, однако он может не сходиться к этой функции. Таким образом, условие бесконечной дифференцируемости функции не является достаточным для представления ее степенным рядом.

Пример 15.4. Функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема всюду на действительной оси, ее производные $f^{(n)}(0)$ в точке 0 все равны нулю. Следовательно, ее ряд Тейлора является тривиальным: все коэффициенты степенного ряда являются нулевыми. Сумма такого ряда есть тождественный нуль, что совпадает со значением функции только в точке 0. #

Чтобы убедиться в сходимости ряда Тейлора к самой функции $f(x)$ нужно оценить по абсолютной величине разность $r_n(x) = f(x) - S_n(x; f)$ между функцией и n -й частичной суммой ряда, взятой в произвольной точке x . Эта разность фигурирует в формуле Тейлора как остаток, который может быть записан в различной форме. Наиболее известна запись остатка в форме Лагранжа.

Отметим, что остаток в формуле Тейлора — это не есть остаток ряда Тейлора. Их совпадение, собственно, и означает, что функция равна сумме своего ряда Тейлора. Необходимым и достаточным условием такого совпадения является условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - S_n(x; f)) = 0, \quad (15.5)$$

которое должно выполняться в каждой точке x некоторой окрестности точки x_0 — центра ряда Тейлора.

Отметим важный частный случай, когда выполняется сформулированный критерий (15.5).

Теорема 15.7. Пусть $f \in C^\infty(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Если существует такая константа $M > 0$, что $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) |f^{(n)}(x)| \leq M$, то функция $f(x)$ в интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ равна сумме своего ряда Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

◀ Запишем остаток $r_n(x; f)$ формулы Тейлора в форме Лагранжа и оценим его абсолютную величину:

$$|r_n(x; f)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta \Delta x)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M \delta^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

где $0 \leq \vartheta \leq 1$, $\Delta x = x - x_0$ и $|\Delta x| \leq \delta$. Так как остаток стремится к 0 в каждой точке интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, функция совпадает на этом интервале с суммой своего ряда Тейлора. ▶

15.4. Стандартные разложения в ряд Тейлора

Исходя из формулы Тейлора для основных элементарных функций, можно получить разложение этих функций в ряд Тейлора.

Показательная функция e^x . Так как для этой функции $f^{(n)}(x) = e^x$, заключаем, что в каждом интервале $(-R, R)$ выполняется неравенство $|f^{(n)}(x)| \leq M$, где в качестве M можно взять $M = e^R$. Согласно теореме 16.7 получаем представление

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

верное в каждом интервале $(-R, R)$, а потому и на всей числовой оси.

Тригонометрические функции. Для тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ рассуждения те же, что и для показательной функции. Нужно воспользоваться формулами

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

из которых следует, что все производные функций $\sin x$ и $\cos x$ ограничены на всей числовой оси константой $M = 1$. Применение соответствующих формул Тейлора и теоремы 16.7 дает

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Степенная функция $(1+x)^p$, $p \in \mathbb{R}$. Разложение этой функции в степенной ряд с центром в 0 возможно в только пределах интервала $(-1, 1)$, так как при действительных отрицательных p функция не определена в точке -1 . Вычислим n -ю производную функции

$$[(1+x)^p]^{(n)} = p(p-1) \cdots (p-n+1)(1+x)^{p-n}.$$

Поэтому ряд Тейлора для этой функции имеет вид

$$(1+x)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1) \cdots (p-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

Чтобы доказать, что степенная функция действительно равна сумме своего ряда Тейлора в интервале $(-1, 1)$, нужно использовать запись остатка не в форме Лагранжа, а в форме Коши

$$r_n(x; f) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta \Delta x)(1-\vartheta)^n}{n!} (x-x_0)^{n+1}.$$

В нашем случае

$$r_n(x; f) = p(p-1) \cdots (p-n) \frac{(1+\vartheta x)^{p-n}(1-\vartheta)^n}{n!} x^{n+1} = p(p-1) \cdots (p-n)(1+\vartheta x)^p \frac{(1-\vartheta)^n}{(1+\vartheta x)^n} \frac{x^{n+1}}{n!}.$$

При $|x| < \delta < 1$ имеем

$$|r_n(x; f)| \leq |1+\vartheta x|^p \left| \frac{1-\vartheta}{1-\vartheta\delta} \right|^n \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n!(1-\delta)^{\min\{0,p\}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Если p является натуральным, то разложение функции $(1+x)^p$ в ряд Тейлора приводит к биному Ньютона. Важен также частный случай $p = -1$, в котором мы приходим к формуле суммы геометрической прогрессии со знаменателем $-x$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1). \quad (15.6)$$

Отметим также случай $p = -2$, в котором разложение имеет вид

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

Логарифмическая функция $\ln(1+x)$. Так как указанная функция не определена в точке -1 , то разложение этой функции в степенной ряд с центром в 0 возможно только в пределах интервала $(-1, 1)$. Конкретный вид разложения можно получить интегрированием формулы (15.6)

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

Лекция 16

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Ортогональные системы в функциональных пространствах. Задача о наилучшем приближении. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Полные и замкнутые ортогональные системы. Тригонометрическая система функций.

16.1. Определение

Мы приступаем к изучению *тригонометрических рядов*, которые записываются в виде

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (16.1)$$

Исследование таких рядов может идти с различных точек зрения. Наиболее общий подход состоит в том, чтобы интерпретировать ряд (16.1) как ряд вида $\sum \alpha_n f_n(x)$, построенный по некоторой последовательности функций $\{f_n\}$ и последовательности коэффициентов $\{\alpha_n\}$. Такой ряд является обобщением понятия *линейной комбинации* в линейной алгебре. Мы ограничимся некоторым линейным пространством функций (называемым также *функциональным пространством*). Рассмотрение разложений функций по базису наиболее просто, когда линейное пространство евклидово, а базис — ортонормированный.

Рассмотрим линейное пространство $R[a, b]$ функций, определенных и интегрируемых на отрезке $[a, b]$. В этом пространстве определим *скалярное произведение* по формуле

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что в этом случае выполняются все *аксиомы скалярного произведения*, кроме последней. Последняя аксиома, утверждающая, что если $\|f\| = 0$, то $f = 0$, конечно, неверна. Из положения выходят, считая, что равны любые функции f и g , для которых

$$\|f - g\|^2 = \int_a^b |f - g|^2 dx = 0.$$

Введенное нами евклидово пространство $R[a, b]$ является бесконечномерным, так как ему принадлежат все функции x^n , любой конечный набор которых образует линейно независимую систему функций. Возьмем функции $1, x, \dots, x^n$. Тогда их линейной комбинацией $\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ является многочлен, который обращается в 0, только если всего его коэффициенты равны 0.

Функциональную последовательность $\{f_n\}$, $f_n \in R[a, b]$, $n = 1, 2, \dots$, называют *ортогональной системой*, если все функции этой последовательности попарно ортогональны, т.е. $\langle f_n, f_m \rangle = 0$ для любой пары натуральных чисел n и m , $n \neq m$. Если к тому же $\|f_n\|^2 = \langle f_n, f_n \rangle = 1$ для каждой функции f_n , то такую последовательность называют *ортонормированной системой*.

Пример 16.1. Последовательность $1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots$ является ортогональной в пространстве $R[-l, l]$. Чтобы убедиться в этом, нужно вычислить попарные скалярные произведения: $\langle \cos \frac{n\pi x}{l}, \cos \frac{m\pi x}{l} \rangle$, $n \neq m$; $\langle \sin \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{m\pi x}{l} \rangle$, $n \neq m$; $\langle \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{m\pi x}{l} \rangle$; $\langle 1, \cos \frac{m\pi x}{l} \rangle$; $\langle 1, \sin \frac{m\pi x}{l} \rangle$. Например,

$$\begin{aligned} \langle \cos \frac{n\pi x}{l}, \cos \frac{m\pi x}{l} \rangle &= \int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[\cos \left(\frac{(n+m)\pi x}{l} \right) + \cos \left(\frac{(n-m)\pi x}{l} \right) \right] dx = \\ &= \frac{l}{n+m} \sin \left(\frac{(n+m)\pi x}{l} \right) \Big|_{-l}^l + \frac{l}{n-m} \sin \left(\frac{(n-m)\pi x}{l} \right) \Big|_{-l}^l = 0. \end{aligned}$$

Эта последовательность не является ортонормированной, так как квадрат нормы функции 1 равен $2l$, а квадраты норм для остальных функций все равны l . Ортонормированной будет следующая последовательность функций:

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \quad \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi x}{l}, \quad \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{2\pi x}{l}, \quad \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad \dots$$

Пример 16.2. Последовательность **многочленов Лежандра**

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

является ортогональной системой в пространстве $R[-1, 1]$. Действительно,

$$\begin{aligned} 2^{n+m} n! m! \langle P_n, P_m \rangle &= \int_{-1}^1 [(t^2 - 1)^n]^{(n)} [(t^2 - 1)^m]^{(m)} dt = \\ &= [(t^2 - 1)^n]^{(n-1)} [(t^2 - 1)^m]^{(m)} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 [(t^2 - 1)^n]^{(n-1)} [(t^2 - 1)^m]^{(m+1)} dt = \\ &= - \int_{-1}^1 [(t^2 - 1)^n]^{(n-1)} [(t^2 - 1)^m]^{(m+1)} dt, \end{aligned}$$

так как многочлен $(t^2 - 1)^n$ имеет корни -1 и 1 кратности n , и его производные до порядка $n - 1$ включительно в этих точках обращаются в 0.

Предполагая, что $n > m$, повторяем интегрирование по частям n раз и в конечном счете приходим к равенству

$$\langle P_n, P_m \rangle = \frac{(-1)^n}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n [(t^2 - 1)^m]^{(m+n)} dt.$$

Но $(m+n)$ -я производная многочлена $(t^2 - 1)^m$ степени $2m$ равна 0, так что под знаком интеграла стоит функция, которая тождественно равна нулю. Значит, $\langle P_n, P_m \rangle = 0$.

Если $n = m$, мы получаем

$$\|P_n\|^2 = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} \int_{-1}^1 (t^2 - 1) [(t^2 - 1)^n]^{(2n)} dt = (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt.$$

Полученный интеграл интегрируем по частям и приходим к рекуррентному соотношению:

$$T_n = \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt = t(t^2 - 1)^n \Big|_{-1}^1 - 2n \int_{-1}^1 t^2 (t^2 - 1)^{n-1} dt = -2n(T_n + T_{n-1}),$$

откуда

$$T_n = -\frac{2n}{2n+1} T_{n-1}.$$

Непосредственно убеждаемся, что $T_1 = -4/3$, а по рекуррентной формуле получаем значение интеграла:

$$T_n = 2(-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2(-1)^n (2^n n!)^2}{(2n+1) (2n)!}$$

Следовательно, многочлен P_n имеет квадрат нормы, равный $\frac{2}{2n+1}$. Система многочленов не является ортонормированной.

Замечание. Последовательность многочленов $\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t)$ можно построить, если последовательность простейших мономов $\{t^n\}$, $n = 0, 1, \dots$, подвергнуть процессу ортогонализации Грама — Шмидта.

16.2. Задача о наилучшем приближении

Пусть в пространстве $R[a, b]$ задана ортогональная система из n функций $f_1, \dots, f_n$ (n фиксировано). Поставим следующую задачу: для произвольной функции $f \in R[a, b]$ найти такие коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, чтобы величина

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \right\| \quad (16.2)$$

имела наименьшее значение. Другими словами, требуется найти такую линейную комбинацию функций $f_1, \dots, f_n$, которая наиболее близка к функции f . Такую задачу называют **задачей о наилучшем приближении**.

Рассмотрим квадрат величины (16.2). Его можно записать через скалярное произведение и преобразовать:

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \right\|^2 &= \left\langle f - \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i, f - \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j \right\rangle = \\ &= \langle f, f \rangle - \left\langle f, \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i, f \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j \right\rangle = \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle f, f_i \rangle + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \langle f_i, f_j \rangle = \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle f, f_i \rangle + \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \|f_i\|^2. \quad (16.3) \end{aligned}$$

Мы получили, что квадрат нормы относительно неизвестных коэффициентов α_i представляет собой многочлен 2-й степени от n переменных. Этот многочлен имеет точку минимума, которую можно найти обычным порядком, используя *необходимое условие локального экстремума*. Приравняв все частные производные нулю, получим систему уравнений:

$$2\alpha_i \|f_i\|^2 - 2\langle f, f_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

откуда

$$\alpha_i = \frac{\langle f, f_i \rangle}{\|f_i\|^2} \quad (16.4)$$

Если система $f_1, \dots, f_n$ ортонормирована, формулы (16.4) упрощаются:

$$\alpha_i = \langle f, f_i \rangle.$$

Пусть задана бесконечная ортогональная система $\{f_n\}$. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k, \quad (16.5)$$

коэффициенты α_k которого вычисляются по формулам (16.4), обладает тем свойством, что его частичные суммы $S_n(f)$ являются наилучшими приближениями функции f . Отсюда, в частности, следует, что последовательность норм $\|f - S_n(f)\|$ монотонно убывает. Действительно, частичную сумму $S_n(f)$ можно рассматривать как линейную комбинацию функций $f_1, \dots, f_{n+1}$ с коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0$ (α_i вычисляются по формулам (16.4)), которая дает худшее приближение, чем линейная комбинация с коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$, т.е. частичная сумма $S_{n+1}(f)$.

Ряд (16.5) называют **рядом Фурье** функции f по ортогональной системе $\{f_k\}$, а формулы (16.4), по которым вычисляются коэффициенты ряда Фурье, называют **формулами Эйлера — Фурье**.

16.3. Свойства ряда Фурье

Теорема 16.1. Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i$ по ортогональной системе $\{f_i\}$ сходится по норме к функции f , то коэффициенты α_i этого ряда вычисляются по формулам (16.4).

◀ Пусть S_n — последовательность частичных сумм рассматриваемого ряда. При помощи неравенства Коши — Буняковского получаем оценку

$$|\langle f - S_n, f_i \rangle| \leq \|f - S_n\| \|f_i\| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Однако при $n > i$

$$\langle f - S_n, f_i \rangle = \langle f, f_i \rangle - \langle S_n, f_i \rangle = \langle f, f_i \rangle - \alpha_i \|f_i\|^2,$$

так что рассматриваемая последовательность $|\langle f - S_n, f_i \rangle|$, начиная с $n = i + 1$, является постоянной. Поэтому на самом деле при $n > i$ выполняется равенство $\langle f - S_n, f_i \rangle = 0$, так как предел последовательности равен 0. Следовательно,

$$\langle f, f_i \rangle - \alpha_i \|f_i\|^2 = 0$$

и коэффициент α_i равен коэффициенту Эйлера — Фурье функции f . ▶

Теорема 16.2 (неравенство Бесселя). Теорема 17.2 Если $\{\alpha_n\}$ — последовательность коэффициентов Фурье для функции $f \in R[a, b]$ по ортонормированной системе $\{f_n\}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \leq \|f\|^2$$

◀ Поскольку речь идет о знакоположительном ряде, нам достаточно доказать, что все частичные суммы $S_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$ ограничены числом $\|f\|^2$. Тогда монотонная последовательность частичных сумм будет иметь предел, равный сумме ряда, который не превосходит $\|f\|^2$.

Рассмотрим норму разности между функцией и n -й частичной суммой ее ряда Фурье. Согласно (16.3) и формулам (16.4) получаем

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \right\|^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle f, f_i \rangle + \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \|f_i\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \geq 0,$$

что равносильно утверждению теоремы. ▶

Замечание 16.1. Неравенство Бесселя легко переносится на произвольные ортогональные системы. В этом случае это неравенство имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \|f_n\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Замечание 16.2. Отметим важное соотношение, которое мы получили при доказательстве теоремы. Если α_i — коэффициенты Фурье функции f по ортонормированной системе $\{f_i\}$, то

$$\|f\|^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \right\|^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16.6)$$

Теорема 16.3 (равенство Парсеваля). Теорема 17.3 Пусть $\{\alpha_n\}$ — последовательность коэффициентов Фурье для функции $f \in R[a, b]$ по ортонормированной системе $\{f_n\}$. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i$ сходится к функции f тогда и только тогда, когда верно следующее **равенство Парсеваля**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \|f\|^2 \quad (16.7)$$

◀ Воспользуемся соотношением (16.6). Сходимость последовательности $S_n(f)$ ряда Фурье функции f к самой функции означает, что $\|f - S_n(f)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Согласно (16.6), это равносильно соотношению $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \rightarrow \|f\|^2$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. равенству (16.7). ▶

16.4. Условия сходимости ряда Фурье к функции

Нельзя надеяться на то, что ряд Фурье данной функции f по произвольной ортогональной системе будет сходиться по норме к самой функции. Действительно, убрав из ортогональной системы одну функцию, мы, вообще говоря, получим другой ряд, так как из него уйдет одно слагаемое, и этот ряд не может иметь ту же сумму, что и исходный.

Это умозаключение наталкивает на мысль, что стоит рассматривать только такие ортогональные системы, которые нельзя расширить добавлением к ним новых функций. Такие ортогональные системы называют **полными**. Именно, ортогональная система $\{f_n\}$ полна, если условие $\langle f, f_n \rangle = 0$, $n = 1, 2, \dots$, выполняется только при $f \equiv 0$.

Теорема 16.4. Если каждая функция $f \in R[a, b]$ является суммой своего ряда Фурье по данной ортогональной системе $\{f_n\}$, то эта система полна.

◀ Действительно, если для некоторой функции f верны соотношения $\langle f, f_n \rangle = 0$, $n = 1, 2, \dots$, то рядом Фурье функции f будет тривиальный ряд, у которого все коэффициенты равны 0. Сумма такого ряда, очевидно, равна 0, т.е. функция, равная сумме своего ряда Фурье, есть тождественный 0. ▶

Итак, полнота ортогональной системы является необходимым условием для представления всякой функции рядом Фурье. Чтобы получить достаточное условие, введем еще одно понятие. Ортогональную систему $\{f_n\}$ называют **замкнутой**, если всевозможные конечные линейные комбинации функций системы плотны в $R[a, b]$, т.е. множество всех функций, которые можно представить в виде $\sum_{i=1}^m c_i f_i$ с некоторым набором коэффициентов c_i , имеет замыкание в пространстве $R[a, b]$, совпадающее со всем пространством¹.

Теорема 16.5. Для любой ортогональной системы $\{f_n\}$ следующие условия эквивалентны:

- система $\{f_n\}$ замкнута;
- любая функция есть сумма своего ряда Фурье;
- для любой функции f верно равенство Парсеваля.

◀ Эквивалентность второго и третьего условий доказана ранее. Докажем эквивалентность этих условий первому.

Если система $\{f_n\}$ замкнута, то для произвольной функции f в любой ее окрестности $U_\varepsilon(f) = \{h \in R[a, b]: \|h - f\| < \varepsilon\}$ имеется хотя бы одна линейная комбинация $h = \sum_{i=1}^m c_i f_i$ функций системы. Но вспомним, что m -я частичная сумма $S_m(f)$ ряда Фурье функции f обеспечивает наименьшее отклонение от f , т.е. $\|f - S_m(f)\| \leq \|f - h\| < \varepsilon$. Так как последовательность $\{\|f - S_n(f)\|\}$ является монотонной, то, начиная с номера m , имеем $S_m(f) \in U_\varepsilon(f)$. Так как ε можно выбрать произвольным образом, последовательность $S_n(f)$ сходится к функции f , т.е. эта функция равна сумме своего ряда Фурье.

Если любая функция f есть сумма своего ряда Фурье, то каждая такая функция является пределом последовательности частичных сумм ряда, которые представляют собой линейные комбинации функций ортогональной системы. Значит, в любой окрестности любой функции f содержатся линейные комбинации функций системы. Поэтому система функций $\{f_n\}$ замкнута. ▶

Условие замкнутости для конкретной системы проверить сложно, введенное понятие, скорее, дает ориентир, как исследовать данную систему функций. Зачастую такое исследование требует привлечения некоторых тонких и неочевидных фактов из теории функций. Условие полноты системы функций проще, но оно является лишь необходимым.

Все рассказанное об ортогональных системах касалось конкретного функционального пространства $R[a, b]$, но на самом деле верно для произвольных бесконечномерных евклидовых пространств.

¹Напомним, что замыкание множества получается присоединением к этому множеству всех его предельных точек.

Отметим, что замкнутая ортогональная система всегда полна, так как полнота вытекает из условия представимости любой функции рядом Фурье, равносильного замкнутости системы. В определенных евклидовых пространствах понятия замкнутости и полноты совпадают, т.е. полнота ортогональной системы в таком пространстве означает и ее замкнутость.

Пусть $f \in R[a, b]$ и $\sum \alpha_i f_i$ — ее ряд Фурье. Тогда последовательность $S_n(f)$ частичных сумм этого ряда по норме евклидова пространства является **фундаментальной**, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \|S_n(f) - S_m(f)\| < \varepsilon$. Действительно,

$$\|S_n(f) - S_m(f)\|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^m \alpha_i f_i \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^m \alpha_i^2,$$

и фундаментальность $\{S_n(f)\}$ по норме следует из сходимости ряда $\sum \alpha_i^2$.

Сходящаяся последовательность всегда фундаментальна. Критерий Коши утверждает, что фундаментальная числовая последовательность сходится. Это утверждение легко распространяется на произвольные конечномерные евклидовы пространства, так как сходимость в конечномерном пространстве равносильна сходимости по координатам в фиксированном базисе. Однако в произвольном бесконечномерном пространстве фундаментальность уже не означает сходимость.

Евклидово пространство называют **полным**, если в этом пространстве любая фундаментальная последовательность сходится. Любое конечномерное евклидово пространство является полным. Бесконечномерное полное евклидово пространство называют **гильбертовым**. Рассмотренное ранее пространство $R[a, b]$ не является полным, так как по норме пространства функциональная последовательность может сходиться к неограниченной функции, которая неинтегрируема по Риману. Например, пределом последовательности интегрируемых функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/n, \\ 1/x, & x \geq 1/n \end{cases}$$

является неограниченная функция $1/x$.

Проблема неполных евклидовых пространств решается при помощи их пополнения. Если E — неполное евклидово пространство, то можно построить такое полное евклидово пространство $\tilde{E}$, что E является линейным всюду плотным подпространством в $\tilde{E}$, причем скалярные произведения двух пространств на E совпадают. Построение такого линейного пространства $\tilde{E}$ и называют пополнением E . Пополнение евклидова пространства $R[a, b]$ есть гильбертово пространство $L_2[a, b]$ функций, суммируемых с квадратом.

Теорема 16.6. В полном евклидовом пространстве всякая полная ортогональная система замкнута.

◀ Как уже было показано, последовательность частичных сумм ряда Фурье по ортогональной системе $\{\varphi_n\}$ произвольного элемента f евклидова пространства E является фундаментальной по норме пространства. Если E полно, то это означает сходимость ряда Фурье к некоторому элементу f_0 . При этом ряд Фурье элемента f является и рядом Фурье своей суммы f_0 , т.е. $\langle f, \varphi_n \rangle = \langle f_0, \varphi_n \rangle$. Положим $g = f - f_0$. Тогда

$$\langle g, \varphi_n \rangle = \langle f - f_0, \varphi_n \rangle = \langle f, \varphi_n \rangle - \langle f_0, \varphi_n \rangle = 0,$$

т.е. элемент g ортогонален всем элементам φ_n . Если система $\{\varphi_n\}$ полна, то для любого элемента f заключаем, что $g = 0$. Но тогда $f = f_0$ и элемент f есть сумма своего ряда Фурье. Согласно теореме 17.5, это равносильно замкнутости системы $\{\varphi_n\}$. ▶

16.5. Тригонометрическая система

Тригонометрической системой называют систему функций $1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots$, рассматриваемую на отрезке $[-l, l]$. Эта система ортогональна, но не является ортонормированной:

$$\|1\|^2 = 2l, \quad \left\| \cos \frac{n\pi x}{l} \right\|^2 = \left\| \sin \frac{n\pi x}{l} \right\|^2 = l.$$

Она замкнута и, следовательно, полна (это будет доказано позже). Ряд Фурье произвольной функции f по этой системе записывается следующим образом:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

где коэффициенты a_n и b_n определяются по формулам Эйлера — Фурье:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, \dots, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Неравенство Бесселя в данном случае имеет вид

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx$$

и фактически является равенством (равенством Парсеваля) в силу свойства замкнутости.

Задача. Является ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ рядом Фурье какой-либо функции?

Лекция 17

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

Теорема о равномерной сходимости. Гладкость функции и скорость сходимости ряда Фурье. Условия сходимости ряда Фурье в точке. Разложение четных и нечетных функций. Разложение функций по косинусам и синусам. Разложение на произвольном отрезке.

Наряду с понятиями сходимости тригонометрических рядов Фурье в среднем квадратичном (т.е. по норме, введенной в евклидовом пространстве $R[a, b]$) важное значение имеют поточечная и равномерная сходимости. Однако, записав ряд Фурье данной функции, мы априори не можем утверждать, что этот ряд сходится к функции хотя бы в одной точке. Сходимость в среднем квадратичном дает лишь уверенность, что по ряду Фурье можно восстановить функцию. Это восстановление упрощается, если ряд Фурье сходится к функции поточечно, а еще лучше, равномерно.

17.1. О равномерной сходимости ряда Фурье

Теорема 17.1. Если тригонометрический ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (17.1)$$

сходится равномерно на отрезке $[-l, l]$ к некоторой функции $f(x)$, то он является рядом Фурье функции $f(x)$ и, следовательно, сходится к $f(x)$ в среднем квадратичном.

◀ Отметим, что равномерный предел интегрируемых функций есть интегрируемая функция¹. Учитывая это, мы получим утверждение теоремы, доказав, что из равномерной сходимости вытекает сходимость к той же функции в среднем квадратичном.

Пусть последовательность $S_n(x)$ (в нашем случае это последовательность частичных сумм тригонометрического ряда) сходится на отрезке $[-l, l]$ равномерно к некоторой функции $S(x)$. Это значит, что

$$\sup_{x \in [-l, l]} |S_n(x) - S(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Используя это, находим

$$\|S_n(x) - S(x)\|_2^2 = \int_{-l}^l (S_n(x) - S(x))^2 dx \leq \int_{-l}^l \sup_{x \in [-l, l]} (S_n(x) - S(x))^2 dx = 4l^2 \sup_{x \in [-l, l]} (S_n(x) - S(x))^2.$$

Следовательно,

$$\|S_n(x) - S(x)\|_2 \leq 2l \sup_{x \in [-l, l]} (S_n(x) - S(x)).$$

Из последнего неравенства вытекает, что если последовательность $\{S_n(x)\}$ сходится к $S(x)$ на $[-l, l]$ равномерно, то сходится и в среднем квадратичном. Согласно теореме 17.1 тригонометрический ряд есть ряд Фурье своей суммы в смысле сходимости в среднем квадратичном. ►

О равномерной сходимости ряда Фурье можно судить непосредственно по его виду. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty,$$

¹В нашем случае такое сильное утверждение не нужно, так как члены тригонометрического ряда непрерывны, а равномерный предел непрерывных функций есть непрерывная функция.

то ряд Фурье (17.1) сходится равномерно. Это вытекает непосредственно из признака Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда, так как

$$\left| a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right| \leq |a_n| + |b_n|, \quad n = 1, 2, \dots$$

17.2. Порядок малости коэффициентов и дифференцируемость

Теорема 17.2. Если

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{p+\varepsilon}}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^{p+\varepsilon}}\right),$$

где p — натуральное число, то ряд (17.1) сходится на отрезке $[-l, l]$ к функции $f(x)$, имеющей $p-1$ непрерывную производную.

◀ Условия теоремы позволяют применить последовательно $p-1$ раз теорему о почленном дифференцировании функционального ряда. При каждом дифференцировании мы получаем равномерно сходящийся ряд, что означает законность почленного дифференцирования. Последнее $(p-1)$ -е дифференцирование дает равномерно сходящийся ряд, сумма которого является непрерывной функцией. Эта сумма есть $(p-1)$ -я производная суммы исходного ряда. ▶

Отметим, что сумма тригонометрического ряда, сходящегося поточечно на отрезке $[-l, l]$, есть периодическая с периодом $2l$ функция, так как все члены ряда имеют период $2l$, а сходимость будет на всей числовой оси. Поэтому, например, функция $f(x) = x$, рассматриваемая на отрезке $[-l, l]$, несмотря на всю свою гладкость, не может быть суммой своего ряда Фурье на всем отрезке. Действительно, сумма ряда Фурье этой функции есть периодическая функция $S(x)$, которая удовлетворяет условию $S(-l) = S(l)$. Но $f(l) \neq f(-l)$.

Итак, говоря о представимости функции своим рядом Фурье, мы должны предполагать либо периодичность функции, либо равенство значений функции на концах отрезка. Последнее позволяет продолжить функцию как периодическую на всю числовую ось. Отметим, что изменение функции в одной или конечном числе точек не повлияет на ее ряд Фурье, так как коэффициенты этого ряда выражаются интегралами. Поэтому на самом деле мы всегда можем считать выполненным условие периодичности, изменяя, если нужно, значения функции на концах отрезка. Но при этом периодическое продолжение функции может оказаться разрывным в точках $(2k+1)l$, где k — любое целое.

Теорема 17.3. Если периодическая с периодом $2l$ функция $f(x)$ имеет непрерывную $(p-1)$ -ю производную, являющуюся кусочно непрерывно дифференцируемой функцией, то для ее коэффициентов Фурье верны соотношения

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^p}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

◀ Из формул Эйлера — Фурье, используя дифференцируемость функции и формулу интегрирования по частям, получаем для $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-l}^l f(x) d \sin \frac{n\pi x}{l} = \\ &= \frac{1}{n\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \Big|_{-l}^l - \frac{1}{n\pi} \int_{-l}^l f'(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{1}{n\pi} \int_{-l}^l f'(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{l}{n\pi} b_n^{(1)}, \end{aligned}$$

где $b_n^{(1)}$ — синус-коэффициент функции $f'(x)$. Аналогично

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{n\pi} a_n^{(1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Повторяя процедуру интегрирования по частям, получаем соотношение

$$c_n = \pm \frac{l^p}{(n\pi)^p} c_n^{(p)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n^{(p)}|^2 + |b_n^{(p)}|^2) < +\infty.$$
$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^m f(\xi_k) \Delta x_k \right| < \varepsilon.$$
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(\xi_1), & x_0 \leq x \leq x_1; \\ f(\xi_2), & x_1 < x \leq x_2; \\ \dots & \dots \\ f(\xi_n), & x_{n-1} < x \leq x_n. \end{cases}$$
$$\left| \int_{-l}^l f(x) dx - \int_{-l}^l \tilde{f}(x) dx \right| = \left| \int_{-l}^l [f(x) - \tilde{f}(x)] dx \right| = \int_{-l}^l |f(x) - \tilde{f}(x)| dx < \varepsilon.$$
$$\int_{-l}^l |f(x) - \tilde{f}(x)|^2 dx \leq \max_{[-l, l]} |f(x) - \tilde{f}(x)| \int_{-l}^l |f(x) - \tilde{f}(x)| dx \leq 2M\varepsilon,$$

²Таковы составные функции, совпадающие с элементарными функциями на частичных интервалах области определения.

Любая кусочно постоянная функция есть линейная комбинация функций вида

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\alpha, \beta], \\ 0, & x \notin [\alpha, \beta], \end{cases}$$

где $-l \leq \alpha \leq \beta \leq l$. Но любую подобного вида функцию можно изменить в малой окрестности точек α и β так, что получится бесконечнодифференцируемая функция (рис. 17.1). При этом разность исходной и модифицированной функций может быть сколь угодно мала по норме.

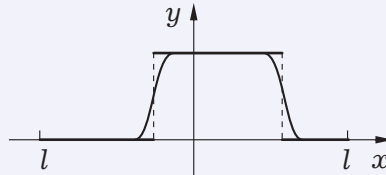


Рис. 17.1

Бесконечнодифференцируемая функция есть сумма своего ряда Фурье, как следует из теорем 18.1 и 18.3. Значит, ее можно аппроксимировать частичными суммами ряда Фурье, являющимися линейными комбинациями тригонометрической системы.

Итак, получилась цепочка последовательных приближений (рис. 17.2).



Рис. 17.2

17.3. Условия сходимости ряда Фурье в точке

Частичные суммы можно представить в интегральной форме, если в соответствующую сумму вместо коэффициентов Фурье подставить их выражения по формулам Эйлера — Фурье.

Для упрощения рассмотрим частный случай $l = \pi$. В сумму

$$S_N(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

подставим интегральные формулы для коэффициентов. Получим

$$\begin{aligned} S_N(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \left(\cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kt dt + \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kt dt \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos k(x-t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos k(x-t) \right) dt. \end{aligned}$$

Выражение в скобках, зависящее от $x-t$, определяет функцию

$$D_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos kt. \quad (17.2)$$

Так как

$$\sum_{k=1}^N \cos k\alpha = \frac{1}{2\sin \frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^N 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos k\alpha = \frac{1}{2\sin \frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^N \left[\sin \left(k + \frac{1}{2} \right) \alpha - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) \alpha \right] = \frac{\sin \left(N + \frac{1}{2} \right) \alpha - \sin \frac{\alpha}{2}}{2\sin \frac{\alpha}{2}},$$

закключаем, что

$$D_N(t) = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

Поэтому

$$S_N(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)(x-t)}{2 \sin \frac{x-t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

Функцию $D_N(t)$ называют **ядром Дирихле**. Через эту функцию частичные суммы ряда Фурье представляются следующим образом:

$$S_N(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt.$$

Ядро Дирихле обладает двумя важнейшими свойствами:

- ядро Дирихле — четная и периодическая (период 2π) функция;
- $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-t) dt = 1$.

Первое свойство вытекает из вида ядра Дирихле. Второе свойство нетрудно проверить непосредственно, проинтегрировав сумму (17.2). Это свойство можно также интерпретировать как представление рядом Фурье функции $h(x) \equiv 1$. Эта функция входит в тригонометрическую систему, и поэтому ее ряд Фурье содержит единственное ненулевое слагаемое. Очевидно, что он сходится всюду, причем все частичные суммы, начиная со второй одинаковы и равны сумме ряда, т.е. самой функции.

Лемма 17.1 (лемма Римана). Для любой интегрируемой на отрезке $[a, b]$ функции f и любого числа p верно соотношение

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(px) dx = 0.$$

◀ Если $f(x)$ непрерывно дифференцируема, то, интегрируя по частям, получаем:

$$\int_a^b f(x) \sin(px) dx = -\frac{1}{p} \int_a^b f(x) d(\cos(px)) = -\frac{1}{p} f(x) \cos(px) \Big|_a^b + \frac{1}{p} \int_a^b f'(x) \cos(px) dx.$$

Следовательно,

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(px) dx \right| \leq \frac{|f(a)| + |f(b)|}{p} + \frac{1}{p} \int_a^b |f'(x)| dx \leq \frac{M(b-a+2)}{p} \rightarrow 0$$

при $p \rightarrow \infty$, где M — общая верхняя грань функций $|f(x)|$ и $|f'(x)|$.

Для произвольной функции $f \in R[a, b]$ и любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую непрерывно дифференцируемую функцию $h(x)$, что $\|f - h\| < \varepsilon$. Согласно неравенству Коши — Буняковского

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin(px) dx \right| &\leq \left| \int_a^b h(x) \sin(px) dx \right| + \left| \int_a^b (f(x) - h(x)) \sin(px) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^b h(x) \sin(px) dx \right| + \|f - h\| \|\sin(px)\|. \end{aligned}$$

Так как утверждение верно для функции $h(x)$, величина

$$\left| \int_a^b h(x) \sin(px) dx \right|$$

будет меньше ε , начиная с некоторого номера. Значит,

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(px) dx \right| \leq (1 + \|\sin(px)\|)\varepsilon,$$

начиная с некоторого номера. Но это равносильно существованию нулевого предела. ►

Замечание 17.3. Если $a = -l$, $b = l$, $p = \frac{n\pi}{l}$, то интеграл под знаком предела в лемме Римана дает значение коэффициентов Фурье (с точностью до числового множителя). В этом частном случае равенство предела нулю вытекает из свойства коэффициентов Фурье, стремящихся к нулю при возрастании номера.

Теорема 17.4 (Дини). Теорема 18.4 Пусть интегрируемая на $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ имеет в точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ разрыв первого рода и в этой точке для некоторого $\delta > 0$ выполнены *условия Дини*

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)|}{t} dt < +\infty.$$

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к значению

$$\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

◀ Доказательство сводится к использованию интегрального представления частичных сумм ряда Фурье и к анализу этого представления.

Итак,

$$\begin{aligned} S_N(f) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt = \int_{-\pi}^0 f(x-t) D_N(t) dt + \\ &+ \int_0^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt = \int_0^{\pi} [f(x-t) + f(x+t)] D_N(t) dt. \end{aligned}$$

Из свойств ядра Дирихле вытекает тождество

$$\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} D_N(t) dt = \int_0^{\pi} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)] D_N(t) dt.$$

Вычитая это тождество из представления $S_N(f)$, получаем

$$\begin{aligned} S_N(f) - \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} &= \\ &= \int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x+0)] D_N(t) dt + \int_0^{\pi} [f(x-t) - f(x-0)] D_N(t) dt. \quad (17.3) \end{aligned}$$

Рассмотрим один из этих двух похожих интегралов, например первый. Для него имеем

$$\int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x+0)] D_N(t) dt = \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(N + \frac{1}{2} \right) t dt.$$

Так как функция

$$\varphi_+(t) = \frac{f(x+t) - f(x+0)}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, по лемме Римана приходим к выводу, что интеграл стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Аналогичное утверждение верно и для второго интеграла в (17.3). Значит,

$$S_N(f) - \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$. ►

Следствие. Если интегрируемая на $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то ряд Фурье этой функции в точке x_0 сходится к значению $f(x_0)$.

◀ Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} = f'(x_0).$$

Поэтому условия Дини в точке x_0 выполнены и можно применить теорему Дини. ►

Замечание 17.4. Из доказанной теоремы вытекает, что если функция f в точках $-\pi$ и π имеет односторонние производные, то ряд Фурье в этих точках сходится к значению $\frac{1}{2}[f(-\pi) + f(\pi)]$. По условиям периодичности функции f правосторонний предел в точке $-\pi$ следует рассматривать как правосторонний предел и в точке π , и аналогично трактуется левосторонний предел.

Замечание 17.5. Из теоремы Дини получаем следующее. Если интегрируемые функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадают в окрестности точки x_0 , то их разность $f(x) - g(x)$, равная нулю в окрестности x_0 , удовлетворяет условиям теоремы Дини. Ряд Фурье разности функций сходится к нулю в точке x_0 . Таким образом, ряды Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ сходятся или расходятся одновременно, причем, если сходятся, то к одному и тому же значению.

Описанное свойство означает, что поведение ряда Фурье функции в фиксированной точке определяется поведением функции в окрестности этой точки, а характер функции в удаленных точках на ряд Фурье в данной точке совершенно не влияет. Поэтому это свойство иногда называют локальностью ряда Фурье.

Теорема 17.5 (Дирихле). Ряд Фурье функции f ограниченной вариации сходится в каждой точке $x \in [-\pi, \pi]$ к значению

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}. \quad (17.4)$$

Эта теорема дается без доказательства. Однако отметим, что функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда представима в виде разности двух монотонных функций. Из этого критерия нетрудно заключить, что функция ограниченной вариации в каждой точке имеет односторонние пределы и, следовательно, в каждой точке отрезка $[-\pi, \pi]$ определено выражение (17.4).

Следствие. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет *условиям Дирихле*:

- функция $f(x)$ кусочно непрерывна на $[-\pi, \pi]$;
- функция $f(x)$ кусочно монотонна на $[-\pi, \pi]$.

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится всюду на $[-\pi, \pi]$ к значению (17.4).

◀ Условие кусочной монотонности означает, что отрезок $[-\pi, \pi]$ можно разбить на конечное число отрезков так, что на каждом частичном отрезке функция монотонна. Нетрудно увидеть, что при заданных условиях функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию. ►

17.4. Ряд Фурье по косинусам (синусам) кратных углов

Если функция $f(x)$ определена на $[-l, l]$ и четна, то ее синус-коэффициенты Фурье равны нулю, так как их значение определяется интегралом от нечетной функции по симметричному промежутку. Аналогично косинус-коэффициенты Фурье для нечетной функции также равны нулю. В этих случаях формулы для ненулевых коэффициентов можно модифицировать, используя значения функции только на половине отрезке, например правой. Для четной функции:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

для нечетной функции:

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Предположим, на отрезке $[0, l]$ определена функция $f(x)$. Ее можно продолжить на симметричный отрезок $[-l, l]$ двумя способами: четным способом $f(x) = f(-x)$, $x \in [-l, 0)$, и нечетным способом $f(x) = -f(-x)$, $x \in [-l, 0)$ (в последнем случае нужно также изменить на 0 значение при $x = 0$). Если исходная функция была интегрируема на отрезке $[0, l]$, то продолженная функция будет интегрируемой на отрезке $[-l, l]$. Значит, ее можно представить рядом Фурье, который сходится к функции в среднем квадратичном. Но при четном продолжении в этом ряде будут присутствовать только слагаемые с косинусами:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

коэффициенты в которых можно вычислять по формулам

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17.5)$$

Если же было выбрано нечетное продолжение, то функция будет представлена рядом

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

коэффициенты которого можно вычислять по формулам

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17.6)$$

Сказанное означает, что на отрезке $[0, l]$ системы функций $\cos \frac{n\pi x}{l}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и $\sin \frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \dots$, замкнуты. Нетрудно убедиться, что эти системы являются на $[0, l]$ ортогональными, а формулы (17.5) и (17.6) представляют собой формулы Эйлера — Фурье для этих систем.

17.5. Разложение функции на произвольном отрезке

Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда ее можно продолжить периодически на всю числовую ось, переопределив, если необходимо, в концах отрезка. Продолженную функцию можно представить рядом Фурье с периодом $T = 2l = b - a$. При этом, в силу периодичности

и продолженной функции $f(x)$, и тригонометрических функций,

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{b-a} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi x}{b-a} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Итак, на любом отрезке $[a, b]$ есть замкнутая система функций

$$1, \cos \frac{2\pi x}{b-a}, \sin \frac{2\pi x}{b-a}, \cos \frac{4\pi x}{b-a}, \sin \frac{4\pi x}{b-a}, \dots, \cos \frac{2n\pi x}{b-a}, \sin \frac{2n\pi x}{b-a}, \dots$$

Несложно убедиться, что эта система ортогональна.

17.6. Комплексная форма записи ряда Фурье

Можно расширить понятие линейного пространства, допуская, что его элементы могут умножаться не только на действительные числа, но и на комплексные. В результате возникает понятие **линейного пространства над полем комплексных чисел**, или, короче, **комплексного линейного пространства**. Аксиомы в таком линейном пространстве те же, что и в действительном линейном пространстве. Однако аксиомы скалярного произведения немного другие: вместо коммутативности скалярного произведения используется аксиома $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, где черта сверху обозначает комплексное сопряжение. Линейное пространство с таким измененным скалярным произведением называют **эрмитовым** или **унитарным пространством**.

Примеры комплексных линейных пространств дают функциональные пространства, элементами которых являются функции действительного переменного с комплексными, вообще говоря, значениями. Комплекснозначная функция интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируемы ее действительная и мнимая части. В линейном пространстве $R^c[a, b]$ комплекснозначных интегрируемых функций скалярное произведение можно ввести следующим образом:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Представление функции f ее тригонометрическим рядом Фурье можно рассматривать в рамках унитарного пространства $R^c[-l, l]$. Это позволяет при помощи формул Эйлера перейти от тригонометрических функций к показательной функции. Действительно,

$$\cos \frac{n\pi x}{l} = \frac{e^{\frac{in\pi x}{l}} + e^{-\frac{in\pi x}{l}}}{2}, \quad \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{e^{\frac{in\pi x}{l}} - e^{-\frac{in\pi x}{l}}}{2i}.$$

Поэтому тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

можно записать в виде

$$\frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n - ib_n) e^{\frac{in\pi x}{l}} + (a_n + ib_n) e^{-\frac{in\pi x}{l}} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}},$$

где

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & n > 0; \\ \frac{a_0}{2}, & n = 0; \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}), & n < 0. \end{cases}$$

Коэффициенты a_n и b_n выражаются через коэффициенты c_n следующим образом:

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/l}$ называют **тригонометрическим рядом Фурье в комплексной форме**.

Его коэффициенты могут быть найдены по формулам

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (17.7)$$

что можно записать через скалярное произведение в комплексном пространстве:

$$c_n = \frac{\langle f, e^{\frac{in\pi x}{l}} \rangle}{\|e^{\frac{in\pi x}{l}}\|^2},$$

так как

$$\|e^{\frac{in\pi x}{l}}\|^2 = \int_{-l}^l e^{\frac{in\pi x}{l}} e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx = \int_{-l}^l dx = 2l.$$

Формулы (17.7) вытекают из формул Эйлера — Фурье для произвольной ортогональной системы, но могут быть получены и из формул Эйлера — Фурье для тригонометрической системы. Например, при $n > 0$ имеем:

$$\begin{aligned} c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx - \frac{i}{2l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{l} - i \sin \frac{n\pi x}{l} \right) dx = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx. \end{aligned}$$

Лекция 18

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Предельный переход в ряде Фурье. Обоснование интеграла Фурье. Интеграл Фурье четных и нечетных функций. Косинус- и синус-преобразования Фурье. Комплексная форма записи. Интегральное преобразование Фурье и его основные свойства. Преобразование Фурье дельта-функции Дирака.

Рассмотрим ряд Фурье функции f на произвольном отрезке $[-l, l]$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right).$$

Подставим в него формулы для коэффициентов:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos \frac{n\pi x}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt + \sin \frac{n\pi x}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \right] = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi}{l} (x-t) dt \right]. \end{aligned}$$

Если $f(x)$ абсолютно интегрируема на числовой оси, то при $l \rightarrow \infty$ первый интеграл сходится к нулю. Оставшаяся часть напоминает интегральную сумму, составленную для разбиения положительной полуоси на равные интервалы длиной π/l . Это, конечно, не интегральная сумма, так как такая сумма составляется для конечного интервала, но если пренебречь строгостью, то в пределе при $l \rightarrow \infty$ мы приходим к интегралу от функции

$$\varphi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(x-t)) dt$$

и представлению исходной функции в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(x-t)) dt. \quad (18.1)$$

Интеграл в правой части (18.1) называют **интегралом Фурье**, а само равенство (18.1) — **формулой Фурье**.

Формула Фурье может быть доказана путем указанного предельного перехода, который мы не обосновали. Однако проще поступить по-другому. Вспомним, что представление функции рядом Фурье было получено подстановкой интегралов вместо коэффициентов Фурье и перестановкой интегралов со знаком суммы. Здесь мы вместо знака суммы имеем второй интеграл. Переставим в повторном интеграле пределы интегрирования:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(x-t)) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} f(t) \cos(y(x-t)) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_0^{\infty} \cos(y(x-t)) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \cdot \left. \frac{\sin(y(x-t))}{x-t} \right|_0^{\infty}. \end{aligned}$$

Мы получили некорректное выражение, говорящее о том, что вот так „в лоб“ менять порядок интегрирования в несобственном интеграле нельзя. Попробуем поступить немного иначе:

$$\int_0^T dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(x-t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \cdot \frac{\sin(y(x-t))}{x-t} \Big|_0^T = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin(T(x-t))}{x-t} dt.$$

Получился интеграл, весьма близкий к тому, который мы анализировали при доказательстве теоремы Дини и который можно рассматривать как аналог интеграла, представляющего с помощью ядра Дирихле частичные суммы ряда Фурье. Далее используем прежнюю схему. Разбиваем интеграл Фурье на два:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin(T(x-t))}{x-t} dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \frac{\sin(Tt)}{t} dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} f(x+t) \frac{\sin(Tt)}{t} dt + \int_0^{\infty} f(x-t) \frac{\sin(Tt)}{t} dt \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin(Tt)}{t} dt. \end{aligned}$$

Отметим без доказательства, что

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(Tt)}{t} dt = 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin(T(x-t))}{x-t} dt - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[f(x+t) - f(x+0)]}{t} \sin(Tt) dt + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[f(x-t) - f(x-0)]}{t} \sin(Tt) dt. \end{aligned}$$

Итак, оцениваемая разность свелась к двум однотипным интегралам вида

$$\int_0^{\infty} \varphi(t) \sin(Tt) dt.$$

Если функция φ абсолютно интегрируема, то указанный интеграл сходится к нулю при $T \rightarrow \infty$. Отметим, что если $T = n\pi/l$ и функция $\varphi(t)$ равна нулю вне отрезка $[0, l]$, то этот интеграл дает n -й коэффициент Фурье этой функции на отрезке $[-l, l]$. Последовательность коэффициентов Фурье интегрируемой функции стремится к нулю. Это, разумеется, лишь ассоциация и ничего всерьез не доказывает. Доказательство же проводится модификацией леммы Римана.

Итак, изложен эскиз вывода интеграла Фурье, в котором не были проверены утверждения:

1) возможность перестановки пределов интегрирования в несобственном интеграле (после замены одного из пределов на T интеграл остался несобственным);

2) равенство $\int_0^{\infty} \frac{\sin(Tt)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$;

3) лемма Римана, согласно которой $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \varphi(t) \sin(Tt) dt = 0$ для абсолютно интегрируемой функции φ .

Окончательный результат такой.

Теорема 18.1 (Дини). Если в точке x абсолютно интегрируемая функция $f(x)$ удовлетворяет условию Дини

$$\int_0^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} \right| dt < +\infty,$$

то

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(x-t)) dt = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \quad (18.2)$$

Теорема 18.2 (Дирихле). Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям Дирихле (кусочно непрерывна и кусочно монотонна на любом конечном отрезке), то в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ верно представление (18.2).

18.1. Четные и нечетные функции

Для четных и нечетных функций, как и в рядах Фурье, интеграл Фурье можно упростить. Если $f(x)$ четна, то

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(x-t)) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos xy \cos ty + \sin xy \sin ty] dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} f(t) \cos xy \cos ty dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xy dy \int_0^{\infty} f(t) \cos ty dt. \end{aligned}$$

Формула Фурье распадается на две симметричные формулы:

$$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ty dt, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(y) \cos xy dx, \quad (18.3)$$

По существу, это одна и та же формула, определяющая в линейном пространстве абсолютно интегрируемых функций линейный оператор, а представление функции интегралом Фурье означает, что указанный оператор является обратным самому себе.

Разумеется, четные функции можно получать как четное продолжение функций, определенных на промежутке $[0, +\infty)$. Значит, формулы (18.3) верны для любой функции на $[0, +\infty)$. Указанный линейный оператор называют **косинус-преобразованием Фурье**.

Для нечетных функций на $\mathbb{R}$ или функций на $[0, +\infty)$, продолженных нечетным образом, рассуждая аналогично, получаем **синус-преобразование Фурье**:

$$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin ty dt, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(y) \sin xy dx. \quad (18.4)$$

18.2. Симметричная форма интеграла Фурье

Симметричная форма интеграла Фурье, аналогичная косинус- или синус-преобразованию Фурье, в общем случае может быть получена в классе комплекснозначных функций. Отметим, что в силу четности косинуса

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(x-t)) dt = \left| y = -z \right| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 dz \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(z(x-t)) dt.$$

Поэтому формулу Фурье можно переписать в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(x-t)) dt.$$

Интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(y(x-t)) dt, \quad (18.5)$$

если сходится, равняется нулю как интеграл от нечетной функции на симметричном промежутке. Но в любом случае

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(y(x-t)) dt = 0.$$

Величину

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \varphi(x) dx$$

называют **главным значением несобственного интеграла** $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$. Таким образом, интеграл (18.5) равен нулю в смысле главного значения. Сложим интеграл Фурье с этим, равным нулю интегралом, умноженным на мнимую единицу. Получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos y(x-t) + i \sin y(x-t)] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iy(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iyt} dt. \end{aligned}$$

Таким образом, формула Фурье распадается на две:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iyt} dt, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{ixy} dy. \quad (18.6)$$

Формулы (18.6) определяют **прямое** и **обратное** преобразование Фурье. Прямое преобразование Фурье определено для любой абсолютно интегрируемой функции. Обратное преобразование Фурье описывает линейный оператор, обратный прямому преобразованию Фурье, и позволяет восстановить функцию по ее образу. Интеграл Фурье показывает, что любая „приличная“ функция восстанавливается по своему преобразованию Фурье. Но при этом интеграл в обратном преобразовании Фурье понимается в смысле главного значения.

Преобразование Фурье функции f будем обозначать $F[f]$. Таким образом, $F[f](w)$ — значение функции $F[f]$ в точке w .

Замечание. В теории преобразования Фурье исходную функцию часто называют **оригиналом**, а ее преобразование Фурье — **изображением**. Преобразование Фурье данной функции также называют ее **спектром**.

18.3. Свойства преобразования Фурье

Свойство 1. Если функциональная последовательность $\{f_n\}$ абсолютно интегрируемых функций сходится к некоторой функции f в среднем, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n - f| dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

то $F[f_n] \Rightarrow F[f]$ при $n \rightarrow \infty$.

◀ Это утверждение вытекает из неравенства $\|F[f]\|_\infty \leq \|f\|_1$, где

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_w |\varphi(w)|, \quad \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx. \quad \blacktriangleright$$

Свойство 2. Если функция f и все ее производные до порядка k включительно абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то

$$|F[f](w)| \leq \frac{M}{|w|^k}.$$

◀ Если f и f' абсолютно интегрируемы, то, используя правило интегрирования по частям, получаем

$$F[f'](w) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-iwt} dt = f(t)e^{-iwt} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(iw)e^{-iwt} dt = (iw)F[f](w).$$

Здесь мы использовали следующее соображение. Если f' абсолютно интегрируема, то $f(t)$ имеет предел при $t \rightarrow \infty$, определяемый несобственным интегралом от $f'(t)$. Этот предел равен нулю в силу абсолютной интегрируемости функции f . Поэтому подстановки ∞ в выражение $f(t)e^{-iwt}$ дают нулевое значение.

Итак,

$$F[f'](w) = (iw)F[f](w). \quad (18.7)$$

Поэтому $|F[f](w)| = |w|^{-k}|F[f^{(k)}](w)| \leq M|w|^{-k}$, так как, в силу свойства 1, изображение любой абсолютно интегрируемой функции ограничено. ▶

Замечание. Важное соотношение (18.7) часто называют *теоремой о дифференцировании изображения*. Оно открывает путь для решения линейных дифференциальных уравнений. Действительно,

$$F[y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y](w) = [(iw)^n + a_1(iw)^{n-1} + \dots + a_n]F[y],$$

и линейное дифференциальное уравнение $L(y) = f$ в изображениях оказывается алгебраическим: $L(iw)Y = F$, где Y и F — изображения функций y и f . Недостаток предложенной схемы — в том, что неизвестное решение, как, впрочем и правая часть уравнения, не обязаны быть абсолютно интегрируемыми и иметь изображение. Этот недостаток удалось обойти в рамках операционного исчисления, которое базируется на идеях, очень близких к преобразованию Фурье.

Свойство 3. Если функция $t^k f(t)$ абсолютно интегрируема, то $F[f]$ имеет k производных.

◀ Дело сводится к последовательному дифференцированию интеграла по параметру. Покажем основную идею для случая $k = 1$. По определению

$$F[f](w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt.$$

Продифференцировав по параметру, получаем:

$$\frac{d}{dw} F[f](w) = \int_{-\infty}^{\infty} (-it) f(t) e^{-iwt} dt,$$

причем интеграл справа сходится, в силу абсолютной интегрируемости $tf(t)$, равномерно на всей числовой оси. Это доказывает законность дифференцирования по параметру под знаком интеграла. ▶

Для абсолютно интегрируемых функций f и g интеграл

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt,$$

если сходится, дает абсолютно интегрируемую функцию, которую называют **сверткой функций** f и g . Ее обычно обозначают так: $h = f * g$. Указанный интеграл сходится, если функции f и g абсолютно интегрируемы и ограничены. Действительно, если $|g(t)| \leq M$, то $|f(t)g(x-t)| \leq M|f(t)|$, и интеграл сходится для любого x равномерно на $\mathbb{R}$ согласно признаку Вейерштрасса. При этом функция $h(x)$ абсолютно интегрируема, так как в этом случае сходится несобственный двойной интеграл

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(t)g(x-t)| dt dx.$$

Можно показать, что операция свертки коммутативна и ассоциативна, а по отношению к сложению функций дистрибутивна, т.е. обладает свойствами, характерными для операции умножения. Однако функции, играющей для этой операции роль единицы, нет. Операция свертки настолько часто используется в приложениях, что естественно попытаться расширить класс функций так, чтобы свертка имела свою единицу. Такое расширение приводит к обобщенным функциям, а роль единицы по отношению к свертке играет известная в физических приложениях дельта-функция Дирака.

Свойство 4. Для абсолютно интегрируемых функций f и g верно тождество

$$F[f * g] = F[f] F[g].$$

◀ Доказательство основано на том, что преобразование Фурье свертки представляет собой несобственный повторный интеграл, в котором можно переставить пределы интегрирования. Действительно,

$$\begin{aligned} F[f * g](w) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-iwx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) e^{-iwx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(y) e^{-iw(y+t)} dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iwy} dy = F[f](w) F[g](t). \end{aligned}$$

Возможность перестановки пределов вытекает, например, из того, что соответствующий несобственный двойной интеграл по области $\mathbb{R}^2$ сходится абсолютно. ►

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 1. Мера Жордана	1
1.1. Площадь плоского множества	1
1.2. Двойной интеграл	3
1.3. Кратный интеграл	3
Лекция 2. Вычисление кратных интегралов	6
2.1. Двойной интеграл	6
2.2. Общий случай	8
2.3. Техника вычисления	8
Лекция 3. Замена переменных в кратном интеграле	11
3.1. Двойной интеграл	11
3.2. Произвольный кратный интеграл	13
3.3. Полярные координаты	13
3.4. Цилиндрические и сферические координаты	14
Лекция 4. Приложения кратных интегралов	15
4.1. Площадь	15
4.2. Объем	16
4.3. Механические приложения	16
4.4. Плоский случай	17
Лекция 5. Несобственные интегралы	18
5.1. Интеграл от неотрицательной функции	19
5.2. Абсолютная сходимость	19
5.3. Расстановка пределов в несобственных интегралах	21
5.4. Замена переменных в несобственном интеграле	21
5.5. Интегралы, зависящие от параметра	22
Лекция 6. Криволинейный интеграл	26
6.1. Криволинейный интеграл 1-го рода	26
6.2. Криволинейный интеграл 2-го рода	28
Лекция 7. Формула Грина	31
7.1. Интеграл по замкнутому контуру	31
7.2. Формула Грина	32
7.3. Вычисление площадей при помощи криволинейных интегралов	34
Лекция 8. Полный дифференциал	35
8.1. Криволинейные интегралы, не зависящие от пути	35
8.2. Условия независимости интеграла от пути	36
8.3. Циклические постоянные	37
8.4. Трехмерный случай	38
Лекция 9. Поверхностный интеграл	39
9.1. Площадь поверхности	39
9.2. Поверхностный интеграл	41
9.3. Свойства поверхностного интеграла	41
9.4. Поверхностный интеграл 2-го рода	41
9.5. Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода	42
9.6. Связь поверхностного интеграла с криволинейным и тройным	43

Лекция 10. Элементы теории поля	45
10.1. Скалярные и векторные поля	45
10.2. Векторные трубки	45
10.3. Линейный интеграл и поток	46
10.4. Вихрь и формула Стокса	47
10.5. Дивергенция и формула Остроградского	47
Лекция 11. Специальные векторные поля	49
11.1. Векторные дифференциальные операции 2-го порядка	49
11.2. Оператор Гамильтона	49
11.3. Потенциальное поле	50
11.4. Соленоидальное поле	50
11.5. Гармоническое поле	51
11.6. Разложение поля на потенциальное и соленоидальное	52
11.7. Криволинейные координаты	52
Лекция 12. Числовые ряды	55
12.1. Основные понятия	55
12.2. Операции над рядами	56
12.3. Знакоположительные числовые ряды	57
Лекция 13. Знакопеременные числовые ряды	61
13.1. Другие признаки сходимости	61
13.2. Группировки	63
13.3. Перестановки	64
13.4. Умножение рядов	65
Лекция 14. Функциональные ряды	66
14.1. Функциональные последовательности	66
14.2. Функциональные ряды	69
14.3. Признаки равномерно сходящихся рядов	70
Лекция 15. Степенные ряды	72
15.1. Интервал сходимости	72
15.2. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов	74
15.3. Ряд Тейлора	75
15.4. Стандартные разложения в ряд Тейлора	77
Лекция 16. Ортогональные системы	79
16.1. Определение	79
16.2. Задача о наилучшем приближении	81
16.3. Свойства ряда Фурье	82
16.4. Условия сходимости ряда Фурье к функции	83
16.5. Тригонометрическая система	84
Лекция 17. Тригонометрические ряды Фурье	86
17.1. О равномерной сходимости ряда Фурье	86
17.2. Порядок малости коэффициентов и дифференцируемость	87
17.3. Условия сходимости ряда Фурье в точке	89
17.4. Ряд Фурье по косинусам (синусам) кратных углов	93
17.5. Разложение функции на произвольном отрезке	93
17.6. Комплексная форма записи ряда Фурье	94
Лекция 18. Интеграл Фурье	96
18.1. Четные и нечетные функции	98
18.2. Симметричная форма интеграла Фурье	98
18.3. Свойства преобразования Фурье	99