

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ

Конспект лекций

Для студентов специальности
«Прикладная математика»

Москва
2009

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

Лекция 10

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Основные понятия теории поля. Скалярное поле и его характеристики. Векторное поле. Векторные линии и трубки. Дифференциальные уравнения векторных линий. Линейный интеграл и циркуляция векторного поля. Формула Стокса. Вихрь (ротор) векторного поля и его свойства. Поток векторного поля. Дивергенция векторного поля. Формула Остроградского — Гаусса. Формулы для вычисления дивергенции и ротора векторного поля.

10.1. Скалярные и векторные поля

Формулы для вычисления кратных, криволинейных и поверхностных интегралов громоздки и недостаточно удобны. Их можно упростить, если использовать векторную форму записи. Кроме того, векторные понятия имеют более наглядный смысл, так как берут свое начало в математических приложениях (механика, физика).

Простейшими математическими величинами, которыми оперируют в механике и физике, являются скаляры и векторы. Если в некоторой трехмерной области G в каждой точке определен скаляр (т.е. число), то говорят, что в G задано **скалярное поле**. Таким образом, скалярное поле — это функция точки, имеющая скалярные значения. Введя в пространстве систему координат, мы можем описывать точки тройками чисел. Соответственно, скалярное поле будет описываться функцией трех переменных. Короче говоря, скалярное поле с математической точки зрения есть скалярная функция от трех переменных.

Аналогично, если в каждой точке области G определен вектор, то говорят, что в G задано **векторное поле**. В заданной системе координат векторное поле описывается отображением $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ или тремя скалярными функциями от трех переменных.

Для представления скалярного поля используют его **поверхности уровня**, т.е. поверхности, на которых поле имеет постоянное значение. Если скалярное поле описывается функцией $F(x, y, z)$, то его поверхности уровня описываются уравнениями $F(x, y, z) = C$, где C — постоянная, конкретное значение которой определяет конкретную поверхность уровня. Через каждую точку проходит поверхность уровня, и при том только одна. Это значит, что область „расслаивается“ на поверхности уровня скалярного поля.

Если в некоторой (декартовой) системе координат скалярное поле описывается функцией $F(x, y, z)$, то вектор (F'_x, F'_y, F'_z) , координатами которого являются частные производные функции F , вычисленные в данной точке, имеет особое значение. Он показывает в данной точке направление наибольшего роста функции. В силу этого его выбор не связан с выбором системы координат, так как направление наибольшего роста не зависит от системы координат. Этот вектор называют **градиентом скалярного поля** и обозначают $\text{grad } F$. Так как градиент может быть вычислен в любой точке области определения скалярного поля, то мы, по-существу, получаем **векторное поле градиента**. Градиент в каждой точке перпендикулярен (ортогонален) поверхности уровня.

Пример 10.1. Рассмотрим поле температур U в пространстве. Тепло в пространстве движется в сторону убывания температуры, причем тем быстрее, чем быстрее убывает температура. Поэтому градиент температурного поля противоположен вектору потока тепла, так как вектор $-\text{grad } U$ показывает направление наибольшего убывания температуры. Так как величина потока тепла пропорциональна скорости убывания температуры, получаем формулу для **векторного поля потока тепла**: $q = -k \text{ grad } U$.

10.2. Векторные трубки

Если скалярное поле характеризуется поверхностями уровня, то векторное поле может характеризоваться **векторными линиями**. Если векторное поле представляет собой поле скоростей текущей жидкости, то векторная линия указывает траекторию движения частиц жидкости. Эта траектория ха-

рактически тем, что в каждой ее точке вектор поля касается кривой (вектор поля попросту является вектором скорости движущейся частицы).

Пусть в области G задано векторное поле $\mathbf{v}$. Пусть в этой области параметрически задана кривая γ в виде

$$\begin{cases} x = \varphi(\tau) \\ y = \psi(\tau) \\ z = \chi(\tau) \end{cases}$$

Тогда вектор с координатами $\{\varphi'(\tau), \psi'(\tau), \chi'(\tau)\}$ является касательным к кривой. Если γ является векторной линией для $\mathbf{v}$, то этот вектор должен быть касателен к вектору $\mathbf{v}(\varphi(\tau), \psi(\tau), \chi(\tau))$. Записав условие коллинарности:

$$\varphi'(\tau) = \lambda v_x(\varphi(\tau), \psi(\tau), \chi(\tau)), \quad \psi'(\tau) = \lambda v_y(\varphi(\tau), \psi(\tau), \chi(\tau)), \quad \chi'(\tau) = \lambda v_z(\varphi(\tau), \psi(\tau), \chi(\tau)),$$

где v_x, v_y, v_z — координаты векторного поля. Эти уравнения означают, что параметрически заданная кривая является решением системы дифференциальных уравнений

$$x' = \lambda v_x(x, y, z), \quad y' = \lambda v_y(x, y, z), \quad z' = \lambda v_z(x, y, z),$$

Коэффициент λ связан с выбором параметризации кривой (иными словами, со скоростью прохождения кривой). Избавляясь от него, приходим к уравнениям

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z},$$

которые называют **уравнениями векторных линий**.

Если поверхность S такова, что в каждой точке вектор $\mathbf{v}$ касается этой поверхности, то ее называют **векторной поверхностью**. Векторная поверхность характеризуется тем, что если векторная линия начинается на этой поверхности, то она все время остается на ней. Векторную поверхность можно получить, если выбрать кривую γ , не являющуюся векторной линией, а затем образовать поверхность из всех векторных линий, пересекающих γ . Если кривая γ представляет собой простой контур, то построенную таким образом векторную поверхность называют **векторной трубкой** (рис. 10.1).

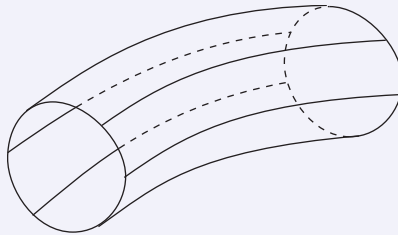


Рис. 10.1

10.3. Линейный интеграл и поток

Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\mathbf{a}$ с координатами a_x, a_y, a_z в данной системе координат. Криволинейный интеграл

$$\int_{\gamma} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{\gamma} \mathbf{a} d\mathbf{r}$$

на самом деле от системы координат не зависит, что и фиксирует его новая запись. В векторном анализе его называют **линейным интегралом**. Новая, векторная форма записи подчеркивает физическую интерпретацию этого интеграла как работу силового поля $\mathbf{a}$ при перемещении материальной точки единичной массы.

Если линейный интеграл вычисляется по контуру, т.е. кривая γ замкнута, то его называют **циркуляцией векторного поля**.

Поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint_S a_x dydz + a_y dzdx + a_z dxdy = \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS$$

называют **поток векторного поля через поверхность S** . Физический смысл этого интеграла — количество жидкости, протекающей через площадку, если векторное поле представляет собой поле скоростей текущей жидкости. Альтернатива — явления переноса, например, тепла, газа, заряда и т.п.

10.4. Вихрь и формула Стокса

Циркуляция является протяженной характеристикой, но если контур исчезающе мал, то циркуляция уже характеризует поведение поля в окрестности точки. Пусть контур γ расположен в плоскости с единичным вектором нормали $\mathbf{n}$. Тогда по формуле Стокса

$$\oint_{\gamma} \mathbf{a} d\mathbf{r} = \oint_{\gamma} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \iint_{\text{int } \gamma} \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) n_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) n_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) n_z \right] dS$$

При фиксированном векторе нормали $\mathbf{n}$ полученный поверхностный интеграл имеет предел при стягивании контура в точку, равный скалярному произведению $\mathbf{bn}$ вектора

$$\mathbf{b} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)$$

на вектор нормали. Этот вектор в теории поля называют **вихрем** или **ротором** векторного поля $\mathbf{a}$. Обозначение: $\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a}$. Вихрь векторного поля $\mathbf{a}$ с учетом правил раскрытия определителей может быть вычислен по формуле

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$$

где „умножение“, например, $\frac{\partial}{\partial x}$ на a_y означает взятие соответствующей частной производной.

Хотя вихрь определен в координатной форме, на самом деле выбор системы координат не является существенным, так как проекции этого вектора

$$(\text{rot } \mathbf{a})_n = \lim_{\mu(S_n) \rightarrow 0} \frac{\int_{S_n} \mathbf{a} d\mathbf{r}}{\mu(S_n)}$$

(S_n — площадка, перпендикулярная вектору $\mathbf{n}$) не зависят от какой-либо системы координат.

Формула Стокса принимает вид

$$\oint_{\gamma} \mathbf{a} d\mathbf{r} = \iint_{\text{int } \gamma} \mathbf{n} \text{rot } \mathbf{a} dS,$$

в котором ее чаще всего и используют.

10.5. Дивергенция и формула Остроградского

Поток, также являясь интегральной, протяженной характеристикой, в пределе приводит к локальной характеристике. Пусть векторное поле гладко в области G . Выберем в G некоторый объем V , ограниченный гладкой поверхностью ∂V . Применим к нему формулу Остроградского:

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{a} n dS = \oiint_{\partial V} a_x dydz + a_y dzdx + a_z dxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dxdydz.$$

В пределе, когда диаметр объема V стремится к 0, полученный тройной интеграл сходится к значению подынтегральной функции, если, конечно, эта функция непрерывна. Величина

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

вычисленная в точке, называется **дивергенцией векторного поля $\mathbf{a}$** в этой точке и обозначается $\operatorname{div} \mathbf{a}$. Другое определение дивергенции вытекает из формулы Остроградского: $\operatorname{div} \mathbf{a}$ — это число, равное

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\iiint_V \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}}{\mu(V)}$$

(поток на единицу объема). Эта формула показывает, что дивергенция не связана с выбором системы координат. С учетом введенного понятия формула Остроградского принимает вид

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} \, dv,$$

где dv — дифференциал объема, $dv \equiv dx dy dz$.

Лекция 11

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Потенциальное векторное поле и его свойства. Соленоидальное векторное поле и его свойства. Гармоническое (лапласово) поле и его свойства. Оператор Гамильтона и его применение в теории поля. Векторные дифференциальные операции второго порядка.

11.1. Векторные дифференциальные операции 2-го порядка

Вихрь и дивергенция являются дифференциальными операциями, которые выполняются над векторными полями. Над скалярными полями может выполняться одна операция: взятие градиента. Эти три операции могут выполняться последовательно в определенных комбинациях, причем некоторые комбинации приводят к тривиальным результатам, а некоторые — к **дифференциальным операциям второго порядка**.

Если исходный объект является скалярным полем, то первой операцией, которую к нему можно применить — это градиент. Далее возможны два случая:

а) в первом второй операцией может быть ротор:

$$\text{rot grad } f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

б) во втором случае используем дивергенцию:

$$\text{div grad } f = \frac{\partial f'_x}{\partial x} + \frac{\partial f'_y}{\partial y} + \frac{\partial f'_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f.$$

В результате получаем **оператор Лапласа**. Отметим, что функции f , для которых $\Delta f = 0$, называют **гармоническими**.

Если исходное поле $\mathbf{a}$ является векторным, то для него определены комбинации: $\text{grad div } \mathbf{a}$, $\text{div rot } \mathbf{a}$, $\text{rot rot } \mathbf{a}$.

Можно убедиться, что $\text{div rot } \mathbf{a} \equiv 0$. Поэтому имеется всего лишь три нетривиальных дифференциальных оператора 2-го порядка: оператор Лапласа Δ для скалярных полей и операторы grad div , rot rot для векторных полей.

11.2. Оператор Гамильтона

Дифференциальные операторы теории поля удобно записывать при помощи специального „векторного“ оператора

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Применение любого линейного оператора можно трактовать как умножение. С учетом этого заключаем, что

$$\text{grad } f = \nabla f, \quad \text{div } \mathbf{a} = \nabla \mathbf{a}, \quad \text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}, \quad \Delta f = \nabla \nabla f = \nabla^2 f.$$

Характерно, что тривиальные дифференциальные операции согласовываются с правилами выполнения скалярного, смешанного и векторных произведений:

$$\begin{aligned} \text{rot grad } f &= \nabla \times (\nabla f) = (\nabla \times \nabla) f, \\ \text{div rot } \mathbf{a} &= \nabla (\nabla \times \mathbf{a}) = (\nabla \times \nabla) \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Из известной формулы для двойного векторного произведения:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

получаем следующее соотношение

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a},$$

где применение оператора Лапласа к векторному полю $\mathbf{a}$ выполняется покомпонентно, т.е. $\Delta \mathbf{a}$ — это векторное поле с компонентами $(\Delta a_x, \Delta a_y, \Delta a_z)$. Таким образом, мы получили связь между двумя дифференциальными операциями второго порядка, опираясь на формулу векторной алгебры.

Техника векторной алгебры остается верной в векторном анализе потому, что раскрытие соответствующих определителей для векторного и смешанного произведений происходит по тем же правилам, а участвующие в раскрытом определителе операции умножения (скалярное, векторное и умножение на число) обладают важнейшим свойством — ассоциативностью.

11.3. Потенциальное поле

Потенциальным называют векторное поле $\mathbf{a}$, которое может быть представлено как градиент некоторого скалярного поля: $\mathbf{a} = \operatorname{grad} f$. В этом случае скалярное поле f называют **потенциалом векторного поля $\mathbf{a}$** .

Из свойств дифференциальных операций для потенциального поля получаем: $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} f \equiv \mathbf{0}$. Таким образом, условие $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{0}$ является необходимым для того, чтобы поле $\mathbf{a}$ было потенциальным.

Если $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ является потенциальным, то выражение $a_x dx + a_y dy + a_z dz$ является полным дифференциалом, а первообразная представляет собой потенциал исходного векторного поля. Из свойств криволинейного интеграла получаем эквивалентность ряда условий:

- а) криволинейный интеграл $\int a_x dx + a_y dy + a_z dz$ не зависит от пути;
- б) криволинейный интеграл $\int a_x dx + a_y dy + a_z dz$ по любому контуру равен 0;
- в) дифференциал $a_x dx + a_y dy + a_z dz$ является полным;
- г) линейный интеграл $\int \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$ не зависит от пути;
- д) циркуляция $\oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$ равна 0 по любому контуру;
- е) $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Все эти условия эквивалентны, если векторное поле определено в односвязной (точнее, поверхностно односвязной) области. При этом потенциал поля может быть вычислен при помощи линейного интеграла $\int \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$ с переменным верхним пределом.

Указанные выше свойства получают естественную интерпретацию, если векторное поле — это поле сил. В этом случае потенциальность силового поля означает отсутствие внешних сил, а независимость линейного интеграла от пути означает, что от пути не зависит работа потенциального силового поля.

Потенциальное поле вполне характеризуется своим потенциалом. Так как потенциал определяется с точностью до постоянной, для его полной определенности достаточно знать его значение в некоторой точке. В случае неограниченной области потенциал часто выбирают так, что он равен 0 в ∞ . Поверхности уровня потенциала называют **эквипотенциальными поверхностями**. Если векторное поле — это поле сил, то при движении по эквипотенциальной поверхности поле не производит работы.

11.4. Соленоидальное поле

Векторное поле $\mathbf{a}$ называют **соленоидальным**, если оно является вихрем некоторого поля $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{b}$. При этом векторное поле $\mathbf{b}$ называют **векторным потенциалом поля $\mathbf{a}$** . Необходимым условием такого соотношения является равенство $\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{b} = 0$. Следовательно, поток соленоидального поля через замкнутую поверхность равен 0. Если векторное поле представляет собой поле скоростей сплошной среды (жидкости), то поток этого поля через замкнутую поверхность характеризует суммарную мощность источников или стоков (если поток отрицателен).

Дивергенция есть точечная характеристика распределения источников и стоков. В случае соленоидального поля источники и стоки отсутствуют. Характерным примером такого поля является

поле магнитной напряженности. Эта составляющая электромагнитного поля отличается тем, что не является порождением статических элементов типа статического электрического заряда. Отсутствие магнитных зарядов в природе с математической точки зрения есть свойство соленоидальности поля магнитной напряженности.

Для соленоидального поля $\mathbf{a}$ рассмотрим векторную трубку с направляющей γ (рис. 11.1). Пусть S_1 и S_2 два (трансверсальных) сечения трубки. В результате мы получаем трехмерную область G , ограниченную боковой поверхностью трубки и сечениями S_1 и S_2 . Поток через эту поверхность равен 0. К тому же равен 0 и поток через боковую поверхность трубки, так как в точках боковой поверхности векторное поле ортогонально нормали (иначе говоря, касается поверхности). С учетом ориентации приходим к заключению, что поток через любое сечение векторной трубки одинаков (постоянен). Эту постоянную величину называют **интенсивностью векторной трубки**.

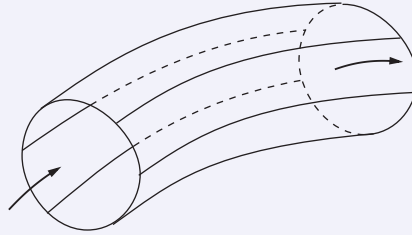


Рис. 11.1

Условие $\operatorname{div} \mathbf{a}$ является необходимым, чтобы поле $\mathbf{a}$ было соленоидальным. Оно является достаточным при дополнительных ограничениях на область G определения поля. Именно, нужно, чтобы область была **объемно односвязной**, т.е. любая замкнутая поверхность в G ограничивала область, целиком лежащую в G .

Чтобы доказать утверждение, запишем уравнение $\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{a}$ в координатах:

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_z}{\partial y} - \frac{\partial \xi_y}{\partial z} = a_x, \\ \frac{\partial \xi_x}{\partial z} - \frac{\partial \xi_z}{\partial x} = a_y, \\ \frac{\partial \xi_y}{\partial x} - \frac{\partial \xi_x}{\partial y} = a_z. \end{cases}$$

Эта система имеет заведомо неединственное решение даже с точностью, например, до постоянной. Если мы выберем пару функций ξ_z и ξ_y , удовлетворяющих первому уравнению, то второе и третье уравнения можно рассматривать как систему двух уравнений в частных производных относительно функции ξ_x . Как и в случае восстановления первообразной полного дифференциала, необходимо выполнение дополнительного условия для существования решения — равенства возникающих смешанных производных. В конечном счете это ограничение сводится к условию $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$.

Эти рассуждения показывают, что локально условие $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ является достаточным для соленоидальности $\mathbf{a}$.

11.5. Гармоническое поле

Если векторное поле $\mathbf{a}$ является одновременно и потенциальным, и соленоидальным, то его называют **гармоническим** или **лапласовым**.

Будучи потенциальным, это поле (хотя бы локально) может быть описано скалярным потенциалом u . Соленоидальность поля означает, что

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \operatorname{div} \mathbf{a} = 0,$$

т.е. скалярный потенциал u удовлетворяет **уравнению Лапласа** $\Delta u = 0$. Такие функции называют **гармоническими**. Название поля берет свое начало из названия уравнения или типа функции.

Отметим важнейшие свойства гармонических функций. Во-первых, верна **теорема о среднем**: тройной интеграл от гармонической функции по шару, деленный на объем этого шара, равен значению

гармонической функции в центре шара. Иными словами, значение функции в центре шара (сферы) совпадает со средним значением функции в шаре (на сфере).

Из теоремы о среднем немедленно следует, что гармоническая функция не может иметь локальных экстремумов, так как тогда значение в точке экстремума должно быть больше любого близкого значения, а следовательно, и больше среднего. Векторные линии гармонического поля не могут быть замкнутыми, так как циркуляция по таким линиям должна быть ненулевой. Они всегда начинаются и заканчиваются на границе области.

11.6. Разложение поля на потенциальное и соленоидальное

Любое поле $\mathbf{a}$ может быть представлено в виде суммы двух полей $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, одно из которых, скажем, $\mathbf{a}_1$, является потенциальным, а второе — соленоидальным. Действительно, попробуем найти такое потенциальное поле $\mathbf{a}_1$, которое удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{a}_1 = \operatorname{div} \mathbf{a}. \quad (11.1)$$

Так как $\mathbf{a}_1$ потенциально, оно может быть описано скалярным потенциалом u . Сводя уравнение к этому потенциалу, получим уравнение $\Delta u = \operatorname{div} \mathbf{a}$, которое называют **уравнением Пуассона**. Из курса уравнений математической физики следует, что это уравнение всегда имеет решения. Таким образом, и уравнение (11.1) имеет решения. Тогда векторное поле $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{a}_1$ удовлетворяет соотношению $\operatorname{div} \mathbf{a}_2 = 0$, т.е. является соленоидальным.

11.7. Криволинейные координаты

Все выкладки теории поля до сих пор делались в декартовой системе координат. Однако на практике могут использоваться и другие системы координат, связанные с течением процесса или развитием системы. Декартова система координат выгодна тем, что в ней наиболее просто записываются формулы для расстояний и углов. Может оказаться, что более важным являются не расстояния и углы, а вид уравнений, описывающих систему. Тогда вместо декартовой системы координат выбирается какая-то другая.

Под криволинейными координатами в области G мы понимаем некоторое отображение области $G' \subset \mathbb{R}^3$ в G . „Точками“ в G' являются тройки чисел (строки длины 3). Если отображение $G' \rightarrow G$ является взаимно однозначным, то каждой точке $M \in G$ будет поставлено в соответствие тройка чисел, составляющих прообраз точки при заданном отображении.

Криволинейные координаты могут задаваться не всюду в данной области G , а локально, в некоторой окрестности точки. Это удобно, если не удастся построить координаты по всей области из-за потери однозначности.

Пусть заданы криволинейные координаты при помощи формул

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v, w), \\ y = \psi(u, v, w), \\ z = \chi(u, v, w), \end{cases} \quad (u, v, w) \in G',$$

где x, y, z — декартовы координаты точки в заданной области G , u, v, w — криволинейные координаты. Тогда в каждой точке $M \in G$ определены кривые, которые в области G' описываются уравнениями:

$$l_u : \begin{cases} u = u_0 + t, \\ v = v_0, \\ w = w_0, \end{cases} \quad l_v : \begin{cases} u = u_0, \\ v = v_0 + t, \\ w = w_0, \end{cases} \quad l_w : \begin{cases} u = u_0, \\ v = v_0, \\ w = w_0 + t. \end{cases}$$

В области G эти кривые (их называют **координатными**) описываются уравнениями

$$l_u : \begin{cases} x = \varphi(u_0 + t, v_0, w_0), \\ y = \psi(u_0 + t, v_0, w_0), \\ z = \chi(u_0 + t, v_0, w_0), \end{cases} \quad l_v : \begin{cases} x = \varphi(u_0, v_0 + t, w_0), \\ y = \psi(u_0, v_0 + t, w_0), \\ z = \chi(u_0, v_0 + t, w_0), \end{cases} \quad l_w : \begin{cases} x = \varphi(u_0, v_0, w_0 + t), \\ y = \psi(u_0, v_0, w_0 + t), \\ z = \chi(u_0, v_0, w_0 + t), \end{cases}$$

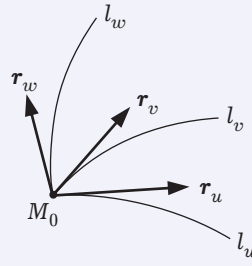


Рис. 11.2

Взяв у этих кривых касательные векторы r_u, r_v, r_w в точке $M_0(u_0, v_0, w_0)$, получим векторный базис в трехмерном пространстве, называемый **репером** (рис. 11.2).

Если векторы репера попарно ортогональны, то криволинейную систему координат называют **триортогональной**. Примерами триортогональных систем координат являются цилиндрическая (полярная на плоскости) и сферическая. Длины векторов координатного репера триортогональной системы называют **коэффициентами Ламе**. В триортогональной системе координат вместо координатного репера r_u, r_v, r_w удобно использовать ортонормированный репер e_u, e_v, e_w , полученный нормированием векторов базиса.

Формулы для дифференциальных операций в криволинейных координатах достаточно сложны. Но в частном случае триортогональной системы координат удастся сочетать гибкость криволинейных координат и относительную простоту формул для дифференциальных операций.

Градиент. Градиент скалярного поля f в точке M_0 — это вектор, указывающий направление наибольшего роста и имеющий длину, равную этому росту. В декартовой системе координат его координатами являются частные производные. Если (u, v, w) — криволинейная триортогональная система координат, то естественно выразить градиент через векторы ортонормированного координатного репера.

Чтобы выразить вектор, заданный координатами в одном базисе, через другой, достаточно знать матрицу перехода. Базис r_u, r_v, r_w выражается через ортонормированный базис e_u, e_v, e_w при помощи диагональной матрицы D , на диагонали которой стоят коэффициенты Ламе. С другой стороны, матрицей перехода из базиса i, j, k в базис r_u, r_v, r_w является матрица Якоби $J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$. Поэтому матрицей перехода из i, j, k в e_u, e_v, e_w будет матрица JD^{-1} . Координаты вектора $\text{grad } f$ в базисе e_u, e_v, e_w могут быть записаны в виде (с учетом ортогональности матрицы JD^{-1})

$$(JD^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} = (JD^{-1})^T \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} = D^{-1} J^T \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} f'_u \\ f'_v \\ f'_w \end{pmatrix}.$$

В координатной форме мы получаем следующую формулу:

$$\text{grad } f = \frac{1}{\lambda_u} \frac{\partial f}{\partial u} e_u + \frac{1}{\lambda_v} \frac{\partial f}{\partial v} e_v + \frac{1}{\lambda_w} \frac{\partial f}{\partial w} e_w.$$

Дивергенция. Дивергенцию будем интерпретировать как „поток на единицу объема“. Для простоты будем считать, что система координат (u, v, w) является правой. Это равносильно тому, что якобиан перехода к этим координатам положителен.

Выберем в системе координат u, v, w прямоугольный параллелепипед

$$[u_0, u_0 + \Delta u] \times [v_0, v_0 + \Delta v] \times [w_0, w_0 + \Delta w].$$

Этому параллелепипеду соответствует криволинейный параллелепипед в системе координат (x, y, z) . Объем этого криволинейного параллелепипеда вычисляется тройным интегралом

$$V = \iiint_{(V)} J(u, v, w) du dv dw,$$

где $J(u, v, w)$ — якобиан координатного отображения.

Граница криволинейного параллелепипеда разбивается на 6 граней — поверхностей, параметризуемых парами криволинейных координат. По формуле считаем поверхностные интегралы, описывающие поток через всю границу. Группируем противоположные грани. Например, поток через грань $u = u_0 + \Delta u$ имеет вид

$$P_{u1} = \iint_{u=u_0+\Delta u} \mathbf{a} \mathbf{n} dS = \int_{v_0}^{v_0+\Delta v} dv \int_{w_0}^{w_0+\Delta w} \mathbf{a}(u_0 + \Delta u, v, w) (\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w)|_{u=u_0+\Delta u} dw,$$

а через противоположную ей — с учетом направления нормали

$$P_{u0} = - \iint_{u=u_0} \mathbf{a} \mathbf{n} dS = - \int_{v_0}^{v_0+\Delta v} dv \int_{w_0}^{w_0+\Delta w} \mathbf{a}(u_0, v, w) (\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w)|_{u=u_0} dv dw.$$

Группируя эти интегралы, получаем

$$P_{u1} - P_{u0} = \int_{v_0}^{v_0+\Delta v} dv \int_{w_0}^{w_0+\Delta w} \Delta u [\mathbf{a}(\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w)] dv dw,$$

где Δu обозначает приращение по переменной u . По теореме Лагранжа и теореме о среднем для двойного интеграла

$$P_{u1} - P_{u0} = \frac{\partial}{\partial u} [\mathbf{a}(\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w)](u_1, v_1, w_1) \Delta u \Delta v \Delta w.$$

Суммируя три пары граней и переходя к пределу, когда приращения стремятся к 0, получаем формулу

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{a}(\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w)) + \frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{a}(\mathbf{r}_w \times \mathbf{r}_u)) + \frac{\partial}{\partial w} (\mathbf{a}(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)) \right]. \quad (11.2)$$

В случае триортогональной системы координат якобиан равен произведению коэффициентов Ламе, а смешанные произведения в (11.2) легко считаются. Получаем формулу

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{\lambda_u \lambda_v \lambda_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} (\lambda_v \lambda_w a_u) + \frac{\partial}{\partial v} (\lambda_w \lambda_u a_v) + \frac{\partial}{\partial w} (\lambda_u \lambda_v a_w) \right].$$

Ротор. Рассуждения аналогичны. Чтобы вычислить проекции $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ на координатные векторы $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$, $\mathbf{e}_w$ триортогональной системы координат, достаточно вычислить циркуляцию по границам граней рассмотренного выше криволинейного параллелепипеда и разделить на площадь грани. Параметризация ребер и граней параллелепипеда выбирается как и прежде. Приведем окончательную формулу (как и ранее для сокращения используем форму определителя):

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \lambda_u \mathbf{e}_u & \lambda_v \mathbf{e}_v & \lambda_w \mathbf{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ \lambda_u a_u & \lambda_v a_v & \lambda_w a_w \end{vmatrix}.$$

Лапласиан. Формулу для лапласиана можно получить, комбинируя формулы для дивергенции и градиента. Окончательный ответ для триортогональной системы координат:

$$\Delta f = \frac{1}{\lambda_u \lambda_v \lambda_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\lambda_v \lambda_w}{\lambda_u} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\lambda_w \lambda_u}{\lambda_v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\lambda_u \lambda_v}{\lambda_w} \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right].$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 1. Мера Жордана	1
1.1. Площадь плоского множества	1
1.2. Двойной интеграл	3
1.3. Кратный интеграл	3
Лекция 2. Вычисление кратных интегралов	6
2.1. Двойной интеграл	6
2.2. Общий случай	8
2.3. Техника вычисления	8
Лекция 3. Замена переменных в кратном интеграле	11
3.1. Двойной интеграл	11
3.2. Произвольный кратный интеграл	13
3.3. Полярные координаты	13
3.4. Цилиндрические и сферические координаты	14
Лекция 4. Приложения кратных интегралов	15
4.1. Площадь	15
4.2. Объем	16
4.3. Механические приложения	16
4.4. Плоский случай	17
Лекция 5. Несобственные интегралы	18
5.1. Интеграл от неотрицательной функции	19
5.2. Абсолютная сходимость	19
5.3. Расстановка пределов в несобственных интегралах	21
5.4. Замена переменных в несобственном интеграле	21
5.5. Интегралы, зависящие от параметра	22
Лекция 6. Криволинейный интеграл	26
6.1. Криволинейный интеграл 1-го рода	26
6.2. Криволинейный интеграл 2-го рода	28
Лекция 7. Формула Грина	31
7.1. Интеграл по замкнутому контуру	31
7.2. Формула Грина	32
7.3. Вычисление площадей при помощи криволинейных интегралов	34
Лекция 8. Полный дифференциал	35
8.1. Криволинейные интегралы, не зависящие от пути	35
8.2. Условия независимости интеграла от пути	36
8.3. Циклические постоянные	37
8.4. Трехмерный случай	38
Лекция 9. Поверхностный интеграл	39
9.1. Площадь поверхности	39
9.2. Поверхностный интеграл	41
9.3. Свойства поверхностного интеграла	41
9.4. Поверхностный интеграл 2-го рода	41
9.5. Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода	42
9.6. Связь поверхностного интеграла с криволинейным и тройным	43

Лекция 10. Элементы теории поля	45
10.1. Скалярные и векторные поля	45
10.2. Векторные трубки	45
10.3. Линейный интеграл и поток	46
10.4. Вихрь и формула Стокса	47
10.5. Дивергенция и формула Остроградского	47
Лекция 11. Специальные векторные поля	49
11.1. Векторные дифференциальные операции 2-го порядка	49
11.2. Оператор Гамильтона	49
11.3. Потенциальное поле	50
11.4. Соленоидальное поле	50
11.5. Гармоническое поле	51
11.6. Разложение поля на потенциальное и соленоидальное	52
11.7. Криволинейные координаты	52
Лекция 12. Числовые ряды	55
12.1. Основные понятия	55
12.2. Операции над рядами	56
12.3. Знакоположительные числовые ряды	57
Лекция 13. Знакопеременные числовые ряды	61
13.1. Другие признаки сходимости	61
13.2. Группировки	63
13.3. Перестановки	64
13.4. Умножение рядов	65
Лекция 14. Функциональные ряды	66
14.1. Функциональные последовательности	66
14.2. Функциональные ряды	69
14.3. Признаки равномерно сходящихся рядов	70
Лекция 15. Степенные ряды	72
15.1. Интервал сходимости	72
15.2. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов	74
15.3. Ряд Тейлора	75
15.4. Стандартные разложения в ряд Тейлора	77
Лекция 16. Ортогональные системы	79
16.1. Определение	79
16.2. Задача о наилучшем приближении	81
16.3. Свойства ряда Фурье	82
16.4. Условия сходимости ряда Фурье к функции	83
16.5. Тригонометрическая система	84
Лекция 17. Тригонометрические ряды Фурье	86
17.1. О равномерной сходимости ряда Фурье	86
17.2. Порядок малости коэффициентов и дифференцируемость	87
17.3. Условия сходимости ряда Фурье в точке	89
17.4. Ряд Фурье по косинусам (синусам) кратных углов	93
17.5. Разложение функции на произвольном отрезке	93
17.6. Комплексная форма записи ряда Фурье	94
Лекция 18. Интеграл Фурье	96
18.1. Четные и нечетные функции	98
18.2. Симметричная форма интеграла Фурье	98
18.3. Свойства преобразования Фурье	99