кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций
для студентов 1-го курса 2-го семестра
специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 24

Однородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение системы. Построение общего решения по корням характеристического уравнения (вывод только для случая действительных и различных корней).

Рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \ , \ i = 1, \ldots, n \ . \tag{1}$$

В матричной форме эта система запишется так:

$$Y' = AY \ , \tag{2}$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \ , \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \ .$$

Характеристическим уравнением системы (1) (или (2)) называется уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Если корни характеристического уравнения вещественны и различны, то нетрудно построить фундаментальную систему решений системы (1). В самом деле, обозначим эти корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и для каждого корня найдем отвечающий ему собственный вектор:

$$E_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \ldots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix} \ , \ldots , \ E_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \ldots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix} \ .$$

Заметим теперь, что вектор-функции

$$Y_i = e^{\lambda_i x} E_i \ , \ i = 1, \ldots, n \ ,$$

являются решениями системы (2):

$$Y_i' = \lambda_i e^{\lambda_i x} E_i = e^{\lambda_i x} A E_i = A(e^{\lambda_i x} E_i) = A Y_i \ , \text{ т.е. } Y_i' = A Y_i \ , \ i = 1, \ldots, n \ .$$

Проверим, что $Y_1, \ldots, Y_n$ линейно независимы; для этого составим определитель Вронского:

$$W(x) = e^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)x} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \ ,$$

т.к. собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы. Мы видим, что решения $Y_1, \ldots, Y_n$ действительно образуют фундаментальную систему решений системы (2).

Пример. Пусть дана система

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2 \ , \\ y_2' = 3y_1 + y_2 \ . \end{cases}$$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \ , \qquad \lambda_1 = -2 \ , \lambda_2 = 4 \ .$$

Собственные векторы, отвечающие найденным собственным значениям, определяем из систем:

$$\begin{cases} 3\alpha_{11} + 3\alpha_{21} = 0 \ , \\ 3\alpha_{11} + 3\alpha_{21} = 0 \ , \end{cases} \qquad \begin{cases} -3\alpha_{12} + 3\alpha_{22} = 0 \ , \\ 3\alpha_{12} - 3\alpha_{22} = 0 \ . \end{cases}$$

В качестве собственных векторов можно взять

$$E_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Фундаментальную систему решений образуют вектор-функции

$$Y_1 = e^{-2x} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } Y_2 = e^{4x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Общее решение имеет вид

$$Y = C_1 e^{-2x} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ;$$

в координатах

$$y_1 = -C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} \ , \ y_2 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} \ .$$

Т.к. коэффициенты характеристического уравнения системы (2) вещественны, то его комплексные корни распадаются на пары комплексно сопряженных. Для каждой пары $\alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$, можно построить два линейно независмых решения системы (2).

Найдем ненулевой комплексный вектор

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix} \ ,$$

для которого $AZ = (\alpha + i\beta)Z$. Как и в вещественном случае нетрудно проверить, что комплекснозначная функция

$$e^{(\alpha+i\beta)x}Z = e^{\alpha x}\cos\beta x \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} - e^{\alpha x}\sin\beta x \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} + i\left(e^{\alpha x}\cos\beta x \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} + e^{\alpha x}\sin\beta x \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}\right)$$

является решением системы (2). Отсюда получаем два вещественных решения этой системы:

$$X = e^{\alpha x}\cos\beta x \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} - e^{\alpha x}\sin\beta x \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$
$$Y = e^{\alpha x}\cos\beta x \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} + e^{\alpha x}\sin\beta x \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

На доказательстве линейной независимости решений X и Y не останавливаемся.

Задача (для желающих). Доказать, что решения X и Y линейно независимы.

Пример. Пусть требуется найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 \,, \\ y_2' = 3y_1 + y_2 \,. \end{cases}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 9 = 0 \,, \qquad \lambda_{1,2} = 1 \pm 3i \,.$$

"Комплексный собственный вектор"

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

находим из системы:

$$\begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$
$$\begin{cases} -3iz_1 - 3z_2 = 0 \,, \\ 3z_1 - 3iz_2 = 0 \,. \end{cases}$$

Отсюда видно, что в качестве компонент Z можно взять $z_1 = 1$, $z_2 = -i$. Комплекснозначное решение системы есть

$$e^{(1+3i)x}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = e^x \begin{pmatrix} \cos 3x + i\sin 3x \\ \sin 3x - i\cos 3x \end{pmatrix}.$$

Отделяя вещественную и мнимую части, получаем фундаментальную систему решений исходной системы:

$$Y_1 = e^x \begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y_2 = e^x \begin{pmatrix} \sin 3x \\ -\cos 3x \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим общее решение:

$$Y = C_1 e^x \begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} \sin 3x \\ -\cos 3x \end{pmatrix},$$

или в координатах

$$y_1 = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)\ ,$$
$$y_2 = e^x(C_1\sin 3x - C_2\cos 3x)\ .$$

Если среди корней характеристического уравнения имеются кратные, то следует для каждого вещественного корня λ кратности r найти размерность m соответствующего пространства собственных векторов. Если $m = r$, то, взяв базис $E_1, \ldots, E_r$ этого пространства, получим для λ в точности r линейно независимых решений системы (2):

$$Y_i = e^{\lambda x}E_i\ ,\ i = 1, \ldots, r\ .$$

Если $m < r$, то найти r линейно независимых решений для λ можно методом неопределенных коэффициентов. При этом решения следует искать в виде

$$Y = (C_0 + C_1 x + \ldots + C_{r-m}x^{r-m})\, e^{\lambda x}\ , \tag{3}$$

где

$$C_0 = \begin{pmatrix} C_{10} \\ \ldots \\ C_{n0} \end{pmatrix}\ , \ldots\ ,\ C_{r-m} = \begin{pmatrix} C_{1,r-m} \\ \ldots\ldots \\ C_{n,r-m} \end{pmatrix}$$

– столбцы, компоненты которых подлежат определению. Для этого Y подставляют в исходную систему, сокращают обе части на $e^{\lambda x}$ и приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа. В результате получается система линейных однородных алгебраических уравнений, которой удовлетворяют компоненты столбцов $C_0, \ldots, C_{r-m}$. Решая эту систему, можно получить r линейно независимых решений исходной системы дифференциальных уравнений.

Как известно, комплексные корни (не являющиеся вещественными) уравнения с вещественными коэффициентами распадаются на пары комплексно сопряженных корней одной и той же кратности. Если $\alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$, – одна из таких пар кратности r, то описанную выше процедуру следует применить в комплексном случае для одного из корней $\alpha + i\beta$, а затем отделить в полученных комплекснозначных решениях вещественную и мнимую части. Проделав все это для каждого корня характеристического уравнения, получим фундаментальную систему решений для исходной системы дифференциальных уравнений.

Пример. Пусть требуется найти фундаментальную систему решений системы уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + y_3\ , \\ y_2' = -y_1 + 4y_2 + y_3\ , \\ y_3' = -y_1 + 2y_2 + 3y_3\ . \end{cases}$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ -1 & 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\big((3-\lambda)^2-1\big) = (2-\lambda)^2(4-\lambda);\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4.$$

Для собственного значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ матрица однородной системы, которой удовлетворяют компоненты собственных векторов, имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Здесь без труда находим два линейно независимых собственных вектора, отвечающих этому собственному значению:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ;$$

этим собственным векторам отвечают два линейно независимых решения рассматриваемой системы:

$$Y_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y_2 = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; .$$

Для собственного значения $\lambda_3 = 4$ соответствующую матрицу однородной системы приведем к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; .$$

В качестве собственного вектора можно взять

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; ;$$

этому вектору соответствует такое решение исходной системы

$$Y_3 = e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; .$$

Требуемая фундаментальная система решений найдена:

$$Y_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; , \quad Y_2 = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; , \quad Y_3 = e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; .$$

Пример 2. Найдем фундаментальную систему решений для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \; , \\ y_2' = -y_1 + 3y_2 \; . \end{cases}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 \; , \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2 \; .$$

Для определения компонент собственных векторов имеем однородную систему линейных алгебраических уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \; .$$

Здесь пространство собственных векторов имеет размерность $m = 1$, т.е. меньше кратности $r = 2$ соответствующего собственного значения. Поэтому решение исходной системы ищем в виде

$$Y = (C_0 + C_1 x)\, e^{2x} \; ,$$

где $C_0 = \begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{20} \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$.

Находим производную

$$Y' = (C_1 + 2C_0 + 2C_1 x)\, e^{2x}$$

и подставляем в исходную систему; после сокращения на e^{2x} получаем

$$C_1 + 2C_0 + 2C_1 x = A\,(C_0 + C_1 x)\ ,$$

или

$$\begin{cases} C_1 + 2C_0 = AC_0\ , \\ 2C_1 = A\,C_1\ , \end{cases}$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Отсюда такая система для определения компонент векторов C_0 и C_1:

$$\begin{cases} c_{11} + 2c_{10} = c_{10} + c_{20}\ , \\ c_{21} + 2c_{20} = -c_{10} + 3c_{20}\ , \\ 2c_{11} = c_{11} + c_{21}\ , \\ 2c_{21} = -c_{11} + 3c_{21}\ . \end{cases}$$

Упорядочив неизвестные, получим

$$\begin{cases} c_{10} - c_{20} + c_{11} = 0\ , \\ c_{10} - c_{20} + c_{21} = 0\ , \\ c_{11} - c_{21} = 0\ , \\ c_{11} - c_{21} = 0\ . \end{cases}$$

Матрицу этой системы приведем к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I & III & II & IV \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Неизвестные c_{10} и c_{11} – базисные, c_{20} и c_{21} – свободные. Фундаментальную систему решений образуют решения

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,$$

т.е.

$$C_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ C_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ;$$
$$C_0^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ C_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ .$$

Отсюда такая фундаментальная система решений исходной системы дифференциальных уравнений:

$$Y_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ Y_2 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{2x}\ .$$