

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ

Конспект лекций

Для студентов специальности
«Прикладная математика»

Москва
2009

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

Лекция 1

МЕРА ЖОРДАНА

Задача о вычислении площади и объема. Понятие объема в n -мерном арифметическом пространстве. Измеримые множества. Мера Жордана. Кратный интеграл, теорема о существовании. Свойства кратного интеграла.

Мы приступаем к изучению различных обобщений определенного интеграла. Первое — кратный интеграл (в частности, двойной, тройной). Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.1. Пусть имеется плоская пластинка некоторой формы с распределенным на ней электрическим зарядом (рис. 1.1). Распределение заряда описывается плотностью, т.е. количеством заряда на единицу площади. Плотность есть функция точки на плоскости, т.е. функция двух переменных, которую мы обозначим $q(x, y)$.

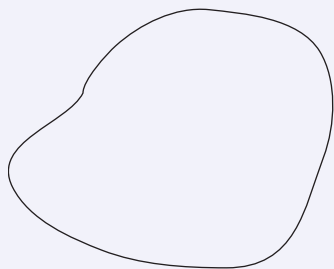


Рис. 1.1

Чтобы приближенно вычислить общий заряд на пластинке, нужно разбить пластинку S на мелкие части ΔS_i так, что плотность на каждой части условно постоянна. Тогда количество заряда на ΔS_i равно произведению плотности, соответствующей этой части, на площадь. Суммируя, получаем приближенный результат

$$Q \approx \sum_i q(x_i, y_i) \Delta S_i.$$

Точный результат мы получим, если перейдем к пределу, при котором линейные размеры каждой части разбиения неограниченно уменьшаются.

Полученная сумма напоминает интегральную, но отличается тем, что вместо длин отрезков разбиения интервала интегрирования используются площади элементов разбиения.

Для построения теории нам необходимо точное определение площади фигуры. Не для всякого плоского множества можно определить площадь. Для каких можно? Как определить?

1.1. Площадь плоского множества

Площадь — это мера плоских множеств, т.е. закон, который плоскому множеству X ставит в соответствие число $\mu(X)$. При этом должны выполняться несколько важнейших свойств:

- а) $\mu(X) \geq 0$;
- б) площадь аддитивна, т.е. если X_1 и X_2 не пересекаются, то $\mu(X_1 \cup X_2) = \mu(X_1) + \mu(X_2)$. Из этого свойства и из а) следует, что при $X_1 \subset X_2$ должно быть $\mu(X_1) \leq \mu(X_2)$;
- в) площадь фигуры не меняется при ее перемещении (движении) по плоскости;
- г) площадь квадрата со стороной 1 равна 1.

Естественно предполагать, что объединение, пересечение, теоретико-множественная разность измеримых множеств является измеримым множеством (неявно это присутствует в свойстве б)). Исходя из указанных свойств мы можем доказать, что любой отрезок измерим и имеет меру 0. Действительно, отрезок длины l может быть целиком накрыт совокупностью из lp квадратов со стороной $1/p$. Значит, мера отрезка не может превосходить lp -кратную площадь одного квадрата. С другой стороны, в квадрат со стороной 1 можно уложить без пересечений $(p-1)^2$ квадратов со стороной $1/p$. Значит, квадрат со стороной $1/p$ имеет площадь S_p не более $(p-1)^{-2}$, а отрезок имеет площадь не выше $lp(p-1)^{-2}$. Но чем больше натуральный параметр p , тем меньше полученная оценка, а при $p \rightarrow \infty$ она дает 0.

Так как мера любого отрезка равна 0, то мы можем показать, что мера любого квадрата со стороной $1/p$ в точности равна $1/p^2$, так как в квадрате со стороной 1 их можно уложить ровно p^2 , если не принимать во внимание совмещение их границ (границы квадратов имеют меру 0).

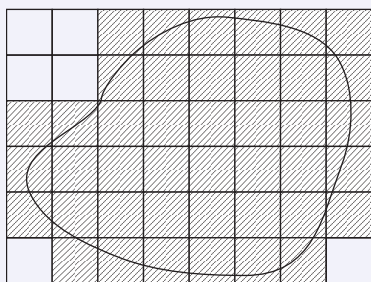


Рис. 1.2

Рассмотрим плоскую ограниченную фигуру S (рис. 1.1). Для вычисления ее площади нужно покрыть ее сеткой и подсчитать суммарную площадь ячеек сетки, накрывающих фигуру (рис. 1.2). Проще всего, чтобы ячейки сетки были квадратами одинакового размера. Для этого выберем на плоскости систему координат Oxy , и разделим плоскость на квадраты прямыми $x = ia$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и $y = ja$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Получаем сетку из квадратов со стороной a . Объединим все квадраты сетки, целиком попавшие в S . Получим множество $\underline{S}$. Часть квадратов не попадает в S , а накрывается ею частично. Объединим все квадраты, пересекающиеся с S (но, возможно, не лежащие в S целиком).

Получим фигуру $\bar{S}$. Очевидно, что $\underline{S} \subset S \subset \bar{S}$. Поэтому $\mu(\underline{S}) \leq \mu(S) \leq \mu(\bar{S})$.

Разобьем каждый квадрат сетки на p^2 частей, проведя дополнительные прямые $x = ia/p$ и $y = ja/p$. Тогда новая сетка образует два множества $\underline{S}_1$ и $\bar{S}_1$ из более мелких квадратов, причем $\underline{S} \subset \underline{S}_1 \subset S \subset \bar{S}_1 \subset \bar{S}$.

Продолжая процесс измельчения сетки, получим последовательности $\underline{S} \subset \underline{S}_1 \subset \dots \subset \underline{S}_k \subset \dots$ и $\bar{S} \supset \bar{S}_1 \supset \dots \supset \bar{S}_k \supset \dots$. Последовательности $\{\mu(\underline{S}_n)\}$ и $\{\mu(\bar{S}_n)\}$ являются монотонными и потому имеют предел, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\underline{S}_n) = \underline{\mu}(S) \leq \bar{\mu}(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\bar{S}_n).$$

Если величины $\underline{\mu}(S)$ и $\bar{\mu}(S)$ совпадают, то их общее значение называют **площадью** или **мерой Жордана** фигуры (множества) S . Однако эти значения могут не совпадать. Это значит, что фигура S не имеет площади. Величину $\underline{\mu}(S)$ называют **внутренней (нижней) мерой Жордана** для множества S , а величину $\bar{\mu}(S)$ — **внешней (верхней) мерой Жордана**.

Замечание. При построении меры Жордана допущен произвол в выборе системы координат (ориентация и начало отсчета сетки) и в значении параметров a , p (размер сетки и кратность измельчения). Однако величина площади, как, впрочем, и верхняя и нижняя меры Жордана, не может зависеть от этих параметров. Докажите, что это так. Отметим также, что площадь фигуры можно измерять не только подсчетом квадратов сетки, но и заполнением ее другими простейшими (прямоугольниками, трапециями, треугольниками). Например, площадь криволинейной трапеции измеряется суммой площадей вписанных прямоугольников, что в пределе дает определенный интеграл. И при таком подходе получаем тот же результат (почему?).

Задача. Докажите, что площадь прямоугольника равна произведению его сторон.

Может получиться так, что множество S не будет содержать ни одного квадрата сетки, как бы мы ни измельчали ее (например, S не имеет внутренних точек а потому не может содержать целиком никакого квадрата). Тогда по определению нижняя мера Жордана равна 0. Это, в частности будет, если верхняя мера Жордана равна 0. В последнем случае множество имеет площадь, равную нулю (например, отрезок прямой).

Множества, у которых верхняя мера Жордана равна 0, называют **множествами меры 0**. Если множество X имеет площадь, то множество ∂X его граничных точек имеет меру 0. Действительно, построив последовательность фигур $\{\bar{X}_n\}$ и $\{\underline{X}_n\}$, мы получим последовательность множеств $\Delta X_n = \bar{X}_n \setminus \underline{X}_n$, покрывающих ∂X , причем

$$\mu(\Delta X_n) = \mu(\bar{X}_n) - \mu(\underline{X}_n) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Очевидно, верно и обратное утверждение: если граница множества имеет меру 0, то множество измеримо (имеет площадь).

Пример. График непрерывной функции имеет меру 0, а фигура, ограниченная графиком функции, осью Ox и двумя вертикальными прямыми (криволинейная трапеция) измерима.

1.2. Двойной интеграл

Пусть функция $f(x, y)$ от двух переменных определена и ограничена на измеримом (по Жордану) множестве S^1 . Разобьем множество S на части ΔS_i , $i = 1, \dots, k$, измеримые по Жордану, в каждой из них возьмем точку ξ_i с координатами (x_i, y_i) и образуем сумму

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^k f(x_i, y_i) \mu(\Delta S_i).$$

Множество T из всех частей ΔS_i называют **разбиением множества S** . Величина

$$d(X) = \max\{AB, A \in X, B \in X\}, \quad (1.1)$$

равная максимально возможному расстоянию между точками множества X называется **диаметром множества X** . Максимальный из диаметров $d(\Delta S_i)$ составляющих разбиение T частей называют **диаметром $d(T)$ этого разбиения**. Сумма (1.1) — это **интегральная сумма** для функции f , соответствующая разбиению T .

Если для любой последовательности разбиений T_k , удовлетворяющей условию $d(T_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, существует предел интегральных сумм $\lim \sigma_k$, то функция f называется **интегрируемой на множестве S** . В этом случае предел не зависит от выбора последовательности разбиений (ответьте, почему?). Он называется **интегралом функции f по множеству S** и обозначается

$$\iint_S f \, dx dy.$$

1.3. Кратный интеграл

Все сказанное обобщается на трехмерный случай. Можно также построить аналогичную теорию в произвольном n -мерном арифметическом пространстве. В качестве эталона меры рассмотрим множество

$$E = \{(x_1, \dots, x_n): 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n\},$$

называемое **n -мерным единичным кубом**, которому припишем меру (n -мерный объем) 1. Будем исходить из свойств меры, ранее сформулированных для площади (свойства а)–г)).

Рассмотрим произвольное ограниченное множество $S \in \mathbb{R}^n$. Для его измерения построим сетку, проведя гиперплоскости $x_i = ka$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, параллельные координатным и отстоящие друг от друга на расстояние a . В результате все пространство разобьется на n -мерные кубы со стороной a . Объединение всех кубов, целиком лежащих в S , обозначим $\underline{S}$. Объединение всех кубов, пересекающихся с S , обозначим $\bar{S}$. Ясно, что $\underline{S} \subset S \subset \bar{S}$. Объем одного куба равен a^n , объем множества $\underline{S}$ или $\bar{S}$ равен произведению количества кубов сетки, попавших в множество, на величину a^n . Добавляя новые гиперплоскости (по $p - 1$ между соседними в сетке), мы получаем более мелкую сетку и новые множества $\underline{S}_1$ и $\bar{S}_1$. Продолжая процесс измельчения сетки, получим последовательности $\underline{S}_n$ и $\bar{S}_n$, причем

$$\begin{aligned} \underline{S}_n \subset \underline{S}_{n+1} & \quad \bar{S}_n \supset \bar{S}_{n+1} \\ n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Пределы

$$\mu(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\underline{S}_n), \quad \bar{\mu}(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\bar{S}_n),$$

существующие в силу монотонности последовательностей, называются, соответственно, **внутренней (нижней) и внешней (верхней) мерами Жордана**. Если внутренняя и внешняя меры Жордана данного множества S совпадают, то S называют **измеримым (по Жордану)**, а совпадающее значение — **мерой Жордана**. Если внешняя мера Жордана равна 0, то множество называют множеством меры 0.

¹Из построения меры Жордана следует, что измеримое множество S должно покрываться конечным набором квадратов и, следовательно, является ограниченным.

Свойства меры Жордана:

- 1) если $X_1 \subset X_2$, то $\underline{\mu}(X_1) \leq \underline{\mu}(X_2)$ и $\bar{\mu}(X_1) \leq \bar{\mu}(X_2)$;
- 2) если X открыто, то $0 < \underline{\mu}(X)$, в общем случае $0 \leq \underline{\mu}(X) \leq \bar{\mu}(X)$;
- 3) если X имеет меру 0, то любое подмножество X измеримо и имеет меру 0;
- 4) для любого ограниченного множества X выполняется равенство $\bar{\mu}(X) = \bar{\mu}(\bar{X})$, где $\bar{X}$ — замыкание X . В частности, замыкание множества меры 0 есть множество меры 0;
- 5) для любого набора множеств $X_1, \dots, X_m$ имеет место неравенство

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^m X_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \bar{\mu}(X_i)$$

(полуаддитивность верхней меры). В частности, объединение конечного числа множеств меры 0 есть множество меры 0;

6) ограниченное множество измеримо тогда и только тогда, когда его граница есть множество меры 0;

7) теорема сложения: для измеримых множеств X и Y

$$\mu(X \cap Y) = \mu(X) + \mu(Y) - \mu(X \cup Y).$$

В частности, мера объединения непересекающихся множеств равна сумме мер этих множеств (аддитивность меры).

Понятие n -мерного интеграла вводится так же, как и двойной интеграл. Обозначают n -мерный интеграл как обычный определенный интеграл (специальные обозначения имеются лишь для двойного и тройного интеграла):

$$\int_S f \, dx$$

Отметим свойства кратного интеграла. Они близки соответствующим свойствам определенного интеграла:

- 1) для любого измеримого множества S $\int_S dx = \mu(S)$;
- 2) если S — множество меры 0, а функция f определена и ограничена на S , то f интегрируема и $\int_S f \, dx = 0$;
- 3) если S — измеримое множество, f интегрируема на S , $S' \subset S$ измеримо, то f интегрируема на S' ;
- 4) линейность интеграла: если функции f_1 и f_2 интегрируемы на измеримом множестве S , то для любых постоянных α_1 и α_2 функция $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ интегрируема на S и

$$\int_S (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) dx = \alpha_1 \int_S f_1 dx + \alpha_2 \int_S f_2 dx;$$

5) произведение интегрируемых на данном множестве функций интегрируемо. Отношение интегрируемых функций интегрируемо, если делитель не принимает значений в некоторой окрестности 0 (т.е. для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $|g(x)| \geq \varepsilon$);

6) аддитивность интеграла: если функция f интегрируема на измеримых непересекающихся (или пересекающихся по множеству меры 0) множествах S_1 и S_2 , то она интегрируема на $S = S_1 \cup S_2$ и

$$\int_S f \, dx = \int_{S_1} f \, dx + \int_{S_2} f \, dx;$$

7) свойство монотонности: Если f и g интегрируемы на S и всюду на S выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$, то $\int_S f \, dx \geq \int_S g \, dx$. В частности, интеграл от неотрицательной функции всегда имеет неотрицательное значение;

8) усиление предыдущего свойства: Если f и g интегрируемы на S и всюду на S выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$, причем существует внутренняя точка x множества S , в которой функции f и g непрерывны и удовлетворяют строгому неравенству $f(x) > g(x)$, то $\int_S f \, dx > \int_S g \, dx$;

9) теорема о среднем: если функции f и g интегрируемы на S , причем всюду на S функция g имеет одинаковый знак, а функция f удовлетворяет двойному неравенству $m \leq f(x) \leq M$, то существует такое число λ , $m \leq \lambda \leq M$, что

$$\int_S fg \, dx = \lambda \int_S g \, dx.$$

В частном случае $g(x) \equiv 1$ получаем формулу $\int_S f \, dx = \lambda \mu(S)$, где λ — **среднее значение функции f на множестве S** .

Все перечисленные свойства имеют аналоги для определенного интеграла. Однако свойство определенного интеграла, согласно которому интеграл меняет знак при перестановке пределов интегрирования, не распространяется на кратные интегралы.

Теорема 1.1. Если ограниченное множество S измеримо, а функция f определена и непрерывна на S , то она интегрируема на S .

◀ Изложим доказательство кратко. Пусть всюду на S функция удовлетворяет неравенству $|f(x)| \leq M$ (ограничена). Построим сетку, покрывающую множество S . Диаметр сетки определяется ее шагом, так как диаметр куба со стороной a равен $a\sqrt{n}$. Элементами разбиения будут кубы, целиком попавшие в S , и части кубов, накрываемых S лишь частично. Последние при достаточно малом шаге сетки имеют малый суммарный объем δS , так как S измеримо. Вклад этих частей в интегральную сумму мал и не превосходит $M\delta S$. Значит, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно выбрать такое δ , что при шаге сетки, меньшем δ , вклад неполных кубов сетки в интегральную сумму не будет превосходить, скажем, $\varepsilon/2$. Займемся остальными кубами. Множество $\underline{S}$, составленное из таких кубов, замкнуто и ограничено. Поэтому для выбранного ε существует такое число ν , что для любых точек $x_1, x_2 \in \underline{S}$, для которых $|x_1 - x_2| < \nu$, будет выполняться неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Тогда для любого разбиения с диаметром не более ν интегральная сумма может меняться в пределах интервала длины $\varepsilon\mu(\underline{S}) \leq \varepsilon\mu(S)$. Применение критерия Коши завершает доказательство. ▶

Замечание 1.1. Этот эскиз доказательства показывает главную трудность в теории кратных интегралов. Если в определенном интеграле интегрирование ведется по простейшему множеству — интервалу (ну, или отрезку), при построении интегральных сумм, интервал интегрирования также разбивается на простейшие составляющие, интервалы, то в случае кратного интеграла это не проходит. Дело в том, что даже на плоскости множество может быть очень причудливым, а интегрирование должно вестись не обязательно по прямоугольнику или многоугольнику. В случае одномерного интеграла, функция, непрерывная на интервале интегрирования может не иметь равномерной непрерывности только из-за поведения в конечных точках интервала. Две точки легко купировать. А уже в двумерном случае таких точек может быть бесконечно много.

Замечание 1.2. Интегрируемость функции на множестве зависит от мощности множества ее точек разрыва. Верен такой критерий интегрируемости. Функция интегрируема на ограниченном измеримом множестве S , если множество ее точек разрыва может быть накрыто конечным или счетным набором кубов (или n -мерных шаров) сколь угодно малого суммарного объема (такие множества называют множествами лебеговой меры 0). Этот критерий носит название критерия Лебега. Из него, в частности, следует, что функция интегрируема, если множество ее точек разрыва имеет меру 0 по Жордану, т.е. накрывается конечным набором кубов произвольно малого суммарного объема.

Лекция 2

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Повторные интегралы. Сведение кратного интеграла к повторному. Двойные и тройные интегралы, их вычисление.

Сложность вычисления кратного интеграла в первую очередь определяется формой области интегрирования. Мы сперва остановимся на двойных интегралах.

2.1. Двойной интеграл

Изучение вопроса начнем с простейшего двойного интеграла $\iint_P f(x, y) dx$, вычисляемого по прямоугольнику P , который задается неравенствами $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$.

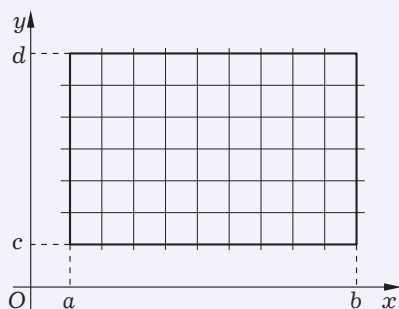


Рис. 2.1

Для построения интегральной суммы выберем разбиение, которое порождается разбиениями отрезка $[a, b]$ на интервалы Δx_i и отрезка $[c, d]$ на интервалы Δy_j (рис. 2.1). Элементами такого разбиения являются прямоугольники со сторонами Δx_i и Δy_j . Соответственно, интегральная сумма имеет вид:

$$S = \sum_{i,j} f(\xi_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Эту сумму проще всего вычислять, меняя индексы последовательно или, другими словами, по строкам или столбцам разбиения. Для определенности остановимся на способе суммирования по столбцам. Точки ξ_{ij} в прямоугольниках выберем так, что одному столбцу соответствует одинаковая абсцисса: $\xi_{ij} = (x_i, y_{ij})$. Тогда интегральная сумма примет вид:

$$S = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^q f(x_i, y_{ij}) \Delta y_j \right) \Delta x_i.$$

Внутренняя сумма — интегральная для интеграла от функции $f(x_i, y)$ одного переменного y (при фиксированном x_i) по отрезку $[c, d]$, которая соответствует разбиению этого отрезка на интервалы Δy_j . При достаточно мелком разбиении эта сумма близка к интегралу, а вся интегральная сумма ассоциируется с суммой

$$\hat{S} = \sum_{i=1}^p \left(\int_c^d f(x_i, y) dy \right) \Delta x_i.$$

Но сумма $\hat{S}$ в свою очередь является интегральной для интеграла по отрезку $[a, b]$ от функции

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

Поэтому в пределе, когда диаметр разбиения стремится к 0, мы приходим к интегралу

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx,$$

в котором для упрощения опускают скобки и записывают так:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

В этой формуле внутренний интеграл вычисляется при постоянном x , в результате чего получается функция одного переменного x , которая затем интегрируется уже по оставшейся переменной x . Эта формула представляет собой *повторный интеграл*.

Наши рассуждения не очень корректны, так как замена в двойной сумме внутренней суммы ее пределом — интегралом — не доказана. Однако точки ξ_{ij} можно подобрать так, что внутренняя сумма в S будет в точности равна соответствующему интегралу. Фиксируем абсциссы x_i . Тогда

$$\int_c^d f(x_i, y) dy = \sum_{j=1}^q \int_{\Delta y_j} f(x_i, y) dy = \sum_{j=1}^q f(x_i, y_{ij}) \Delta y_j,$$

где последнее равенство получено по теореме о среднем (в предположении непрерывности f).

Меняя местами порядок переменных, можем получить двойственную формулу:

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

Замечание. Если у функции $f(x, y)$ разделяются переменные: $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, то

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy = \left(\int_a^b f_1(x) dx \right) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right),$$

т.е. двойной интеграл распадается в произведение двух одномерных интегралов.

Замечание 2.1. Мы использовали непрерывность подинтегральной функции, однако это требование излишне: полученные формулы сведения двойного интеграла к повторному верны для любой интегрируемой функции.

Перейдем теперь к более общему случаю. Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, причем $\varphi(x) \leq \psi(x)$ при $a \leq x \leq b$. Область

$$G = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

является измеримой, если функции φ и ψ интегрируемы (почему?). Рассмотрим $I = \iint_G f(x, y) dx dy$ от какой-либо функции $f(x, y)$, определенной в G .

Обозначим через m минимальное значение функции φ , через M — максимальное значение функции ψ . Тогда область G целиком попадает в прямоугольник $P = [a, b] \times [m, M]$. Доопределим функцию f во всем прямоугольнике, полагая $f(x, y) = 0$ на множестве $P \setminus G$ (рис. 2.2). Доопределенную функцию обозначим $\hat{f}$. Эта функция интегрируема на P , так как множество ее точек разрыва — это множество

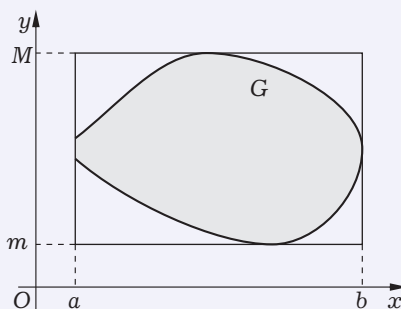


Рис. 2.2

точек разрыва функции f , дополненное некоторым подмножеством границы области G . Все вместе будет иметь лебегову меру 0.

Применим полученные ранее результаты к прямоугольнику P и функции $\hat{f}$. Получим:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_P \hat{f}(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_m^M \hat{f}(x, y) dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

Мы опять получили повторный интеграл, но в этот раз пределы интегрирования внутреннего интеграла не являются постоянными, а зависят от переменной внешнего интеграла. Соответствующие функции называют: φ — функция входа, ψ — функция выхода. Графики этих функций — это, соответственно, нижняя и верхняя части границы области G .

2.2. Общий случай

Подобно тому, как двойной интеграл сводится к повторному, состоящему из двух определенных интегралов, кратный n -мерный интеграл сводится к повторному, содержащему n определенных интегралов. Решающей здесь является следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть $G = E \times F$, где $E \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^m$. Если функция $f(x, y)$, $x \in E$, $y \in F$, интегрируема на множестве G , то

$$\int_G f(x, y) dx dy = \int_E dx \int_F f(x, y) dy = \int_F dy \int_E f(x, y) dx.$$

Замечание 2.2. Если функция f имеет точки разрыва, то может получиться так, что внутренний интеграл $\varphi(x) = \int_F f(x, y) dy$ (или двойственный ему) не будет существовать для некоторых значений x . Такие точки могут быть устранимыми точками разрыва $\varphi(x)$ и тогда их наличие не влияет на существование внешнего интеграла. Либо эти точки являются неустраиваемыми точками разрыва функции $\varphi(x)$, но по неявному утверждению теоремы таких точек мало (лебеговой меры 0 в $\mathbb{R}^n$).

Общий случай сводится к рассмотренному в теореме 2.1. В самом деле,

$$\int_G f(x, y) dx dy = \int_E dx \int_{F(x)} f(x, y) dy,$$

где E — проекция $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ на пространство $\mathbb{R}^n$, $F(x_0)$ — сечение множества G гиперплоскостью $x = x_0$.

2.3. Техника вычисления

Остановимся на практическом применении полученных результатов к вычислению кратных интегралов. Остановимся на случаях двойного и тройного интегралов.

Двойной интеграл. Мы уже рассмотрели случай, когда область ограничена графиками двух функций одного переменного и, возможно, отрезками двух вертикальных прямых (рис. 2.2). Такую область мы будем называть *стандартной*. В общем случае область может быть разделена на несколько стандартных и интеграл вычисляется с использованием свойства аддитивности интеграла.

Пример 2.1. Рассмотрим интеграл

$$\iint_{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4} (x + y)^2 dx dy$$

по кольцу G . Прямыми $x = -1$ и $x = 1$ кольцо разделяется на четыре стандартные области G_1, G_2, G_3, G_4 (рис. 2.3). Поэтому

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dx dy &= \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy + \iint_{G_3} f(x, y) dx dy + \iint_{G_4} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \\ &+ \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

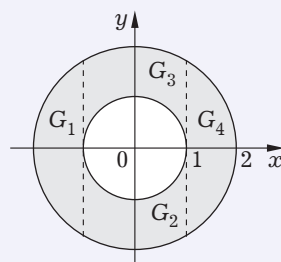


Рис. 2.3

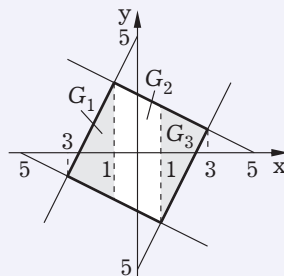


Рис. 2.4

Область интегрирования может быть формально стандартной, но функция входа (или функция выхода) составлена из нескольких функций, определенных на смежных интервалах. И в этом случае для вычисления интеграла нужно исходную область разделить на несколько простых.

Пример 2.2. В качестве области рассмотрим прямоугольник P со сторонами: $2x - y = 5$, $2x - y = -5$, $x + 2y = 5$, $x + 2y = -5$ (рис. 2.4). Графики функций входа и выхода составлены из двух отрезков каждый. Чтобы вычислить интеграл, можно провести две вертикальные прямые $x = -1$ и $x = 1$. В результате получим

$$\begin{aligned} \iint_P f(x, y) dx dy &= \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy + \iint_{G_3} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-3}^{-1} dx \int_{-0.5x-2.5}^{2x+5} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-0.5x-2.5}^{-0.5x+2.5} f(x, y) dy + \\ &+ \int_1^3 dx \int_{2x-5}^{-0.5x+2.5} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

Тройной интеграл. Применяем общую теорему 2.1. При этом E и F могут иметь, соответственно, размерности 1, 2 или 2, 1. Рассмотрим эти два случая

Пусть в $\mathbb{R}^3$ имеется множество G . Спроектируем его на ось Oz , получим отрезок $[a, b]$. Для каждого $z \in [a, b]$ построим сечение тела G плоскостью, параллельной координатной плоскости Oxy , которое зависит от выбранного z , обозначим его через $S(z)$. Тогда

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{S(z)} f(x, y, z) dx dy.$$

Внутренний двойной интеграл может быть превращен в повторный способом, описанным выше.

Пример 2.3. Рассмотрим интеграл по области G , ограниченной поверхностями $x^2 + y^2 - z^2 + 2z = 1$ и $z = 0$.

Описанное тело представляет собой конус с вершиной в точке $(0, 0, 1)$ и основанием, лежащим в плоскости Oxy . Оно описывается неравенствами $x^2 + y^2 \leq (z - 1)^2$ и $z \geq 0$. Проекция на ось Oz — это множество тех значений z , при которых система указанных неравенств разрешима относительно x и y . Убеждаемся, что проекция есть отрезок $[0, 1]$. Плоское множество $S(z)$ описывается неравенством $x^2 + y^2 \leq (z - 1)^2$, в котором z играет роль параметра. Таким образом,

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 dz \iint_{x^2 + y^2 \leq (z-1)^2} f(x, y, z) dx dy.$$

Внутренний интеграл берется по окружности с переменным радиусом $|z - 1|$. В данном случае функцией входа будет $\varphi(x) = -\sqrt{(1-z)^2 - x^2}$, а функцией выхода — $\psi(x) = \sqrt{(1-z)^2 - x^2}$. Окончательный результат:

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \int_{-\sqrt{(1-z)^2 - x^2}}^{\sqrt{(1-z)^2 - x^2}} f(x, y, z) dy.$$

Второй способ состоит в том, чтобы спроектировать тело на координатную плоскость, например, Oxy . Проекция представляет собой некоторое плоское множество S . Тогда согласно теореме 2.1

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_S dx dy \int_{I(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

где $I(x, y)$ — сечение тела G прямой, параллельной координатной оси Oz . В простейшем случае $I(x, y)$ — интервал, левый (нижний) конец которого в зависимости от x и y представляет собой функцию входа $\varphi(x, y)$, а правый (верхний) — функцию выхода $\psi(x, y)$. Получаем представление

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_S dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Если множество $I(x, y)$ для любой пары $(x, y) \in S$ представляет собой интервал (отрезок), то тело G называют *стандартным*. В общем случае тело можно разделить на несколько частей, являющихся стандартными, так же, как и в плоском случае. Деление тела на части может понадобиться и в случае, когда оно стандартное, но функции входа и выхода являются составными, т.е. задаются различными формулами в разных частях области определения.

Пример 2.4. Для интеграла из предыдущего примера проекцией на плоскость Oxy будет круг $x^2 + y^2 \leq 1$. Каждая точка (x, y) круга определяет сечение конуса по отрезку $0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, т.е. функция входа $\varphi(x, y) \equiv 0$, а функция выхода $\psi(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$. Поэтому

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} dx dy \int_0^{1 - \sqrt{x^2 + y^2}} f(x, y, z) dz = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{1 - \sqrt{x^2 + y^2}} f(x, y, z) dz.$$

В конечном счете за счет изменения порядка переменных двойной интеграл сводится к повторному двукратному, а тройной — шестикратному.

Лекция 3

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Замена переменных в кратном интеграле. Случай двойного и тройного интегралов. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах.

3.1. Двойной интеграл

Пусть у нас есть кратный интеграл $\int_G f \, dx$, вычисляемый по области (множеству) $G \subset \mathbb{R}^n$. Если имеется взаимно-однозначное отображение $\varphi : G \rightarrow S$ множества G на множество S , то как изменить интеграл при переходе с G на S ? Есть по крайней мере два основания для изучения вопроса. Во-первых, сложность вычисления кратного интеграла определяется в первую очередь видом области интегрирования. Если подходящим преобразованием исходную область G преобразовать в более простую область S (например, n -мерный параллелепипед), то вычисление интеграла может упроститься. Во-вторых, преобразование переменных может вызываться переходом к другой системе координат, например, от декартовой к полярной в двумерном случае. В одних случаях удобна одна система координат, а в других — другая. Свобода выбора определяется возможностью преобразования интеграла.

Рассмотрение начнем с простейшего двумерного случая. Пусть имеется прямоугольник $P = [a, b] \times [c, d]$, который в результате преобразования

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

сводится к некоторой области G . Рассмотрим двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области G .

Если преобразование является простейшим — линейным (аффинным): $\varphi(u, v) = \alpha u + \beta v$, $\psi(u, v) = \gamma u + \nu v$, — то область G , получающаяся в результате этого преобразования, будет параллелограммом. Функция $f(x, y)$ может быть выражена через переменные u и v : $f(x, y) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$, и мы могли бы составить интеграл $\iint_P f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \, dudv$ по исходному прямоугольнику. Однако этот интеграл не совпадает с исходным.

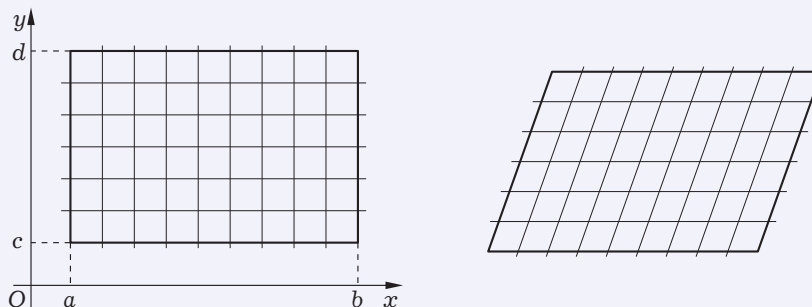


Рис. 3.1

Построим разбиение прямоугольника P на мелкие прямоугольники ΔP_{ij} , разбивая отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ на частичные интервалы точками x_i и y_j (рис. 3.1). При линейном преобразовании элементы разбиения ΔP_{ij} перейдут в параллелограммы ΔG_{ij} , образующие разбиение параллелограмма G . Интегральная сумма, соответствующая полученному разбиению G , имеет вид

$$\sigma = \sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij}) \mu(\Delta G_{ij}).$$

Она может быть преобразована в интегральную сумму для области P

$$\sigma = \sum_{i,j} f(\varphi(u_{ij}, v_{ij}), \psi(u_{ij}, v_{ij})) \left| \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \nu \end{array} \right| \mu(\Delta S_{ij}),$$

где определитель задает отношение площадей параллелограммов ΔG_{ij} к прямоугольникам ΔP_{ij} .

Переходя к пределу, в этом аффинном случае получим формулу

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \iint_S f(\alpha u + \beta v, \gamma u + \nu v) \left| \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \nu \end{array} \right| du dv$$

В общем случае мелкие прямоугольники разбиения будут преобразовываться в криволинейные фигуры (рис. 3.2). Криволинейные элементы ΔG_{ij} будут близки к параллелограммам, если шаг разбиения мал, а функции u и v определяют *диффеоморфизм*, т.е. взаимно однозначное отображение $P \rightarrow G$, которое в каждой точке имеет ненулевой якобиан. При этом то же верно и для обратного отображения. Локальная замена отображения (φ, ψ) линейным изменит элементы разбиения G , но незначительно. Если мы пренебрежем этой разницей, то получим: $\mu(\Delta G_{ij}) \approx J_{ij} \mu(\Delta P_{ij})$, где J_{ij} — якобиан, вычисляемый в некоторой точке ΔP_{ij} . В пределе можно ожидать получения формулы

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_P f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{array} \right| du dv, \quad (3.1)$$

в которой якобиан вычисляется в точке с координатами (u, v) .

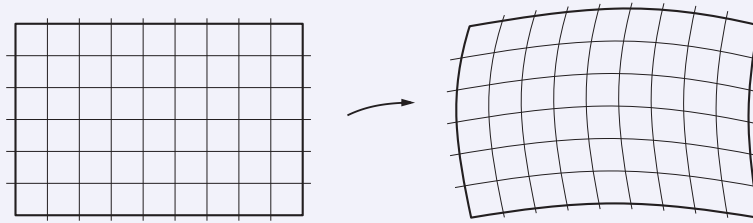


Рис. 3.2

Чтобы формула была верна, замена $\mu(\Delta G_{ij})$ на $J_{ij} \mu(\Delta P_{ij})$ должна иметь ошибку, являющуюся бесконечно малой более высокого порядка, чем $\mu(\Delta P_{ij})$. Чтобы избавиться от утомительных оценок (детали — в трехтомнике Кудрявцева), используем „обходной маневр“.

Предположим, что диффеоморфизм (φ, ψ) распространяется на некоторую окрестность $O(P)$ области интегрирования P в переменных (u, v) , которая отображается им в окрестность $U(G)$ области G . Тогда мы могли бы при необходимости расширить область G , заменяя ее более простой. Например, если покрыть P мелкой сеткой, тогда интеграл по P сводится к сумме интегралов по ячейкам сетки. По ячейкам сетки, накрываемым областью частично, можно брать полный интеграл, доопределяя функцию нулем.

Второе важное следствие — сведение диффеоморфизма произвольного вида к специальному. Остановимся на этом подробнее.

Якобиан $J(u, v)$, соответствующий диффеоморфному преобразованию $(u, v) \rightarrow (x, y)$, где $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, отличен от 0. Это значит, что одна из частных производных φ'_u и φ'_v , совместно образующих первую строку определителя, не равна 0. Пусть $\varphi'_u(u, v) \neq 0$. Тогда для пары функций $(\varphi(u, v), v)$ якобиан в точке (u, v) отличен от 0 и по теореме об обратной функции отображение $(u, v) \rightarrow (x, v)$, $x = \varphi(u, v)$, в некоторой окрестности точки (u, v) является диффеоморфизмом (локальным диффеоморфизмом). Соответствие $(x, v) \rightarrow (x, y)$ также является локальным диффеоморфизмом как композиция двух диффеоморфизмов. Таким образом, преобразование $(x, y) \rightarrow (u, v)$ можно представить как композицию двух простых: $(u, v) \rightarrow (x, v) \rightarrow (x, y)$.

Таким образом, нам необходимо проверить формулу только для простого (элементарного) диффеоморфизма, например, $(u, v) \rightarrow (x, v)$, где $x = \varphi(u, v)$, и для простейшей области P — прямоугольника. Условие диффеоморфности означает, что всюду в P $\varphi'_u(u, v) \neq 0$, а это равносильно монотонности

$\varphi(u, v)$ по переменной u . Отрезок, получающийся сечением P прямой $v = \text{const}$, перейдет в отрезок $[u(a, v), u(b, v)]$ той же прямой. Область G будет ограничена прямыми $v = c$, $v = d$ и графиками функций $\varphi(a, v)$, $\varphi(b, v)$, т.е. будет стандартной.

По материалам лекции 2 и свойствам определенного интеграла:

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, v) dx dv &= \int_c^d dv \int_{\varphi(a, v)}^{\varphi(b, v)} f(x, v) dx = \left| \begin{array}{c} \text{замена} \\ x = \varphi(u, v) \end{array} \right| = \\ &= \int_c^d dv \int_a^b f(\varphi(u, v), v) \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} du = \iint_P f(\varphi(u, v), v) \left| \begin{array}{cc} \varphi'_u(u, v) & \varphi'_v(u, v) \\ 0 & 1 \end{array} \right| dudv. \end{aligned}$$

Выкладка верна, если всюду в прямоугольнике P производная φ'_u положительна (так как она не обращается в 0, то сохраняет знак). Если же эта производная отрицательна, то в повторных интегралах следует переставить внутренние пределы.

Отметим, что в общем случае преобразование $(u, v) \rightarrow (x, y)$ является композицией двух, а по теореме о сложной функции многих переменных матрица Якоби представляется в виде:

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y_x & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(частная производная y_x — это производная сложной функции $\psi(\lambda(x, v), v)$ по x , где $\lambda(x, v)$ — это решение уравнения $\varphi(u, v) = x$ относительно u , являющееся функцией переменных x и v). Произведению матриц соответствует произведение определителей, и мы окончательно получаем формулу (3.1).

3.2. Произвольный кратный интеграл

Все рассуждения переносятся на общий n -мерный случай. Сформулируем окончательный результат.

Теорема 3.1. Пусть $\varphi : O \rightarrow U$ — диффеоморфизм из открытого ограниченного множества $O \subset \mathbb{R}^n$ в открытое ограниченныйное множество $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{P} \subset O$, $\bar{G} \subset U$ и $\varphi(P) = G$. Если функция f определена на G и интегрируема, то функция $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ определена и интегрируема на P , причем

$$\int_G f dx = \int_P (f \circ \varphi)|\det \varphi'| du$$

Замечание 3.1. Векторная переменная x пробегает область G , а переменная u — область P . Обозначение φ' использовано для полной производной отображения φ , которая представляет собой матрицу Якоби.

3.3. Полярные координаты

Пример использования полученных результатов — вычисление двойного интеграла в полярных координатах. Полярные координаты (r, φ) связаны с декартовыми формулами:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (3.2)$$

Если рассматривать преобразование $(r, \varphi) \rightarrow (x, y)$ как диффеоморфизм, то

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_P f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi,$$

где r — якобиан отображения (3.2) в точке (r, φ) .

Предположим, что область G описана в полярных координатах неравенствами $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)$. Тогда

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

3.4. Цилиндрические и сферические координаты

Цилиндрические координаты могут интерпретироваться как замена декартовых координат (x, y) соответствующими им полярными (r, φ) . Соответствующий якобиан равен r .

Пример 3.1. Рассмотрим интеграл от некоторой функции $f(x, y, z)$ по конусу, ограниченному поверхностями: $x^2 + y^2 = (z - 1)^2$, $z = 0$.

Первый шаг — это разложение тройного интеграла в повторный из двойного и одномерного. Он выполняется обычным образом:

$$I = \iiint_K f dx dy dz = \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leq (1-z)^2} f dx dy.$$

Теперь во внутреннем двойном интеграле расставляются пределы в полярных координатах:

$$I = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1-z} f r dr$$

Возможен и второй вариант:

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^{1-r} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz.$$

Формулы преобразования сферических координат в декартовы имеют вид:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \vartheta \\ y = r \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = r \cos \vartheta \end{cases}$$

Прямым подсчетом находим выражение для якобиана этого преобразования:

$$J(r, \varphi, \vartheta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \sin \vartheta & r \sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \vartheta & 0 & -r \sin \vartheta \end{vmatrix} = -r^2 \sin \vartheta.$$

Пример 3.2. Рассмотрим в качестве тела интегрирования конус K , ограниченный поверхностями $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$. В сферической системе координат область описывается неравенствами $\vartheta \leq \frac{\pi}{4}$, $r \cos \vartheta \leq 1$. Поэтому

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \int_0^{\frac{1}{\cos \vartheta}} r^2 \sin \vartheta dr.$$

Лекция 4

ПРИЛОЖЕНИЯ

КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Геометрические приложения двойного и тройного интегралов. Площади и объемы. Механические приложения кратных интегралов. Масса неоднородного тела, координаты центра тяжести, статические моменты, моменты инерции.

4.1. Площадь

Площадь плоской области G вычисляется с помощью двойного интеграла по этой области от функции, равной 1:

$$\mu(G) = \iint_G dx dy.$$

Использование двойного интеграла является более сильным методом, чем различные способы на основе определенного интеграла. В качестве иллюстрации получим некоторые формулы.

Если G — это криволинейная трапеция, т.е. область, заданная неравенствами $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$, то

$$S = \iint_G dx dy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x) dx.$$

Если область представляет собой криволинейный сектор, т.е. ограничена лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $r = r(\varphi)$, то площадь этой фигуры легко вычисляется двойным интегралом в полярных координатах:

$$S = \iint_G dx dy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{r(\varphi)} r dr = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi.$$

Пример 4.1. Вычислить площадь, заключенную между кривыми $xy = 1$, $xy = 2$ и прямыми $x - 2y = 0$, $2x - y = 0$.

Область описывается неравенствами $1 \leq xy \leq 2$ и $0.5 \leq y/x \leq 2$. В качестве новых параметров следует выбрать переменные $u = xy$ и $v = y/x$. Тогда в новой системе координат (u, v) область будет прямоугольником: $1 \leq u \leq 2$, $0.5 \leq v \leq 2$. Поэтому

$$S = \iint_S dx dy = \int_1^2 du \int_{0.5}^2 J(u, v) dv,$$

где $J(u, v)$ — якобиан. Для его вычисления выражаем переменные x и y через u и v :

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \\ y = \sqrt{uv}, \end{cases}$$

после чего находим:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Теперь получаем окончательный результат:

$$S = \int_1^2 du \int_{0.5}^2 \frac{dv}{2v} = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 0.5) = \ln 2.$$

4.2. Объем

Вычисление объемов аналогично вычислению площадей. Выигрыш от применения тройного интеграла при этом еще ощутимее.

Предположим, что тело G имеет простые сечения горизонтальными плоскостями (т.е. параллельными Oxy). Спроектируем G на ось Oz , тогда

$$V = \iiint_V dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{S(z)} dx dy = \int_a^b S(z) dz.$$

Мы как следствие получили формулу объема по площадям параллельных сечений. Если ось Oz является осью вращения, то $S(z)$ — это площадь круга, и мы получаем формулу для объема тела вращения.

Предположим, что тело ограничено цилиндрической поверхностью $\varphi(x, y) = 0$ и графиком некоторой функции $z = f(x, y)$, определенной внутри плоской области, высекаемой на Oxy цилиндрической поверхностью. Тогда объем можно вычислять так:

$$V = \iint_S dx dy \int_0^{f(x,y)} dz = \iint_S f(x, y) dx dy.$$

Описанное тело называют **цилиндромидом**. Объем цилиндроида можно трактовать как геометрический смысл двойного интеграла: цилиндромид является аналогом криволинейной трапеции.

Пример 4.2. Вычислим объем шара радиуса R . Он описывается неравенством $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Переходя в сферические координаты, получаем

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^R r^2 dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

4.3. Механические приложения

Кратные интегралы могут применяться для вычисления различных механических и физических величин.

На основании *плотности* может быть вычислена *масса* объемного тела. Если положение точек описывается их декартовыми координатами в пространстве, а плотность задается как функция трех переменных $\rho(x, y, z)$, то масса тела будет определяться интегралом

$$\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Важной характеристикой твердого тела в механике является его **центр тяжести**. В случае, когда тело представляет собой конечную совокупность материальных точек $P_i(x_i, y_i, z_i)$ с массами m_i , то координаты центра тяжести вычисляются по формулам:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i m_i}{M} \quad \bar{y} = \frac{\sum_i y_i m_i}{M} \quad \bar{z} = \frac{\sum_i z_i m_i}{M}$$

(M — общая масса тела). Аналогом этих формул в случае протяженного (непрерывного) тела будут формулы

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_V y \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_V z \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

где ρ — плотность протяженного тела, M — масса. Три интеграла, определяющие координаты центра тяжести называют **статическими моментами** твердого тела.

В теории вращения твердого тела важную роль играет момент инерции тела. Для системы материальных точек момент инерции относительно, например, оси Oz вычисляется по формуле

$$I_z = \sum_i (x_i^2 + y_i^2) m_i.$$

Его аналогом для протяженного тела является величина

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

где ρ — плотность твердого тела. Дополнительно рассматривают **моменты инерции относительно координатных плоскостей**:

$$I_{yz} = \iiint_V x^2 \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad I_{xz} = \iiint_V y^2 \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad I_{xy} = \iiint_V z^2 \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

С помощью этих величин можно вычислить моменты инерции относительно координатных осей: $I_x = I_{xy} + I_{xz}$, $I_y = I_{xy} + I_{yz}$, $I_z = I_{xz} + I_{yz}$. **Момент инерции относительно начала координат** — это сумма трех моментов инерции относительно координатных плоскостей.

4.4. Плоский случай

В специальном случае, когда участвующие в вычислениях функции не зависят от одного из переменных, могут применяться формулы на основе двойного интеграла. Рассмотрим цилиндрическое тело G , описываемое соотношением $G = S \times [a, b]$, $S \subset \mathbb{R}^2$. Если, например, плотность такого тела не меняется вдоль оси Oz , то вычисление его массы приводит к двойному интегралу:

$$\iiint_G \rho(x, y) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_S \rho(x, y) dx dy = (b - a) \iint_S \rho(x, y) dx dy.$$

К двойным интегралам мы приходим и в случае, когда тело представляет собой тонкую пластинку, т.е. находится в узкой полосе пространства. В этом случае можно пренебречь изменением толщины тела, т.е. считать его цилиндром малой высоты, и изменением плотности вдоль толщины.

Лекция 5

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Кратные несобственные интегралы. Абсолютная сходимость. Интегралы, зависящие от параметра.
Пример: вычисление интеграла Пуассона.

Определение 5.1. *Исчерпанием множества* $G \subset \mathbb{R}^n$ *называют любую последовательность измеримых множеств* E_n , *для которой* $E_i \subset E_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$, *и* $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = G$.

Определение 5.2. Пусть функция f определена на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ и интегрируема на измеримых ограниченных подмножествах в G . Если для каждого исчерпания $\{E_i\}$ множества G существует предел

$$I = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{E_i} f(x) dx,$$

причем его значение не зависит от выбора исчерпания, то этот предел называют *несобственным интегралом* функции f по множеству G . Обозначение:

$$\int_G f(x) dx = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{E_i} f(x) dx.$$

Если несобственный интеграл существует, то также говорят, что он *сходится*, в противном случае, что он *расходится*.

Техника исчерпания используется при построении интеграла по неограниченной области или по области, в которой функция неограничена. Предположим, что множество G является ограниченным и измеримым, а функция f определена на G и ограничена. Тогда можно говорить об интеграле в обычном смысле слова (о *собственном интеграле*). Можно также взять какое-либо исчерпание множества и определить несобственный интеграл. Совпадают ли эти интегралы?

Теорема 5.1. Если $\{E_i\}$ — исчерпание измеримого множества G , то:

- $\mu(E_i) \rightarrow \mu(G)$ при $i \rightarrow \infty$;
- Если функция f интегрируема на G , то f интегрируема на каждом множестве E_i и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{E_i} f(x) dx = \int_G f(x) dx.$$

◀ Как уже отмечалось, площадь множества не зависит от того, как мы заполняем это множество: строим ли регулярную сетку, вписываем ли многоугольники той или иной формы. Введенное нами понятие исчерпания — еще один способ получения площади множества. Это объясняет (но не доказывает) свойство а).

Свойство б) почти сразу же следует из а). В самом деле, если функция f интегрируема по множеству G , то она обязана согласно определению интегрируемости быть ограниченной: $|f(x)| \leq C$. Поэтому при $i \rightarrow \infty$

$$\left| \int_G f(x) dx - \int_{E_i} f(x) dx \right| = \left| \int_{G \setminus E_i} f(x) dx \right| \leq \int_{G \setminus E_i} |f(x)| dx \leq \int_{G \setminus E_i} C dx \leq C \mu(G \setminus E_i) \rightarrow 0. \quad \blacktriangleright$$

5.1. Интеграл от неотрицательной функции

Интеграл от неотрицательной функции по своим свойствам близок определенному (одномерному) несобственному интегралу. Дело в том, что если множество G исчерпывается множествами E_i , то последовательность интегралов $\int_{E_i} f(x) dx$ является возрастающей и потому имеет предел, конечный или бесконечный. Оказывается, что этот предел вообще не зависит от выбора исчерпания области, а сходимость интеграла равносильна тому, что конечен предела последовательности интегралов.

Теорема 5.2. Если $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$, неотрицательна, $\{E_i\}$ и $\{E'_i\}$ — два исчерпания множества G , причем f интегрируема на каждом элементе каждого из исчерпаний, то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{E_i} f(x) dx = A = B = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{E'_i} f(x) dx$$

где A и B — числа или символы ∞ .

◀ Положим

$$I_k = \int_{E_k} f dx, \quad I'_k = \int_{E'_k} f dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Нам достаточно показать, что для любых двух исчерпаний E_k , E'_k и любого номера k

$$I = \lim_{l \rightarrow \infty} I_l \geq I'_k.$$

Так как слева стоит число, то отсюда немедленно следует, что

$$I \geq \lim_{k \rightarrow \infty} I'_k = I'.$$

В силу симметрии должно выполняться и обратное неравенство, т.е. на самом деле $I = I'$.

Фиксируем номер k и обозначим $F_l = E_l \cap E'_k$, $k = 1, 2, \dots$ Тогда последовательность $\{F_l\}$ является исчерпанием измеримого множества E'_k , на котором функция f интегрируема. Согласно теореме 5.1 имеем

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{F_l} f dx = \int_{E'_k} f dx,$$

откуда, в силу включений $F_l \subset E_l$, $l = 1, 2, \dots$,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{E_l} f dx \geq \int_{E'_k} f dx,$$

что и требовалось доказать. ▶

Теорема 5.3 (признак сравнения). Пусть функции f и g определены на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, причем $0 \leq f(x) \leq g(x)$ на G .

- Если $\int_G g(x) dx$ сходится, то и $\int_G f(x) dx$ сходится.
- Если $\int_G f(x) dx$ расходится, то и $\int_G g(x) dx$ расходится.

Доказательство этой теоремы в точности повторяет доказательство аналогичной теоремы для несобственного одномерного интеграла.

5.2. Абсолютная сходимость

Теорема 5.4. Если $\int_G |f(x)| dx$ сходится, то и $\int_G f(x) dx$ сходится.

◀ И в этом случае ничего нового. Достаточно рассмотреть неотрицательные функции $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ и $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. Тогда $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$. Из

интегрируемости функции $|f(x)|$ следует интегрируемость функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$, что в свою очередь приводит к заключению об интегрируемости $f(x)$. ►

Интеграл $\int_G f(x) dx$ называется *сходящимся абсолютно*, если сходится интеграл $\int_G |f(x)| dx$. Как говорит теорема 5.4, абсолютная сходимость — более жесткое условие, чем простая сходимость. Оба понятия встречаются в теории несобственных одномерных интегралов, в рядах.

Неожиданным является то, что для кратных интегралов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Теорема 5.5. Если $\int_G f(x) dx$ сходится, то и $\int_G |f(x)| dx$ сходится.

Сформулированное свойство — результат требования, чтобы предел последовательности собственных интегралов не зависел от выбора способа исчерпания области интегрирования. В самом деле, пусть у нас есть две последовательности измеримых не пересекающихся областей: E_i , в которых функция f положительна, и F_j , в которых она отрицательна. Исчерпание можно строить, добавляя последовательно множества E_i и F_j . Если суммарный интеграл по множествам E_i расходится, то выбирая в первую очередь именно их, мы можем получить бесконечный предел. Значит, интеграл по $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ от f сходится, т.е. сходится интеграл по G от функции f_+ . Отсюда делаем вывод, что и f_- интегрируема на G , что приводит к нужному утверждению. Это всего лишь эскиз доказательства. Приведем строгое рассуждение.

◀ Предположим, что $\int_G |f(x)| dx$ расходится. В дальнейшем для краткости будем обозначать

$$I(F) = \int_F f dx, \quad |I|(F) = \int_F |f| dx.$$

Кроме того, введем функции $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$, так что $f = f_+ - f_-$ и $|f| = f_+ + f_-$. Интегралы от введенных функций будем обозначать так:

$$I_+(F) = \int_F f_+ dx, \quad I_-(F) = \int_F f_- dx.$$

Выберем некоторое исчерпание $\{E_k\}$, для которого $|I|(E_k) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Мы это исчерпание можем проредить так, что на самом деле выполняется более сильное утверждение, а именно: $|I|(E_{k+1}) > 3|I|(E_k) + 2k$. Обозначим $F_k = E_{k+1} \setminus E_k$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда $|I|(F_k) = |I|(E_{k+1}) - |I|(E_k) \geq 2|I|(E_k) + 2k$. Для каждого номера k либо $I_+(F_k)$ превышает $I_-(F_k)$, либо наоборот. Пусть для определенности $I_+(F_k) \geq I_-(F_k)$. Тогда $I_+(F_k) \geq 0.5|I|(F_k) \geq |I|(E_k) + k$. Пусть F_k^+ обозначает подмножество всех точек $x \in F_k$, в которых $f(x) > 0$. Тогда $I(F_k^+) = I_+(F_k) \geq |I|(E_k) + k$. Если $D_k = E_k \cup F_k^+$, то $I(D_k) = I(E_k) + I(F_k^+) \geq I(E_k) + |I|(E_k) + k \geq k$.

В случае, если $I_+(F_k) \leq I_-(F_k)$, мы полагаем $D_k = E_k \cup F_k^-$, где F_k^- — множество всех точек $x \in F_k$, в которых $f(x) < 0$. Тогда оценка будет иметь вид $I(D_k) \leq -k$. В любом случае получаем расходящуюся последовательность $I(D_k)$. Множества D_k удовлетворяют соотношениям $E_k \subset D_k \subset E_{k+1}$ и потому являются исчерпанием множества G .

Для завершения доказательства осталось устранить одну неточность. Дело в том, что указанные нами множества F_k^+ (или F_k^-) могут не быть измеримыми по Жордану. Поэтому вместо них надо выбирать близкие к ним множества. Отметим, что функция f_+ интегрируема на множестве F_k . Поэтому можно выбрать настолько мелкое разбиение T_i для F_k , что интегральная сумма для f_+ будет отличаться от значения интеграла на малую величину. Это значит, что независимо от выбора точек ξ_i в T_i

$$\left| \sum_i f_+(\xi_i) \mu(T_i) - I_+(F_k) \right| \leq \varepsilon.$$

Положим, что F_k^+ — это объединение тех элементов T_i разбиения, во всех точках которых $f(x) \geq 0$. В элементах T_i выберем точки ξ_i , в которых функция f принимает минимальное значение (т.е. $f_+(\xi_i) = 0$,

если T_i не принадлежит F_k^+). Тогда

$$I_+(F_k^+) \geq \sum_{T_i \subset F_k^+} f_+(\xi_i) \mu(T_i) \geq \sum_i f_+(\xi_i) \mu(T_i) \geq I_+(F_k) - \varepsilon.$$

Осталось предварительно выбрать ε так, чтобы было $I_+(F_k^+) > 0$, например, $\varepsilon = 0.5I_+(F_k)$. ►

5.3. Расстановка пределов в несобственных интегралах

Поскольку несобственный интеграл строится как двукратный переход к пределу (сперва от интегральной суммы к интегралу, а затем к неограниченному множеству), при переходе к повторному интегралу могут появиться трудности.

Рассмотрим простейший пример двойного интеграла $\iint_G f(x, y) dx dy$ по прямоугольной неограниченной области $G = [a, b] \times [c, +\infty)$. Это значит, что для любого исчерпания E_k области G существует предел последовательности $\iint_{E_k} f dx dy$. В качестве исчерпания рассмотрим последовательность прямоугольников $E_k = [a, b] \times [c, c+k]$. Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{E_k} f(x, y) dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_c^{c+k} dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_c^\infty dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

При другом порядке переменных:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b dx \int_c^{c+k} f(x, y) dy = \iint_G f(x, y) dx dy.$$

Для получения нужного равенства требуется перейти к пределу под знаком интеграла, т.е. нужно выяснить, при каких условиях верно равенство

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi(x, T) dx = \int_a^b \lim_{T \rightarrow +\infty} \varphi(x, T) dx$$

Основная проблема состоит в том, что из сходимости двойного интеграла $\iint_G f(x, y) dx dy$ не следует сходимость несобственного определенного интеграла $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$. Он вполне может расходиться при некоторых значениях x . Поэтому возникает вопрос о сходимости внешнего интеграла. Если эти проблемы разрешаются, то двойной интеграл будет равен соответствующему повторному интегралу.

О переходе к пределу под знаком интеграла скажем позже. Отметим лишь, что проблемы с существованием повторного интеграла снимаются, если интеграл понимать в более широком смысле как *интеграл Лебега*.

5.4. Замена переменных в несобственном интеграле

Для несобственных интегралов верна формула замены переменных.

Теорема 5.6. Пусть $\varphi : F \rightarrow G$ — диффеоморфизм открытого множества $F \subset \mathbb{R}^n$ на открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$. Если $\int_F f(x) dx$ сходится, то и $\int_G (f \circ \varphi) |\det \varphi'| dt$ сходится и значения этих интегралов совпадают.

Пример 5.1. Рассмотрим интеграл

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Вывод:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Пример 5.2. Задача Исследуйте на сходимость

$$\iint_{|x|+|y|\geq 1} \frac{dxdy}{|x|^p + |y|^p}.$$

5.5. Интегралы, зависящие от параметра

Пусть функция $f(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^m$, задана на множестве $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Пусть для каждого t_0 сечение $E_x(t_0) = E \cap \{t = t_0\} = \{(x, t) \in E : t = t_0\}$ является измеримым множеством, на котором функция $f(x, t_0)$ интегрируема. Тогда на множестве E_t , являющемся проекцией E в $\mathbb{R}^m$ определена функция

$$F(t) = \int_{E_x(t)} f(x, t) dx, \quad (5.1)$$

которую называют *интегралом, зависящим от параметра*. При $n = 1$ этот интеграл называют *определенным*, иначе — *кратным*. Если для каждого $t \in E_t$ интеграл (5.1) является собственным, то интеграл с параметром называют *собственным*, иначе — *несобственным*.

В теории интегралов, зависящих от параметра, важнейший вопрос состоит в том, когда операции, выполняемые по переменной t (интегрирование, дифференцирование, переход к пределу), могут переставляться с интегрированием по переменной x . Это достаточно большой раздел, и мы не претендуем на его подробное изложение. Мы остановимся на частном случае, когда $t \in \mathbb{R}$, а все множества $E_x(t)$ совпадают, т.е. $E = E_x \times E_t$, $E_x \subset \mathbb{R}^n$, $E_t \subset \mathbb{R}$.

Собственные интегралы с параметром. Пусть множество E_x представляет собой ограниченное измеримое множество. Тогда интеграл

$$\int_{E_x} f(x, t) dx$$

является собственным. Если E_t — это отрезок $[a, b]$, то множество E является измеримым и потому для ограниченной непрерывной функции $f(x, t)$ определен интеграл

$$\int_E f(x, t) dx dt,$$

который легко сводится к повторному:

$$\int_E f(x, t) dx dt = \int_a^b dt \int_{E_x} f(x, t) dx = \int_{E_x} dx \int_a^b f(x, t) dt.$$

С обозначением (5.1) получаем

$$\int_a^b F(t) dt = \int_{E_x} \left(\int_a^b f(x, t) dt \right) dx.$$

Таким образом, интегрирование по параметру перестановочно с другим интегралом.

Пусть функция $f(x, t)$ имеет непрерывные частные производные. Если $\varphi(x, t) = f'_t(x, t)$, то

$$f(x, t) = f(x, a) + \int_a^t \varphi(x, t) dt.$$

Применяя к функции $\varphi(x, t)$ правило перестановки интегралов, получим

$$\int_a^t dt \int_{E_x} \varphi(x, t) dx = \int_{E_x} dx \int_a^t \varphi(x, t) dt = \int_{E_x} (f(x, t) - f(x, a)) dx = \int_{E_x} f(x, t) dx - \int_{E_x} f(x, a) dx.$$

Дифференцируя полученное соотношение по t , получим

$$\int_{E_x} f'_t(x, t) dx = \int_{E_x} \varphi(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{E_x} f(x, t) dx$$

или

$$\frac{d}{dt} \int_{E_x} f(x, t) dx = \int_{E_x} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx.$$

Для непрерывнодифференцируемой функции операция дифференцирования по параметру может быть внесена под интеграл (перестановочна с интегралом).

Остановимся на вопросе предельного перехода в интеграле с параметром, т.е. на справедливости формулы

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) dx. \quad (5.2)$$

Пусть для каждого значения t из окрестности $O(t_0)$ параметра t_0 интеграл

$$\int_a^b f(x, t) dx$$

сходится. Пусть существует предел

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = \varphi(x).$$

Формула (5.2) означает перестановку двух пределов местами: по t и по x при переходе от интегральной суммы к интегралу. Основанием для такой перестановки является *равномерная сходимость*.

Определение 5.3. Пусть функция $f(x, t)$ определена на множестве $G = X \times O(t_0)$. Говорят, что $f(x, t)$ *равномерно сходится* к $\varphi(x)$ на множестве X при $t \rightarrow t_0$, если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \sup_{x \in X} |f(x, t) - \varphi(x)| = 0.$$

Обозначение: $f(x, t) \xRightarrow{X} \varphi(x), t \rightarrow t_0$.

Равномерная сходимость — более жесткое требование, чем сходимость $f(x, t)$ к $\varphi(x)$ для каждого значения $x \in X$. На языке „ ε - δ “ равномерная сходимость означает, что выбор δ не зависит от x .

В повторном пределе

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$$

пределы можно переставить местами в случае, когда один из них является равномерным (например, если $f(x, y) \xRightarrow{O(x_0)} \varphi(x)$ при $y \rightarrow y_0$).

Несобственные интегралы с параметром. Рассмотрим функцию $f(x, t)$, определенную на множестве $[c, +\infty) \times T$. Пусть несобственный интеграл

$$\int_c^{+\infty} f(x, t) dx \quad (5.3)$$

сходится для каждого $t \in T$.

Определение 5.4. Говорят, что несобственный интеграл (5.3) *сходится на множестве T равномерно*, если

$$\sup_{t \in T} \left| \int_C^{+\infty} f(x, t) dx \right| \rightarrow 0$$

при $C \rightarrow +\infty$.

Равномерная сходимость позволяет менять порядок операций по переменным.

Теорема 5.7. Если интеграл (5.3) сходится равномерно на множестве $T = [a, b]$, то

$$\int_a^b dt \int_c^{+\infty} f(x, t) dx = \int_c^{+\infty} dx \int_a^b f(x, t) dt.$$

Теорема 5.8. Если функция $f(x, t)$ имеет кусочно-непрерывную частную производную $f'_t(x, t)$ в области $[c, +\infty] \times [a, b]$, интегралы (5.3) и

$$\int_c^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx \quad (5.4)$$

сходятся на множестве $T = [a, b]$ равномерно, то

$$\frac{d}{dt} \int_c^{+\infty} f(x, t) dx = \int_c^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx. \quad (5.5)$$

◀ Так как

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b dt \int_c^{+\infty} f(x, t) dx - \int_c^{+\infty} dx \int_a^b f(x, t) dt \right| = \left| \int_a^b dt \int_c^{+\infty} f(x, t) dx - \int_a^b dt \int_c^C f(x, t) dx \right| = \\ & = \left| \int_a^b \left(\int_c^{+\infty} f(x, t) dx - \int_c^C f(x, t) dx \right) dt \right| \leq \int_a^b \left| \int_C^{+\infty} f(x, t) dx \right| dt \leq (b-a) \sup_{t \in [a, b]} \left| \int_C^{+\infty} f(x, t) dx \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $C \rightarrow +\infty$, теорема 5.7 доказана.

В условиях теоремы 5.8, обозначив $f'_t(x, t) = \varphi(x, t)$, получим

$$f(x, t) = f(x, a) + \int_a^t \varphi(x, t) dt.$$

Поэтому, применяя теорему 5.7, получим

$$\int_c^{+\infty} f(x, t) dx = \int_c^{+\infty} f(x, a) dx + \int_c^{+\infty} dx \int_a^t \varphi(x, t) dt = \int_c^{+\infty} f(x, a) dx + \int_a^t dt \int_c^{+\infty} \varphi(x, t) dx.$$

Дифференцируя полученное равенство по t , получим

$$\frac{d}{dt} \int_c^{+\infty} f(x, t) dx = \int_c^{+\infty} \varphi(x, t) dx,$$

что равносильно (5.5). ▶

Условие равномерной сходимости несобственного интеграла необходимо проверять при каждой перестановке операций. Приведем два достаточных условия, гарантирующих равномерную сходимость.

Теорема 5.9 (Признак Вейерштрасса). Если $|f(x, t)| \leq \varphi(x)$, $t \in T$, причем несобственный интеграл

$$\int_c^{+\infty} \varphi(x) dx \quad (5.6)$$

от неотрицательной функции $\varphi(x)$ сходится, то интеграл (5.3) сходится на T равномерно.

◀ Если интеграл (5.6) сходится, то интеграл (5.3) сходится при любом t абсолютно по признаку сравнения. Кроме того,

$$\int_C^{+\infty} \varphi(x) dx \rightarrow 0$$

при $C \rightarrow +\infty$. Поэтому

$$\sup_{t \in T} \left| \int_C^{+\infty} f(x, t) dx \right| \leq \sup_{t \in T} \int_C^{+\infty} |f(x, t)| dx \leq \int_C^{+\infty} \sup_{t \in T} |f(x, t)| dx \leq \int_C^{+\infty} \varphi(x) dx \rightarrow 0$$

при $C \rightarrow +\infty$. ▶

Теорема 5.10. Пусть функция $f(x, t)$ неотрицательна и непрерывна в области $G = [c, +\infty) \times [a, b]$ и интеграл (5.3) сходится для любого $t \in [a, b]$, причем получаемая при этом функция $I(t)$ является непрерывной на $[a, b]$. Тогда интеграл (5.3) сходится равномерно на $[a, b]$.

Лекция 6

КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Масса неоднородной нити. Криволинейный интеграл 1-го рода. Задача о работе переменной силы на криволинейном пути. Криволинейный интеграл 2-го рода. Свойства криволинейных интегралов. Способы вычисления криволинейных интегралов.

6.1. Криволинейный интеграл 1-го рода

Предположим, что механическая система представляет собой массу, распределенную по некоторой кривой (тяжелая нить). Распределение массы задано линейной плотностью $\rho(P)$, представляющей собой количество массы на единицу длины кривой (рис. 6.1). Чтобы вычислить общую массу, необходимо разбить кривую на n частей точками $A = P_0, P_1, \dots, P_n = B$ (точки A и B — концы кривой). Считая плотность на каждом участке кривой постоянной, выберем на каждой дуге $\widehat{P_{k-1}P_k}$ точку S_k и получим приближенную формулу для общей массы:

$$M = \sum_{k=1}^n \rho(S_k) l(\widehat{P_{k-1}P_k}), \quad (6.1)$$

где $l(\gamma)$ обозначает длину дуги γ . Точное значение является результатом предельного перехода, когда максимальная длина составляющих дуг стремится к 0.

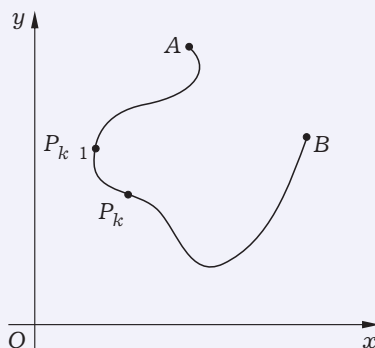


Рис. 6.1

Содержательный смысл функции ρ на самом деле не важен. Как и ранее набор точек $P_0, \dots, P_n$, делящих кривую на n частей, мы будем называть **разбиением** кривой, максимальную среди длин частей разбиения — **диаметром разбиения**¹. Сумма (6.1) представляет собой интегральную сумму, а предел интегральных сумм при диаметре разбиения, стремящемся к 0, называют **криволинейным интегралом 1-го рода** и обозначают

$$M = \int_{\gamma} \rho(M) dl$$

Согласно определению криволинейный интеграл можно вычислять только вдоль кривых, для которых корректно определена длина. Напомним, что если кривая γ задана параметрически функциями $x(t), y(t), z(t), t \in [\alpha, \beta]$, являющимися непрерывно дифференцируемыми (или кусочно непрерывно

¹Определение не совсем естественно, так как диаметром было бы естественно назвать максимальное расстояние между точками дуги разбиения. Однако для наших целей оба подхода равноценны, так как с диаметром дуги к 0 стремится и длина этой дуги.

дифференцируемыми), то длина кривой γ определяется интегралом

$$l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Длина $l(t)$ участка кривой, соответствующего диапазону $[\alpha, t]$ изменения параметра есть монотонная непрерывно дифференцируемая функция от t и может быть взята как новый параметр кривой (он называется **натуральным**). Если кривой соответствует натуральный параметр, то, как легко увидеть, интегральная сумма для криволинейного интеграла от функции $\rho(M)$ совпадает с интегральной суммой определенного интеграла от функции $\rho(M(l))$. Таким образом, криволинейный интеграл 1-го рода сводится к обычному определенному интегралу:

$$\int_{\gamma} \rho(M) dl = \int_0^L \rho(M(l)) dl.$$

Вычисление интеграла 1-го рода. Пусть кривая γ задана параметрически непрерывно дифференцируемыми функциями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Тогда длина $l(t)$ дуги кривой, отвечающей диапазону $[\alpha, t]$ изменения параметра, вычисляется по формуле

$$l(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Выполнив в интеграле

$$I = \int_0^L \rho(M(l)) dl$$

замену переменной $l = l(t)$, приходим к определенному интегралу

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(M(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Свойства интеграла 1-го рода. Свойства криволинейного интеграла 1-го рода вытекают из соответствующих свойств определенного интеграла:

1) Линейность:

$$\int_{\gamma} [\lambda f(M) + \mu g(M)] dl = \lambda \int_{\gamma} f(M) dl + \mu \int_{\gamma} g(M) dl.$$

2) Аддитивность. Если кривую γ составить из двух кривых, скажем, γ_1 и γ_2 , совместив конец первой с началом второй, то криволинейный интеграл по суммарной кривой равен сумме интегралов по исходным кривым:

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(M) dl = \int_{\gamma_1} f(M) dl + \int_{\gamma_2} f(M) dl.$$

3) Если функция $f(M)$, определенная на спрямляемой² кривой γ , непрерывна, то криволинейный интеграл от этой функции вдоль γ существует.

4) Длина кривой:

$$\int_{\gamma} dl = l(\gamma).$$

²Кривую называют спрямляемой, если для нее определена длина.

Принципиальным отличием криволинейного интеграла от определенного является то, что его значение не зависит от направления на кривой, которое может быть задано направлением движения по кривой при возрастании параметра. В этом смысле криволинейный интеграл по отрезку $[a, b]$, например, оси абсцисс не есть определенный интеграл по тому же отрезку, так как перестановка пределов интегрирования изменит определенный интеграл, но не изменит криволинейный. При сведении криволинейного интеграла к определенному нижний предел всегда должен быть меньше верхнего.

6.2. Криволинейный интеграл 2-го рода

Модифицируем понятие криволинейного интеграла следующим образом. Возьмем опять спрямляемую кривую γ и определенную на ней функцию $f(M)$. Выберем разбиение $A = P_0, P_1, \dots, P_n = B$ кривой на n дуг. Пусть координаты точки P_k есть (x_k, y_k, z_k) . Выберем на дугах $P_{k-1}P_k$ точки S_k и составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(S_k) \Delta x_k,$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$.

Предел интегральных сумм σ_n при диаметре разбиения, стремящемся к 0, если он существует и не зависит от выбора точек S_k , называют **криволинейным интегралом 2-го рода** от функции $f(M)$ вдоль кривой γ . Он обозначается так:

$$\int_{\gamma} f(M) dx = \int_{\gamma} f(x, y, z) dx. \quad (6.2)$$

Выбор переменной x не является преимущественным, и мы с тем же успехом можем построить аналогичные интегралы

$$\int_{\gamma} f(M) dy, \quad \int_{\gamma} f(M) dz.$$

В самом общем случае криволинейный интеграл 2-го рода определяется тремя функциями, скажем, $f(M)$, $g(M)$, $h(M)$, заданными на кривой γ :

$$\int_{\gamma} f(M) dx + g(M) dy + h(M) dz.$$

Как возникает подобная конструкция? Рассмотрим следующую механическую задачу. Пусть материальная точка движется по кривой γ , в каждой точке которого задана действующая сила (задано силовое поле). Требуется вычислить работу поля сил.

При постоянной силе $\mathbf{F}$ и прямолинейном движении работа равна скалярному произведению вектора силы $\mathbf{F}$ на вектор перемещения $\mathbf{r}$: $A = \mathbf{F}\mathbf{r}$. В нашем случае выберем разбиение кривой (в тех же обозначениях) и будем считать, что на элементарных дугах перемещение прямолинейное, а сила постоянна. Тогда получаем следующую интегральную сумму:

$$A_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}(S_k) \Delta \mathbf{r}_k,$$

где $\Delta \mathbf{r}_k$ — вектор $\overline{P_{k-1}P_k}$. Раскроем скалярное произведение в координатах:

$$A_n = \sum_{k=1}^n [F_x(S_k) \Delta x_k + F_y(S_k) \Delta y_k + F_z(S_k) \Delta z_k].$$

где F_x, F_y, F_z — координаты вектора $\mathbf{F}$. При переходе к пределу, когда диаметр разбиения стремится к 0, получим криволинейный интеграл 2-го рода:

$$A = \int_{\gamma} F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Свойства интеграла 2-го рода. Свойства криволинейного интеграла 2-го рода аналогичны свойствам определенного интеграла. Сохраняются его линейность и аддитивность.

В отличие от интеграла 1-го рода значение интеграла 2-го рода зависит от направления, выбранного на кривой:

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = - \int_{\widehat{BA}} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Это следует из того, что при изменении направления на кривой меняется порядок следования точек разбиения и потому приращения Δx_k , Δy_k , Δz_k меняют знак. Изменение знака в интегральной сумме вызывает изменение знака и в интеграле.

Теорема о среднем не переносится на интеграл 2-го рода, а теорема об оценке принимает вид:

$$\left| \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz \right| \leq \int_{\widehat{AB}} \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} dl.$$

Это вытекает из неравенства Коши-Буняковского:

$$|P(S_k)\Delta x_k + Q(S_k)\Delta y_k + R(S_k)\Delta z_k| \leq \sqrt{P^2(S_k) + Q^2(S_k) + R^2(S_k)} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 + \Delta z_k^2}.$$

Бесконечно малая величина $\sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 + \Delta z_k^2}$ при стремлении диаметра разбиения к 0 эквивалентна длине дуги $\widehat{P_{k-1}P_k}$, что приводит к интегралу 1-го рода.

Вычисление интеграла 2-го рода. Рассмотрим интеграл (6.2) от функции $f(M) = f(x, y, z)$ вдоль кривой γ , заданной параметрически при помощи непрерывно дифференцируемых функций:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \nu(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (6.3)$$

Каждой точке P_k разбиения кривой соответствует некоторое значение параметра t_k , так что $t_0 = \alpha$, $t_n = \beta$. Набор точек t_k образует разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=1}^n f(S_k) (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k), \nu(\tau_k)) (\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})) = \\ &= \sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k), \nu(\tau_k)) \varphi'(\zeta_k) \Delta t_k. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Из интегральной суммы для криволинейного интеграла мы получили нечто очень близкое к интегральной сумме для определенного интеграла. Отличие лишь в том, что значения двух сомножителей подинтегральной функции $f(\varphi(t), \psi(t), \nu(t))\varphi'(t)$ в нашей сумме берутся в разных точках (точке τ_k , соответствующей точке S_k на кривой, и точке ζ_k , появившейся в результате применения теоремы Лагранжа).

Если функция f непрерывна на кривой γ , то функция

$$F(t) = f(\varphi(t), \psi(t), \nu(t))\varphi'(t)$$

непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$ и потому интегрируема. Взяв разбиение t_k , а в каждом интервале Δt_k точки w_k и W_k , в которых подинтегральная функция достигает на Δt_k соответственно минимума и максимума, полагая $F(w_k) = m_k$, $F(W_k) = M_k$, получим, что

$$\sum_{k=1}^n m_k \Delta t_k \leq \sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k), \nu(\tau_k)) \varphi'(\zeta_k) \Delta t_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta t_k.$$

Если диаметр разбиения стремится к 0, то по лемме „о двух милиционерах“ заключаем, что предел суммы (6.4) существует и равен определенному интегралу от функции F по отрезку $[\alpha, \beta]$. Таким образом, с учетом симметрии, мы доказали следующее.

Теорема 6.1. Если кривая γ задана параметрически в виде (6.3) непрерывно-дифференцируемыми функциями, функции P , Q , R определены на γ и непрерывны, то криволинейный интеграл существует и

$$\int_{\gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t), \nu(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \nu(t))\psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \nu(t))\nu'(t)] dt.$$

Если параметром кривой является одна из координат, то вычисление криволинейного интеграла упрощается. Пусть кривая γ описывается двумя функциями $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$, $x \in [a, b]$. Тогда

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) dx = \int_a^b f(x, \varphi(x), \psi(x)) dx,$$

т.е. в криволинейном интеграле надо переменные y и z выразить через x .

Если кривая γ лежит в плоскости, перпендикулярной оси Ox , то для любой функции f , определенной на кривой,

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) dx = 0.$$

Это следует из того, что при любом разбиении γ разности Δx_k будут равны 0.

Связь интегралов 1-го и 2-го рода. Рассмотрим интеграл (6.2) вдоль кривой, заданной параметрически в виде (6.3) при помощи непрерывно дифференцируемых функций. Тогда

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \nu(t))\varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \nu(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + \psi'(t)^2 + \nu'(t)^2} \cos \alpha dt,$$

где

$$\cos \alpha = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2 + \psi'(t)^2 + \nu'(t)^2}}$$

представляет собой направляющий косинус касательного вектора кривой γ , имеющего координаты $(\varphi'(t), \psi'(t), \nu'(t))$. Таким образом,

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) dx = \int_{\gamma} f(x, y, z) \cos \alpha dl$$

и вообще

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dl.$$

Лекция 7

ФОРМУЛА ГРИНА

Формула Грина. Случай односвязных и многосвязных областей. Вычисление площади плоской фигуры с помощью криволинейного интеграла 2-го рода.

7.1. Интеграл по замкнутому контуру

(**Замкнутым**) **контуром** называют кривую, у которой совпадают начало и конец. Если кривая задана параметрически отображением $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, то она является контуром, если $r(a) = r(b)$. Если при этом отображение r , скажем, на полуинтервале $[a, b)$ является взаимно-однозначным, то контур не имеет точек самопересечения и называется **простым**. Контур можно рассматривать как отображение окружности в трехмерное пространство. Этим подчеркивается, что выбор начала-конца контура не является существенным.

Мы остановимся на плоском случае, когда контур лежит целиком в плоскости. Можно считать, что плоскость контура — это координатная плоскость Oxy . Простой контур γ на плоскости разрезает ее на две области, одна из которых является ограниченной. Сам контур является общей границей этих двух областей (*теорема Жордана*).

Интеграл по замкнутому контуру строится стандартным образом, однако при этом на контуре необходимо выбрать начальную точку, чтобы можно было рассматривать контур как частный случай кривой. Выбор начальной точки оказывается несущественным.

Теорема 7.1. Значение криволинейного интеграла 1-го рода не зависит от выбора начальной точки.

◀ Пусть точки A и B лежат на контуре γ . Сам контур можно рассматривать как объединение (сумму) двух кривых — дуг m и l контура, соединяющих точки A и B (рис. 7.1). В силу аддитивности интеграла для любой функции f , определенной на контуре, получаем

$$\int_{AmBlA} f ds = \int_{AmB} f ds + \int_{BlA} f ds = \int_{BlA} f ds + \int_{AmB} f ds = \int_{BlAmB} f ds$$

(ds — дифференциал длины вдоль контура). ▶

Интеграл 2-го рода зависит от ориентации кривой, т.е. от выбора направления движения по кривой. В общем случае направление движения указывается порядком конечных точек (какая начальная, какая конечная). Но для контура такое определение ориентации не подходит. Направление обхода может быть задано выбором на контуре трех точек и заданием порядка их обхода. Например, если выбраны точки A, B, C , то их обход в порядке ABC, BCA, CAB определяет одно и тоже направление, а обход в порядке ACB, CBA, BAC определяет противоположное направление.

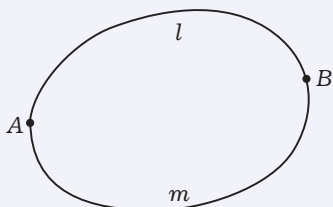


Рис. 7.1

Отметим, что простой контур, расположенный на плоскости, разделяет плоскость на две области, одна из которых ограничена. Ориентация такого контура может быть определена следующим образом. **Положительным направлением** движения по простому контуру считают такое, при котором ограниченная область по ходу движения остается слева. Вариант этого правила: движение по контуру идет против часовой стрелки. Если не оговорено противное, то интеграл 2-го рода по контуру вычисляется в предположении положительного направления обхода.

Теорема 7.2. Значение криволинейного интеграла 2-го рода не зависит от выбора начальной точки.

Доказательство повторяет доказательство теоремы 7.1. Вместе эти две теоремы позволяют не учитывать положение начальной точки и рассматривать контур как непрерывное инъективное отображение окружности в $\mathbb{R}^2$.

Замечание. Для криволинейных интегралов по замкнутому контуру имеется специальное обозначение:

$$\oint_{\gamma} f ds.$$

7.2. Формула Грина

Теорема 7.3 (формула Грина). Если измеримая ограниченная область G ограничена простым (кусочно-гладким) контуром γ , функции P и Q определены и непрерывно дифференцируемы в G и в окрестности каждой точки $M \in \gamma$, то

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \quad (7.1)$$

Замечание. Границу области G обозначают, как правило, символом ∂G . Поэтому формулу (7.1) можно записать так:

$$\int_{\partial G} P dx + Q dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

◀ Формула Грина на самом деле заключает в себе две различные формулы:

$$\int_{\gamma} P dx = - \iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy, \quad \int_{\gamma} Q dy = \iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy.$$

Обе формулы симметричны. Поэтому достаточно ограничиться одной из них. Для определенности выберем первую из них.

Построим кривую l , лежащую в области G за исключением своих концевых точек, которые расположены на γ . Такая кривая (называемая **разрезом**) разделяет область G на две подобласти G_1 и G_2 (рис. 7.2). Тогда

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \iint_{G_1} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy + \iint_{G_2} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy, \quad \int_{\gamma} P dx = \int_{\partial G_1} P dx + \int_{\partial G_2} P dx.$$

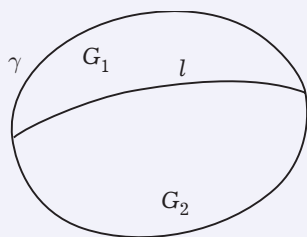


Рис. 7.2

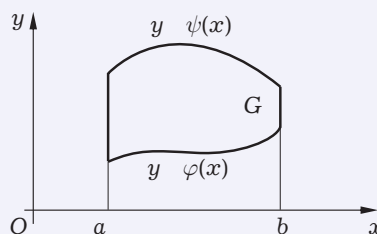


Рис. 7.3

Это соображение позволяет ограничиться рассмотрением областей специального вида, которые являются стандартными¹ по переменной y . В этом случае область описывается неравенствами $a \leq x \leq b$, $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$, а кривую γ составляют графики функций φ и ψ плюс, возможно, один-два

¹Если кривая γ описывается непрерывно дифференцируемым отображением r , причем касательный вектор $r'(t)$ ни в одной точке не является нулевым, то ее локально можно представить как график функции $y(x)$ или $x(y)$. Разбиение же можно выполнять горизонтальными и вертикальными прямыми. В общем случае кривую γ следует заменить близкой кусочно гладкой, например, ломаной. Доказательство завершается предельным переходом.

отрезка вертикальных прямых (рис. 7.3). Поэтому, учитывая положительное направление вдоль γ и то, что криволинейный интеграл $\int P dx$ вдоль вертикального отрезка равен 0, получим

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx = \int_{\Gamma(\varphi)} P(x, y) dx - \int_{\Gamma(\psi)} P(x, y) dx = \int_a^b [P(x, \varphi(x)) - P(x, \psi(x))] dx. \quad (7.2)$$

С другой стороны, двойной интеграл превращается в повторный, причем внутренний интеграл легко вычисляется:

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))] dx. \quad (7.3)$$

Сравнивая формулы (7.2) и (7.3), получаем формулу Грина. ►

Двумерная область может быть ограничена несколькими простыми непересекающимися контурами (например, кольцо). Такая область называется **многосвязной**. Количество ограничивающих контуров определяет **связность** области. Если контур один, то область **односвязна**, два контура — двусвязна (кольцо) и т.д.

Среди контуров, ограничивающих многосвязную область G один является внешним, остальные — внутренними. Внешний контур ограничивает область, в которую G входит как часть. Все внутренние контуры расположены внутри внешнего. Обход контуров, ограничивающих G , выполняется так, что область находится слева. Это значит, что внешний контур обходится против часовой стрелки, а внутренние — по часовой (рис. 7.4).

Формула Грина обобщается на случай многосвязной области. Под интегралом по границе такой области понимается сумма криволинейных интегралов по контурам границы с учетом положительного направления обхода, т.е. против часовой стрелки для внешнего и по часовой для внутренних.

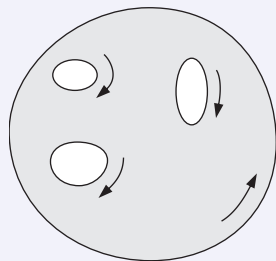


Рис. 7.4

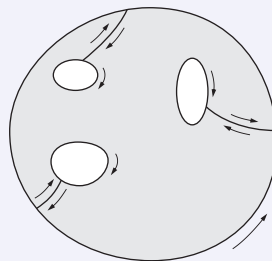


Рис. 7.5

Теорема 7.4 (обобщенная формула Грина). Если многосвязная область G ограничена несколькими простыми (кусочно гладкими) контурами, то Если измеримая ограниченная область G ограничена несколькими простыми (кусочно гладкими) контурами, функции P и Q определены и непрерывно дифференцируемы в окрестности $\bar{G}$, то

$$\int_{\partial G} P dx + Q dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

◀ Утверждение сводится к случаю односвязной области. Действительно, соединим каждый внутренний контур с внешним при помощи гладкого разреза (рис. 7.5). Тогда область G превратится в односвязную область G' , двойной интеграл по которой совпадает с интегралом по исходной области (G получается из G' добавлением множества меры 0). При проходе границы области G' контуры ∂G проходятся в положительном направлении, но, кроме того, добавленные разрезы проходятся дважды в противоположных направлениях. Поэтому

$$\int_{\partial G} P dx + Q dy = \int_{\partial G'} P dx + Q dy. \quad \blacktriangleright$$

7.3. Вычисление площадей при помощи криволинейных интегралов

Площадь области, ограниченной простым контуром, может быть вычислена при помощи криволинейного интеграла. Это удобно, когда граница области задана параметрически, так как вычисление двойного интеграла наталкивается на определенные трудности, а криволинейный интеграл вычисляется самым естественным образом.

Подберем функции P и Q , определенные в G , так, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 1.$$

Тогда по формуле Грина

$$\int_{\partial G} P dx + Q dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \mu(G).$$

Наиболее простыми являются варианты $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = 0$ и $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = x$. В результате получаем формулы

$$\mu(G) = \int_{\partial G} x dy = - \int_{\partial G} y dx.$$

Пример 7.1. Рассмотрим область G , ограниченную астроидой

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

(рис. 7.6). Переменные друг через друга могут быть выражены, но неоднозначно и достаточно сложной формулой. Используя криволинейный интеграл, получаем

$$\begin{aligned} \mu(G) &= \int_{\partial G} x dy = \int_0^{2\pi} \cos^3 t d(\sin^3 t) = 3 \int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t dt = \left| \begin{array}{l} \text{подинтегральная} \\ \text{функция имеет} \\ \text{период } \pi/2 \end{array} \right| = \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^2 2t dt = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) \sin^2 2t dt = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{3}{8} \pi. \end{aligned}$$

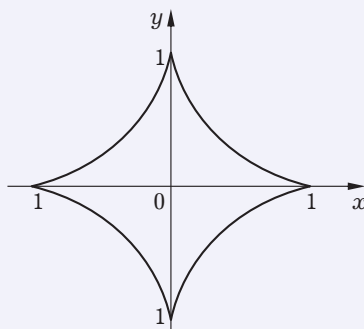


Рис. 7.6

Лекция 8

ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Полный дифференциал и криволинейный интеграл от полного дифференциала. Формула Ньютона — Лейбница для криволинейных интегралов. Восстановление функции по ее полному дифференциалу. Случай многосвязной области, циклические постоянные.

8.1. Криволинейные интегралы, не зависящие от пути

Предположим, что функции P и Q определены и непрерывны в некоторой открытой области G плоскости, существует криволинейный интеграл

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy$$

по любой кривой γ в G , причем значение интеграла зависит только от конечных точек кривой. Это значит, что если произвольные кривые γ_1 и γ_2 соединяют точки A и B и целиком лежат в G , то

$$\int_{\gamma_1} P dx + Q dy = \int_{\gamma_2} P dx + Q dy.$$

Фиксируем точку $M_0(x_0, y_0)$ в G . Тогда для любой точки $M(x, y) \in G$ интеграл

$$F(x, y) = \int_{M_0}^M P dx + Q dy, \quad (8.1)$$

взятый вдоль какой-либо кривой, соединяющей M_0 с M , не зависит от выбора кривой, но лишь от конечной точки M , т.е. этот интеграл является функцией в области G . Отметим, что изменение „стартовой“ точки M_0 , скажем, на M'_0 , изменяет функцию $F(x, y)$, добавляя к ней константу, равную

$$\int_{M'_0}^{M_0} P dx + Q dy.$$

Знание функции F позволяет легко вычислить криволинейный интеграл по координатам конечных точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$\int_{M_1}^{M_2} P dx + Q dy = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1). \quad (8.2)$$

Формула (8.2) является прямым обобщением формулы Ньютона — Лейбница для определенного интеграла. Поэтому она сама называется **формулой Ньютона — Лейбница**, а функция F — **первообразной для криволинейного интеграла**. Естественно возникает вопрос о нахождении первообразной.

Теорема 8.1. Если функции P и Q непрерывны в области G , а интеграл (8.1) не зависит от пути, соединяющего точки M_0 и M , то:

- определяемая интегралом функция F является дифференцируемой в G ;
- частные производные функции F связаны с подынтегральными функциями P и Q формулами:
 $F'_x(x, y) = P(x, y), F'_y(x, y) = Q(x, y).$

◀ Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ и дадим приращения независимым переменным, т.е. выберем близкую к M точку $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Тогда

$$\Delta F(x, y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \int_{M_0}^{M'} P dx + Q dy - \int_{M_0}^M P dx + Q dy = \int_M^{M'} P dx + Q dy.$$

Теперь вычислим частные производные функции $F(x, y)$. Имеем

$$F(x + \Delta x, y) - F(x, y) = \int_x^{x+\Delta x} P(\xi, y) d\xi$$

(интеграл берется по отрезку горизонтальной прямой), откуда, дифференцируя определенный интеграл по переменному верхнему пределу, находим

$$F'_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial \Delta x} \int_x^{x+\Delta x} P(\xi, y) d\xi = P(x, y).$$

Двойственное соотношение $F'_y(x, y) = Q(x, y)$ находится аналогично. Так как при этом частные производные непрерывны, то функция является дифференцируемой. ▶

Теорема 8.1 утверждает, что если интеграл не зависит от пути, то подынтегральное выражение представляет собой дифференциал некоторой функции, а именно дифференциал первообразной подынтегрального выражения. Вообще, выражение вида $P dx + Q dy$ называют дифференциалом, а если этот дифференциал является дифференциалом некоторой функции, то его называют **полным**. Таким образом, интеграл не зависит от пути, если его дифференциал является полным. Верно и обратное утверждение.

Теорема 8.2. Если дифференциал криволинейного интеграла является полным, то криволинейный интеграл не зависит от пути.

◀ Пусть в области G выполняются соотношения $P(x, y) = F'_x(x, y)$, $Q(x, y) = F'_y(x, y)$. Выберем произвольную кусочно-гладкую кривую γ , связывающую точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Пусть кривая задается параметрически функциями φ, ψ , определенными на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} P dx + Q dy &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [F'_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + F'_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} (F(\varphi(t), \psi(t))) dt = F(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - F(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1). \end{aligned}$$

Мы получили, что интеграл равен разности значений функции F и не зависит от пути. ▶

8.2. Условия независимости интеграла от пути

Из предыдущего пункта следует, что задачи проверки: а) является ли дифференциал полным; б) зависит ли криволинейный интеграл от пути — являются эквивалентными. Фактически это разные формулировки одной и той же задачи.

Теорема 8.3. Пусть функции P и Q определены и непрерывно-дифференцируемы в открытой области G . Тогда если криволинейный интеграл $\int P dx + Q dy$ не зависит от пути, то

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

◀ Утверждение следует из теоремы о равенстве смешанных поизводных:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Для равенства смешанных производных достаточно их непрерывности, т.е. в нашем случае непрерывности частных производных P'_y и Q'_x . ▶

Обратное утверждение „в полном объеме“ не выполняется. Отметим, что независимость интеграла от пути равносильна тому, что интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

Если функции P и Q непрерывно дифференцируемы в открытой области G и $Q'_x \equiv P'_y$ в G , то локально обеспечивается независимость интеграла от пути. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ выбрана в G произвольно. Тогда некоторая окрестность $O_\delta(M_0) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(M_0, M) < \delta\}$ целиком попадает в G . Если две кривые γ_1 и γ_2 связывают каждая точку M_0 с некоторой точкой $M_1 \in O_\delta(M_0)$, то кривая $\gamma_1 - \gamma_2$ (сперва проходится кривая γ_1 , а затем γ_2 в обратном направлении), является контуром, целиком лежащим в $O_\delta(M_0)$. Он, возможно, имеет самопересечения и тогда распадается на несколько контуров без самопересечений, *внутренность каждого из которых целиком лежит в $O_\delta(M_0)$* (принципиальный момент!). Применяв к каждому такому контуру формулу Грина, получим, что интеграл равен 0. Но это равносильно утверждению, что интегралы по γ_1 и по γ_2 совпадают.

Глобально замкнутый контур может охватить область, которая не принадлежит целиком G , если G не является односвязной. Односвязность G равносильна тому, что любой контур в G без самопересечений охватывает область, целиком попадающую в G . Поэтому в этом случае проходят вышеприведенные рассуждения.

Резюмируя, приходим к следующему результату.

Теорема 8.4. Если функции P и Q определены и непрерывно дифференцируемы в односвязной области G , причем $Q'_x(x, y) = P'_y(x, y)$ всюду в G , то дифференциал $P dx + Q dy$ является полным и, следовательно, соответствующий криволинейный интеграл не зависит от пути.

8.3. Циклические постоянные

Рассмотрим один специальный случай не односвязной области — проколотый круг $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < r^2\}$. Пусть функции P и Q удовлетворяют условиям теоремы 8.4 для области G . Тогда в силу обобщенной формулы Грина, примененной к кольцу $\rho_1^2 < x^2 + y^2 < \rho_2^2 < r^2$, заключаем, что интеграл по любой окружности имеет одно и то же значение, которое мы обозначим $\varkappa$ (предполагаем обход окружности против часовой стрелки).

Рассмотрим некоторый контур γ без самопересечений. Если его внутренность не содержит выколотой точки $O(0, 0)$, то к нему применима формула Грина и соответствующий интеграл равен 0. Если же он охватывает точку O , то его значение равно $\pm \varkappa$, знак определяется направлением обхода.

Если контур в G имеет самопересечения, то его можно представить как сумму нескольких контуров без самопересечений. Тогда значение интеграла равно $n\varkappa$, где n — некоторое целое число. Это число показывает **кратность обхода** контуром особой точки O с учетом направления обхода. Например, для контура на рис. 8.1 значение интеграла равняется $2\varkappa$.

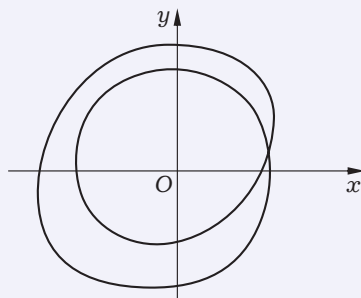


Рис. 8.1

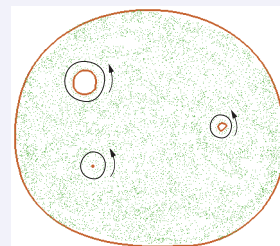


Рис. 8.2

Величина $\varkappa$, играющая такую важную роль в значении интеграла по замкнутому контуру, называется **циклической постоянной**.

Наш частный случай распространяется на общий. Пусть область G ограничена конечным числом кусочно гладких контуров, некоторые из которых, возможно, вырождаются в точку (рис. 8.2). Вычислим интеграл по каждому внутреннему контуру границы, обходя его против часовой стрелки. Получим набор значений $\varkappa_1, \dots, \varkappa_m$ — циклических постоянных для области G . Значение любого интеграла по замкнутому контуру в G может быть представлено в виде $n_1 \varkappa_1 + \dots + n_m \varkappa_m$. Числа n_i показывают кратность обхода каждого внутреннего контура границы. В частности, обобщенная формула Грина равносильна утверждению, что интеграл по внешнему контуру области равен сумме всех циклических постоянных.

8.4. Трехмерный случай

На трехмерный случай переносятся утверждения теорем 8.1 и 8.2. Если функции P, Q, R определены и непрерывны в трехмерной открытой области G , то интеграл

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz$$

не зависит от пути в области G , если и только если выражение $P dx + Q dy + R dz$ является дифференциалом некоторой функции $F(x, y, z)$, т.е., по нашей терминологии, полным дифференциалом. Функция $F(x, y, z)$ определяется с точностью до постоянной и равна значению интеграла

$$\int_{M_0}^M P dx + Q dy + R dz$$

от некоторой фиксированной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до точки $M(x, y, z)$.

Если $F'_x = P$, $F'_y = Q$, $F'_z = R$, то по теореме о равенстве смешанных производных получаем

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Эти равенства являются необходимыми. Они достаточны для того, чтобы дифференциал был полным, если на область наложить некоторые ограничения, аналогичные односвязности. Но для получения нужного результата необходим трехмерный аналог формулы Грина.

Замечание. Функция F , для которой выражение $P dx + Q dy + R dz$ является полным дифференциалом, является решением системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = R,$$

которая, как можно показать, имеет решение локально при выполнении необходимых условий. Указанное соображение представляет собой второй способ доказательства критерия полноты дифференциала.

Лекция 9

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Односторонние и двусторонние поверхности. Поверхностный интеграл 1-го рода и его вычисление. Свойства интеграла 1-го рода. Поверхностный интеграл 2-го рода и его вычисление. Формула Стокса. Формула Остроградского — Гаусса.

Изучение поверхностных интегралов начнем с одной практической задачи. Пусть требуется найти массу тонкой искривленной пластинки S , в каждой точке которой задана *поверхностная плотность* ρ . Как и ранее, пластинку делим на мелкие части ΔS_i , а затем составляем интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^m \rho_i \mu(\Delta S_i),$$

где $\mu(\Delta S_i)$ — площадь поверхности ΔS_i , а ρ_i — средняя плотность i -й части, в качестве каковой можно взять значение в какой-либо точке ΔS_i . Точное значение есть результат предельного перехода в интегральной сумме при неограниченном измельчении разбиения.

Это рассуждение требует осмысления понятия „площадь поверхности“.

9.1. Площадь поверхности

Площадь поверхности основывается на предположении, что в малом поверхность „почти плоская“. Поверхность может быть задана параметрически как отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Пусть поверхность S задается тремя функциями

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ z = \chi(u, v). \end{cases} \quad (9.1)$$

определенными в двумерной области G и непрерывно дифференцируемыми. Пусть отображение $G \rightarrow S$, заданное этими функциями является взаимно однозначным. Тогда параметры u и v можно трактовать как координаты на поверхности S .

Разобьем область G прямоугольной сеткой на части ΔG_i . Тогда каждому прямоугольнику разбиения соответствует элемент разбиения ΔS_i поверхности S (рис. 9.1). Так как функции φ , ψ , χ непрерывно дифференцируемы, поверхность S имеет в каждой точке касательную плоскость, которая может быть задана парой касательных векторов $(\varphi'_u, \psi'_u, \chi'_u)$ и $(\varphi'_v, \psi'_v, \chi'_v)$. Можно показать (с помощью теоремы о неявной функции), что если указанные векторы не коллинеарны, то локально отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ взаимно-однозначно. Естественно предполагать, что это требование выполняется всюду в G .

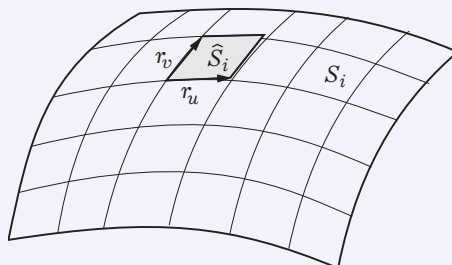


Рис. 9.1

В каждом элементе разбиения ΔG_i области G выберем точку (u_i, v_i) . Пусть $\Delta \hat{S}_i$ — проекция элемента ΔS_i на плоскость π_i , касающуюся S в точке M_i с криволинейными координатами (u_i, v_i) (т.е. точке, которая является образом точки (u_i, v_i) при отображении $G \rightarrow S$). Составим сумму

$$\sigma = \sum_i \mu(\Delta \hat{S}_i) \quad (9.2)$$

по всем элементам разбиения. Отметим, что граница элемента $\Delta\hat{S}_i$ состоит из дуг четырех непрерывно дифференцируемых кривых, являющихся образами границ прямоугольника. Можно показать, что в этом случае этот элемент является измеримым множеством и потому сумма составлена корректно¹.

Если сумма (9.2) имеет предел, когда диаметр разбиения стремится к 0, то этот предел называют **площадью поверхности** S .

В качестве точки (u_i, v_i) возьмем нижний левый угол прямоугольника ΔG_i . Наряду с проекцией $\Delta\hat{S}_i$ элемента ΔS_i на касательную плоскость рассмотрим лежащий в этой плоскости параллелограмм, образованный касательными векторами $\mathbf{r}_u = (\varphi'_u, \psi'_u, \chi'_u)$ и $\mathbf{r}_v = (\varphi'_v, \psi'_v, \chi'_v)$. Этот параллелограмм является линеаризацией криволинейного четырехугольника $\Delta\hat{S}_i$ и отличается от последнего на величину большего порядка малости, чем площадь каждого из них. Поэтому в сумме (9.2) можно площади криволинейных четырехугольников заменить площадями параллелограммов. Но площадь параллелограмма вычисляется через векторное произведение. Получим следующую сумму:

$$\hat{\sigma} = \sum_i |\mathbf{r}_u(u_i, v_i) \times \mathbf{r}_v(u_i, v_i)| \Delta u_i \Delta v_i.$$

При переходе к пределу мы получим двойной интеграл

$$\mu(S) = \iint_G |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| du dv, \quad (9.3)$$

который и равен площади поверхности S . Точный результат следующий.

Теорема 9.1. Пусть поверхность S задана параметрически уравнениями (9.1) при помощи непрерывно дифференцируемых функций с областью определения G , причем ранг матрицы Якоби отображения в каждой точке в G равен 2 (т.е. максимален). Тогда для поверхности S определена площадь $\mu(S)$, которая может быть вычислена по формуле (9.3).

Пример 9.1. Рассмотрим сферу радиуса R . При помощи сферических координат она может быть задана уравнениями

$$\begin{cases} x = R \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y = R \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z = R \cos \vartheta. \end{cases}$$

Интересующие нас векторы имеют вид

$$\mathbf{r}_\vartheta = R(\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta)^T, \quad \mathbf{r}_\varphi = R(-\sin \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \cos \varphi, 0)^T.$$

Поэтому площадь сферы равна

$$\mu(S) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi |\mathbf{r}_\vartheta \times \mathbf{r}_\varphi| d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = 4\pi R^2.$$

Замечание. Если поверхность представляет собой график некоторой функции двух переменных $z = f(x, y)$, то в качестве координат на поверхности удобно взять пространственные координаты x и y . В этом случае векторы $\mathbf{r}_x$ и $\mathbf{r}_y$ имеют вид $\mathbf{r}_x = (1, 0, f'_x)$, $\mathbf{r}_y = (0, 1, f'_y)$. Их векторное произведение равно

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f'_x, -f'_y, 1).$$

Учитывая это заключаем, что если функция f непрерывно дифференцируема, то ее график над измеримой плоской областью G имеет площадь

$$S = \iint_G \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} dx dy.$$

¹Если G не является прямоугольником, то на границе G элементы разбиения имеют криволинейные граничные дуги. Поэтому строгие рассуждения требуют доказать, что при непрерывно дифференцируемом отображении измеримое плоское множество перейдет снова в измеримое.

9.2. Поверхностный интеграл

Поверхностный интеграл определяем в соответствии с примером, рассмотренным в начале лекции. Пусть поверхность S имеет площадь (т.е. измерима по Жордану). Пусть на поверхности S задана некоторая непрерывная функция f . Разобьем поверхность S на измеримые элементы ΔS_i . Выберем в каждом таком элементе точку N_i и составим сумму

$$\sigma(T) = \sum_i f(N_i) \mu(\Delta S_i),$$

которую называют **интегральной**. Если интегральная сумма стремится к некоторому пределу $I(G)$, когда диаметр разбиения стремится к 0, и если этот предел не зависит от выбора точек N_i , то его называют **поверхностным интегралом** и обозначают

$$\iint_S f(M) ds. \quad (9.4)$$

Теорема 9.2. Пусть поверхность S задана параметрически уравнениями (9.1) при помощи непрерывно дифференцируемых функций с областью определения G , причем ранг матрицы Якоби отображения в каждой точке в G равен 2 (т.е. максимален). Тогда для любой непрерывной функции f , определенной на этой поверхности, существует поверхностный интеграл (9.4), который может быть вычислен по формуле

$$\iint_S f(M) ds = \iint_G f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| du dv. \quad (9.5)$$

Замечание. Отметим важный частный случай, когда поверхность S является графиком непрерывно дифференцируемой функции $z = \varphi(x, y)$. В этом случае формула (9.5) сводится к следующей:

$$\iint_S f(M) ds = \iint_G f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} du dv.$$

9.3. Свойства поверхностного интеграла

По своим свойствам поверхностный интеграл близок к криволинейному интегралу 1-го рода, являясь, по существу, его двумерным аналогом. Отметим важнейшие: а) линейность, б) аддитивность, в) теорема об оценке интеграла (в частности, интеграл от неотрицательной функции всегда неотрицателен, а если подынтегральная функция непрерывна, то положителен). Эти свойства, как и ранее, являются следствием свойств интегральных сумм, сохраняющихся при предельном переходе от суммы к интегралу.

9.4. Поверхностный интеграл 2-го рода

Пусть у нас в пространстве задано поле скоростей текущей жидкости (или газа). Важной характеристикой процесса является количество жидкости, проходящей через ту или иную поверхность в пространстве. Например, количество жидкости, протекающей через сферу, говорит о том, какова мощность источников внутри сферы.

Выберем поверхность S в пространстве и предположим, что в каждой точке $M \in S$ задан единичный вектор $\mathbf{n}(M)$ нормали к поверхности, причем функция $\mathbf{n}$, являющаяся отображением с поверхности S в пространство $\mathbb{R}^3$, т.е. вектор-функцией, непрерывна на поверхности S . Построим разбиение поверхности на элементы ΔS_i , в каждом элементе выберем точку N_i . Если элемент ΔS_i достаточно мал, то перенос жидкости через этот элемент приближенно равен скалярному произведению $\rho \mu(\Delta S_i) \mathbf{v}(N_i) \mathbf{n}(N_i)$ вектора скорости $\mathbf{v}(N_i)$ на вектор нормали $\mathbf{n}(N_i)$ частиц жидкости в районе ΔS_i ,

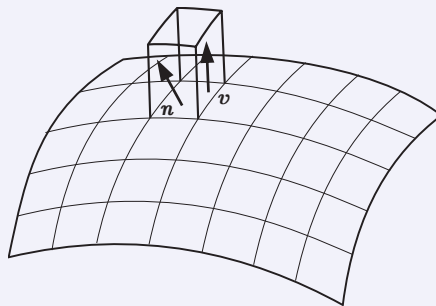


Рис. 9.2

умноженному на площадь элемента разбиения (рис. 9.2) и на плотность ρ . Суммируя результаты по всем элементам разбиения, получим интегральную сумму

$$\sigma = \rho \sum_i \mathbf{v}(N_i) \mathbf{n}(N_i) \mu(\Delta S_i).$$

В предельном переходе при диаметре разбиения, стремящемся к 0, мы получим поверхностный интеграл вида

$$M = \rho \iint_S \mathbf{v} \mathbf{n} dS. \quad (9.6)$$

Полагая, что вектор $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ выражен через свои направляющие косинусы, вектор $\mathbf{v} = (P, Q, R)$ также записан в координатах, получаем координатное представление интеграла (9.6):

$$M = \rho \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \quad (9.7)$$

Интеграл (9.7) — это поверхностный интеграл, но он играет особую роль. В нем в качестве элементов подынтегрального выражения участвуют направляющие косинусы нормали. Во-первых, не для всякой поверхности можно выбрать непрерывную нормаль. Пример — небезызвестный лист Мебиуса, на котором не существует непрерывного поля нормали. Выбор нормали фактически означает выбор стороны поверхности. Различают поверхности двусторонние (например, сфера) и односторонние (лист Мебиуса). Интеграл (9.7) можно корректно определить только для двусторонних поверхностей.

Во-вторых, сторона поверхности может быть выбрана двумя способами. Изменение стороны поверхности означает изменение знака у нормали и в конечном счете изменение знака интеграла. В рассмотренной задаче выбираемая нормаль означает положительное движение жидкости (например, для сферы может быть движение изнутри наружу и наоборот).

Выбор стороны у двусторонней поверхности по-иному называют выбором ее **ориентации**. Таким образом, интеграл (9.7) берется по ориентированным поверхностям. В этом смысле он ближе к криволинейному интегралу 2-го рода. Его и называют **поверхностным интегралом 2-го рода** в отличие от интеграла (9.4), который называют **поверхностным интегралом 1-го рода**.

9.5. Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода

Интеграл 2-го рода может быть вычислен как и любой поверхностный интеграл по формуле (9.5). Однако следует учесть, что выбор координат на поверхности (ее параметризации), например, u и v , означает и выбор ее ориентации, так как вектор $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ нормален к поверхности, а для получения единичной нормали достаточно его разделить на длину $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$. В результате из формулы (9.6) получаем

$$\iint_S \mathbf{v} \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{v} \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} dS = \iint_S \mathbf{v} (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv = \iint_S \begin{pmatrix} P & Q & R \\ \varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v \end{pmatrix} du dv,$$

где определитель выражает смешанное произведение трех векторов.

Наиболее просто поверхностный интеграл считается, когда координатами на поверхности являются две пространственные координаты. Например, если это координаты x и y , то

$$\iint_S R \cos \gamma \, dS = \iint_S R \cos \gamma \frac{dx dy}{|\cos \gamma|} = \pm \iint_{\text{пр}_{Oxy} S} R(x, y, z(x, y)) \, dx dy.$$

В интеграле выбирается знак $+$, если направление нормали совпадает с направлением оси Oz (точнее, угол между этими направлениями острый). Это аналогично вычислению криволинейного интеграла 2-го рода по графику функции одной переменной. В связи с этим для указанного интеграла используется обозначение

$$\iint_S R \cos \gamma \, dS = \iint_S R \, dx dy.$$

Учитывая оставшиеся две составляющие, получим

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS = \iint_S P \, dy dz + Q \, dz dx + R \, dx dy.$$

9.6. Связь поверхностного интеграла с криволинейным и тройным

В интегральном исчислении важнейшую роль играют две формулы, которые аналогичны формуле Грина. Первая связывает поверхностный интеграл 2-го рода с криволинейным, а вторая — с тройным.

Пусть имеет двусторонняя поверхность S , на которой расположен простой контур γ . Этот контур ограничивает часть поверхности. Мы будем считать, что он проходится в таком направлении, что ограниченная им часть поверхности находится слева, если смотреть с выбранной стороны поверхности.

Теорема 9.3 (формула Стокса). Если функции P , Q , R определены на поверхности S и непрерывно дифференцируемы, то для простого гладкого контура γ , расположенного на поверхности S ($\text{int } \gamma$ — область, ограниченная контуром γ) верно равенство

$$\oint_{\gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \iint_{\text{int } \gamma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

◀ Формула Стокса линейна относительно входящих в нее трех функций. Поэтому она сводится к трем симметричным вариантам: $(P, 0, 0)$, $(0, Q, 0)$ и $(0, 0, R)$. В силу симметрии достаточно рассмотреть один из этих вариантов. Поэтому мы остановимся на доказательстве формулы

$$\oint_{\gamma} P \, dx = \iint_{\text{int } \gamma} \frac{\partial P}{\partial z} \, dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} \, dx dy.$$

Формула Стокса также аддитивна, т.е. если она верна для каждой из нескольких подобластей, на которые разделена область $\text{int } \gamma$, то она верна и для всей области. Это происходит потому, что поверхностные интегралы по прилегающим областям складываются, а интегралы по границам подобластей внутри γ взаимно уничтожаются, так как соответствующие кривые проходятся дважды в противоположных направлениях. Здесь повторяется та же ситуация, что и в формуле Грина.

Эти два рассуждения позволяют ограничиться случаем, когда поверхность S задана параметрически в виде (9.1). Так как соответствие между поверхностью S и областью G в переменных u , v является взаимно однозначным и непрерывно дифференцируемым, контуру γ соответствует контур C в плоскости uv , который описывается функциями $u(t)$, $v(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Легко убеждаемся, что интеграл по γ транслируется в интеграл по C на плоскости uv :

$$\oint_{\gamma} P \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) \, dt = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(t)) (x'_u u'(t) + x'_v v'(t)) \, dt =$$

$$= \oint_C P(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \varphi'_u du + P(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \varphi'_v dv. \quad (9.8)$$

Поверхностный интеграл по $\text{int } \gamma$ также может быть преобразован в двойной интеграл по области $\text{int } C$:

$$\iint_{\text{int } \gamma} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_{\text{int } C} \begin{pmatrix} 0 & P'_z & P'_y \\ \varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v \end{pmatrix} dudv, \quad (9.9)$$

Остается к правым частям формул (9.8) и (9.9) применить формулу Грина, чтобы убедиться в их равенстве. ►

Следствие. Если всюду в односвязной области $G \subset \mathbb{R}^3$ выполняются условия

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

то значение интеграла

$$\int_A^B P dx + Q dy + R dz$$

не зависит от пути, соединяющего точки A и B и целиком лежащего в G .

◀ В самом деле, достаточно доказать, что интеграл по любому замкнутому контуру в G равен 0. На простой контур γ натягиваем поверхность S , целиком лежащую в G . Тогда по формуле Стокса заключаем, что интеграл по γ должен равняться 0. ►

Замечание. Понятие „трехмерная односвязная область“ надо понимать так, что любой простой контур является границей некоторой поверхности, лежащей в этой области. В этом смысле область между двумя концентрическими сферами — односвязная область, а тор — нет.

Теорема 9.4 (формула Остроградского — Гаусса). Пусть трехмерная область G ограничена гладкой поверхностью S . Если функции P , Q , R определены и непрерывно дифференцируемы в G и на S , то

$$\iiint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz.$$

◀ Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство формулы Грина. Опять-таки, формула Остроградского линейна относительно тройки функций, и мы можем остановиться на частном случае, когда $P \equiv 0$, $Q \equiv 0$. Формула Остроградского аддитивна, и мы можем ограничиться случаем стандартной области, которая ограничена графиками двух функций $z = \varphi_1(x, y)$ (снизу) и $z = \varphi_2(x, y)$ (сверху). Тогда

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz &= \iint_{G_{xy}} dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_{G_{xy}} R(x, y, \varphi_2(x, y)) dxdy - \iint_{G_{xy}} R(x, y, \varphi_1(x, y)) dxdy = \iint_S R(x, y, z) dxdy, \end{aligned}$$

где G_{xy} — проекция области G на плоскость Oxy . ►

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 1. Мера Жордана	1
1.1. Площадь плоского множества	1
1.2. Двойной интеграл	3
1.3. Кратный интеграл	3
Лекция 2. Вычисление кратных интегралов	6
2.1. Двойной интеграл	6
2.2. Общий случай	8
2.3. Техника вычисления	8
Лекция 3. Замена переменных в кратном интеграле	11
3.1. Двойной интеграл	11
3.2. Произвольный кратный интеграл	13
3.3. Полярные координаты	13
3.4. Цилиндрические и сферические координаты	14
Лекция 4. Приложения кратных интегралов	15
4.1. Площадь	15
4.2. Объем	16
4.3. Механические приложения	16
4.4. Плоский случай	17
Лекция 5. Несобственные интегралы	18
5.1. Интеграл от неотрицательной функции	19
5.2. Абсолютная сходимость	19
5.3. Расстановка пределов в несобственных интегралах	21
5.4. Замена переменных в несобственном интеграле	21
5.5. Интегралы, зависящие от параметра	22
Лекция 6. Криволинейный интеграл	26
6.1. Криволинейный интеграл 1-го рода	26
6.2. Криволинейный интеграл 2-го рода	28
Лекция 7. Формула Грина	31
7.1. Интеграл по замкнутому контуру	31
7.2. Формула Грина	32
7.3. Вычисление площадей при помощи криволинейных интегралов	34
Лекция 8. Полный дифференциал	35
8.1. Криволинейные интегралы, не зависящие от пути	35
8.2. Условия независимости интеграла от пути	36
8.3. Циклические постоянные	37
8.4. Трехмерный случай	38
Лекция 9. Поверхностный интеграл	39
9.1. Площадь поверхности	39
9.2. Поверхностный интеграл	41
9.3. Свойства поверхностного интеграла	41
9.4. Поверхностный интеграл 2-го рода	41
9.5. Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода	42
9.6. Связь поверхностного интеграла с криволинейным и тройным	43

Лекция 10. Элементы теории поля	45
10.1. Скалярные и векторные поля	45
10.2. Векторные трубки	45
10.3. Линейный интеграл и поток	46
10.4. Вихрь и формула Стокса	47
10.5. Дивергенция и формула Остроградского	47
Лекция 11. Специальные векторные поля	49
11.1. Векторные дифференциальные операции 2-го порядка	49
11.2. Оператор Гамильтона	49
11.3. Потенциальное поле	50
11.4. Соленоидальное поле	50
11.5. Гармоническое поле	51
11.6. Разложение поля на потенциальное и соленоидальное	52
11.7. Криволинейные координаты	52
Лекция 12. Числовые ряды	55
12.1. Основные понятия	55
12.2. Операции над рядами	56
12.3. Знакоположительные числовые ряды	57
Лекция 13. Знакопеременные числовые ряды	61
13.1. Другие признаки сходимости	61
13.2. Группировки	63
13.3. Перестановки	64
13.4. Умножение рядов	65
Лекция 14. Функциональные ряды	66
14.1. Функциональные последовательности	66
14.2. Функциональные ряды	69
14.3. Признаки равномерно сходящихся рядов	70
Лекция 15. Степенные ряды	72
15.1. Интервал сходимости	72
15.2. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов	74
15.3. Ряд Тейлора	75
15.4. Стандартные разложения в ряд Тейлора	77
Лекция 16. Ортогональные системы	79
16.1. Определение	79
16.2. Задача о наилучшем приближении	81
16.3. Свойства ряда Фурье	82
16.4. Условия сходимости ряда Фурье к функции	83
16.5. Тригонометрическая система	84
Лекция 17. Тригонометрические ряды Фурье	86
17.1. О равномерной сходимости ряда Фурье	86
17.2. Порядок малости коэффициентов и дифференцируемость	87
17.3. Условия сходимости ряда Фурье в точке	89
17.4. Ряд Фурье по косинусам (синусам) кратных углов	93
17.5. Разложение функции на произвольном отрезке	93
17.6. Комплексная форма записи ряда Фурье	94
Лекция 18. Интеграл Фурье	96
18.1. Четные и нечетные функции	98
18.2. Симметричная форма интеграла Фурье	98
18.3. Свойства преобразования Фурье	99