кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра
специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 23

Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений. Формула Остроградского-Лиувилля. Теоремы о структуре общего решения однородной и неоднородной систем линейных дифференциальных уравнений. Метод вариации постоянных.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n + b_1 \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n + b_n \ , \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{ij} = a_{ij}(x)$, $b_i = b_i(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$ – функции, непрерывные на некотором промежутке I; a_{ij} называются коэффициентами системы, b_i – свободными членами. Систему (1) можно записать короче:

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j + b_i \ , \ i = 1, \ldots, n \ .$$

В матричной форме система (1) запишется так:

$$Y' = A\,Y + B \ , \tag{2}$$

где $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов, а $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов.

Если все свободные члены равны нулю, то система (1) называется однородной; в противном случае – неоднородной.

Теорема (существования и единственности для системы линейных дифференциальных уравнений). Для любого x_0 из промежутка I, на котором определены и непрерывны коэффициенты и свободные члены системы (1), и для любых чисел $y_{10}, \ldots, y_{n0}$ существует решение этой системы $y_i = y_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, определенное на промежутке I и удовлетворяющее начальным условиям $y_i(x_0) = y_{i0}$, $i = 1, \ldots, n$. Любые два решения этой системы, заданные на промежутке I и удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, совпадают во всех точках этого промежутка.

Как обычно, данную теорему принимаем без доказательства. В сформулированной теореме речь идет о решениях, заданных на всем промежутке I, т.е. о непродолжаемых решениях; всюду в дальнейшем будем рассматривать только такие решения системы (1).

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n \ , \end{cases} \tag{3}$$

или

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \ , \ i = 1, \ldots, n \ .$$

В матричной форме такая систем запишется следующим образом:

$$Y' = AY \ , \tag{4}$$

где Y и A были определены выше.

Теорема (о пространстве решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений). Совокупность всех (непродолжаемых) решений системы линейных однородных уравнений образует линейное пространство.

Доказательство. Для доказательства удобно использовать матричную форму записи (4) данной системы. Пусть Y, Y_1, Y_2 – решения этой системы, α – вещественное число. Тогда

$$\begin{aligned} &(Y_1 + Y_2)' = AY_1 + AY_2 = A(Y_1 + Y_2) \ , \\ &(\alpha Y_1)' = \alpha Y' = \alpha AY = A(\alpha Y) \ . \end{aligned}$$

Мы видим, что $Y_1 + Y_2$ и αY также является решениями системы (4). Прочие требования, входящие в определение линейного пространства, проверяются без труда. Теорема доказана.

Обычным образом вводится понятие линейной зависимости и линейной независимости вектор-функций вида

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \ ,$$

где $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – функции, заданные на некотором промежутке I (одном и том же для всех рассматриваемых функций).

Определителем Вронского системы вектор-функций

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \ldots \\ y_{n1} \end{pmatrix} \ , \ Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ \ldots \\ y_{n2} \end{pmatrix} \ , \ \ldots \ , \ Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ \ldots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$$

называется определитель

$$W = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \ . \tag{5}$$

Теорема (об определителе Вронского линейно зависимой системы вектор-функций). Если система вектор-функций $Y_1, \ldots, Y_n$, заданных на промежутке I, линейно зависима, то определитель Вронского этой системы функций тождественно равен нулю на этом промежутке.

Доказательство. По условию существует равная нулю (т.е. столбцу высоты n, состоящему сплошь из нулей) нетривиальная линейная комбинация вектор-функций $Y_1, \dots, Y_n$. Это означает линейную зависимость столбцов определителя (5). Поэтому данный определитель равен нулю в каждой точке промежутка I. Теорема доказана.

Теорема (об определителе Вронского линейно независимой совокупности решений однородной системы). Если совокупность вектор-функций $Y_1, \dots, Y_n$ линейно независима и состоит из решений однородной системы (4), то определитель Вронского этой совокупности вектор-функций не равен нулю ни в одной точке промежутка, на котором определены (и непрерывны) коэффициенты указанной системы.

Доказательство. Пусть вопреки утверждению теоремы определитель Вронского (5) равен нулю в некоторой точке $x = x_0$, промежутка I, на котором определены (и непрерывны) коэффициенты системы (4). В таком случае столбцы этого определителя в указанной точке линейно зависимы, т.е.

$$Y(x_0) = C_1 Y_1(x_0) + \ldots + C_n Y_n(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $C_1, \dots, C_n$ – нетривиальный набор вещественных чисел. По теореме о пространстве решений однородной системы $Y = Y(x)$ – решение системы (4), причем решение, не равное тождественно нулю, т.к. по условию $Y_1, \dots, Y_n$ линейно независимы. С другой стороны, это решение в точке x_0 удовлетворяет тем же начальным условиям, что и тождественно равное нулю решение системы (4). Это, однако, противоречит теореме существования и **единственности** для линейных систем. Полученное противоречие доказывает теорему.

Совокупность n линейно независимых решений линейной однородной системы (4), взятых в определенном порядке, называется фундаментальной системой решений этой системы дифференциальных уравнений. Существование такой системы решений будет доказано ниже.

Пусть $Y_1, \dots, Y_n$ – совокупность решений системы линейных однородных уравнений (4), $W = W(x)$ – определитель Вронского этой совокупности решений. Тогда

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} \operatorname{Tr} A(t) dt}, \tag{6}$$

где x_0 – произвольная точка промежутка, на котором заданы коэффициенты системы (4), а $\operatorname{Tr} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ – след матрицы коэффициентов этой системы. Формула (6) называется формулой Остроградского-Лиувилля. Докажем ее для $n = 2$, т.е. для системы

$$\begin{cases} y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \\ y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \end{cases}.$$

Для решений этой системы

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix}$$

составим определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}$$

и запишем его производную:

$$W' = \begin{vmatrix} y_{11}' & y_{12}' \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21}' & y_{22}' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} y_{11} + a_{12} y_{21} & a_{11} y_{12} + a_{12} y_{22} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ a_{21}y_{11}+a_{22}y_{21} & a_{21}y_{12}+a_{22}y_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+a_{22})\, W \ ,$$

т.е. $W = W(x)$ удовлетворяет уравнению $y' = (a_{11}+a_{22})\, y$. Этому же уравнению удовлетворяет и функция

$$y(x) = W(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} \left(a_{11}(t)+a_{22}(t)\right) dt} \ ,$$

что проверяется непосредственно. Т.к. $y(x_0) = W(x_0)$, то по теореме существования и единственности для линейного уравнения равенство $y(x) = W(x)$ выполняется на всем промежутке I. Формула Остроградского-Лиувилля доказана.

Теорема (о структуре общего решения линейной однородной системы). Совокупность решений системы линейных однородных уравнений (4) образует линейное пространство размерности n; общее решение такой системы записывается в виде

$$Y = C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n \ ,$$

где $Y_1, \ldots, Y_n$ – базис пространства решений (фундаментальная система решений).

Доказательство. По теореме о пространстве решений линейной однородной системы совокупность решений такой системы образует линейное пространство. Надо лишь доказать, что в этом пространстве существует базис, состоящий из n решений. Рассмотрим решения

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \ldots \\ y_{n1} \end{pmatrix} , \ldots , \ Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ \ldots \\ y_{nn} \end{pmatrix} ,$$

удовлетворяющие следующим начальным условиям

$$\begin{aligned} & y_{11}(x_0) = 1 \ , \ y_{21}(x_0) = \ldots = y_{n1}(x_0) = 0 \ , \\ & y_{22}(x_0) = 1 \ , \ y_{12}(x_0) = y_{32}(x_0) = \ldots = y_{n2}(x_0) = 0 \ , \\ & y_{nn}(x_0) = 1 \ , \ y_{1n}(x_0) = \ldots = y_{n-1,n}(x_0) = 0 \ , \end{aligned}$$

где x_0 – произвольная точка промежутка I, на котором заданы коэффициенты системы (4). Существование таких решений обеспечивается теоремой **существования** и единственности. Решения $Y_1, \ldots, Y_n$ линейно независимы, т.к. определитель Вронского этой системы решений в точке x_0 является определителем единичной матрицы и равен 1, т.е. отличен от нуля. Пусть дано какое-либо решение системы (4)

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} .$$

Тогда, очевидно, в точке x_0 выполняется равенство

$$Y = y_{10} Y_1 + \ldots + y_{n0} Y_n \ , \tag{7}$$

где $y_{10} = y_1(x_0), \ldots, y_{n0} = y_n(x_0)$. Это означает, что решения Y и $y_{10}Y_1 + \ldots + y_{n0}Y_n$ системы (4) удовлетворяют одним и тем же начальным условиям. Поэтому равенство (7) справедливо не только в точке x_0, но и на всем промежутке I (по теореме существования и **единственности**). Таким образом, доказано, что решения $Y_1, \ldots, Y_n$ линейно независимы, и через них линейно выражается всякое решение системы (4). Следовательно, указанные решения образуют базис пространства решений, размерность этого пространства равна n, а общее решение записывается в виде

$$Y = C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n \ .$$

Теорема доказана.

Теорема (о структуре общего решения неоднородной системы). Общее решение неоднороной системы (2) может быть записано в виде

$$Y = Y_0 + C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n \ , \qquad (8)$$

где Y_0 – частное решение неоднородной системы, а $Y_1, \ldots, Y_n$ – фундаментальная система решений соответствующей однородной системы.

Доказательство. Имеем

$$Y' = (Y_0 + C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n)' = Y_0' + (C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n)' = AY_0 + B + A(C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n) =$$
$$= A(Y_0 + C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n) + B = AY + B \ ,$$

т.е. $Y' = AY + B$, и Y – решение системы (2).

Пусть теперь дана произвольная точка $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$, где x_0 берется из промежутка, на котором заданы коэффициенты системы. Чтобы решение (8) удовлетворяло начальным условиям, определяемым данной точкой, надо подобрать константы $C_1, \ldots, C_n$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{array}{l} y_{10}(x_0) + C_1 y_{11}(x_0) + \ldots + C_n y_{1n}(x_0) = y_1^{(0)} \\ y_{20}(x_0) + C_1 y_{21}(x_0) + \ldots + C_n y_{2n}(x_0) = y_2^{(0)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n0}(x_0) + C_1 y_{n1}(x_0) + \ldots + C_n y_{nn}(x_0) = y_n^{(0)} \ , \end{array}$$

где коэффициентами системы служат значения в точке x_0 компонент решений $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$. Такая система всегда разрешима (и имеет единственное решение), т.к. ее определитель есть определитель Вронского фундаментальной системы решений $Y_1, \ldots, Y_n$, вычисленный в точке x_0. Таким образом, оба требования, входящие в определение общего решения, выполнены. Теорема доказана.

Рассмотрим метод вариации постоянных для отыскания частного решения неоднородной системы

$$Y' = AY + B \ . \qquad (2)$$

Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ – фундаментальная система решений соответствующей однородной системы. Тогда частное решение неоднородной системы (2) можно искать в виде

$$Y = C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n \ , \qquad (8)$$

где $C_1 = C_1(x), \ldots, C_n = C_n(x)$ – некоторые функции. Подберем их так, чтобы выполнялось равенство

$$C_1' Y_1 + \ldots + C_n' Y_n = B \ .$$

Это возможно, т.к. определитель Вронского фундаментальной системы решений отличен от нуля. Проверим, что для $C_1, \ldots, C_n$ вектор-функция (8) удовлетворяет системе (2). Имеем

$$Y' = (C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n)' = C_1' Y_1 + \ldots + C_n' Y_n + C_1 Y_1' + \ldots + C_n Y_n' =$$
$$= B + C_1 A Y_1 + \ldots + C_n A Y_n = B + A(C_1 Y_1 + \ldots + C_n Y_n) = AY + B \ ,$$

т.е. $Y' = AY + B$, и наше утверждение справедливо.