кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра
специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 22

Нормальные системы дифференциальных уравнений. Автономные системы дифференциальных уравнений. Фазовое пространство и фазовые траектории. Задача и теорема Коши. Частные и общее решения. Сведение дифференциального уравнения высшего порядка к нормальной системе дифференциальных уравнений первого порядка. Сведение нормальной системы к дифференциальному уравнению высшего порядка (вывод для $n = 2$). Первые интегралы системы. Понижение порядка системы дифференциальных уравнений при помощи первых интегралов. Интегрируемые комбинации. Симметрическая форма записи нормальной автономной системы дифференциальных уравнений.

Нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений называется система вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}, \tag{1}$$

или

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n)\ , \quad i = 1, \ldots, n\ . \tag{2}$$

В системе (1) (или (2)) x – независимая переменная, $y_1, \ldots, y_n$ – неизвестные функции этой переменной, $f_1, \ldots, f_n$ – заданные функции. Мы будем считать, что эти последние функции определены на некоторой области $(n+1)$-мерного пространства переменных $x, y_1, \ldots, y_n$. Решением системы (1) называется совокупность $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ дифференцируемых на некотором интервале I функций, которая обращает все уравнения этой системы в верные равенства при любом $x \in I$. График решения (т.е. кривая $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)\ , x \in I$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}_{x, y_1, \ldots, y_n}$) называется интегральной кривой системы (1). Нормальная система называется автономной, если правые части этой системы не зависят явно от x:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(y_1, \ldots, y_n) \end{cases}. \tag{3}$$

Введя новую неизвестную функцию, всякую систему можно свести к автономной: если положить $y_{n+1} = x$, то система (1) перепишется в виде

$$y_i' = f_i(y_{n+1}, y_1, \ldots, y_n)\ , \quad i = 1, \ldots, n\ ,$$
$$y_{n+1}' = 1\ ,$$

и мы получим автономную систему. Область G пространства переменных $y_1, \dots, y_n$, на которой заданы правые части системы (3), называются фазовым пространством; если $y_i = y_i(x),\ i = 1, \dots, n,\ x \in I$ – решение указанной системы, то кривая в области G, задаваемая этими уравнениями, называется фазовой траекторией данной автономной системы.

Задача Коши для системы (1) ставится следующим образом. Дана точка $(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0})$, принадлежащая области определения правых частей этой системы; требуется найти решение $y_i = y_i(x),\ i = 1, \dots, n$, удовлетворяющее начальным условиям $y_i(x_0) = y_{i0},\ i = 1, \dots, n$.

Теорема (Коши существования и единственности для нормальной системы). Пусть правые части системы

$$y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n)\ , \quad i = 1, \dots, n\ ,$$

определены, непрерывны и имеют непрерывные частные производные по переменным $y_1, \dots, y_n$ в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x, y_1, \dots, y_n}$. Тогда для любой точки $(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0}) \in G$ существует решение данной системы, удовлетворяющее начальным условиям $y_i'(x_0) = y_{i0}\ , \quad i = 1, \dots, n$. Любые два решения этой системы, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, совпадают всюду, где они оба определены. Без доказательства.

Общим решением системы (1) называется совокупность функций

$$y_i = y_i(x, C_1, \dots, C_n)\ , \quad i = 1, \dots, n\ , \tag{4}$$

определенных на некоторой области D пространства $\mathbb{R}^{n+1}_{x, C_1, \dots, C_n}$, обладающая следующими свойствами.

1. Для любого набора $C_1, \dots, C_n$, при котором существует хотя бы один интервал I такой, что при любом $x \in I$ точка $(x, C_1, \dots, C_n) \in D$, функции (4) задают решение системы (1) на любом таком интервале.

2. Для любой точки $(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0})$ из области определения правых частей системы (1) найдется набор $(C_{10}, \dots, C_{n0})$ такой, что $y_i(x_0, C_{10}, \dots, C_{n0}) = y_{i0},\ i = 1, \dots, n$.

Решение системы (1), получающееся из общего решения при фиксированных значениях $C_1, \dots, C_n$, называется частным решением этой системы. Решить систему – значит найти все ее решения (или найти частное решение, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям).

Всякую систему, в которой уравнения разрешены относительно старших производных, а число уравнений равно числу неизвестных, можно с помощью введения новых неизвестных функций свести к нормальной системе. Рассмотрим соответствующий прием для системы из двух уравнений:

$$\begin{aligned} y_1^{(n)} &= f_1(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m-1)})\ , \\ y_2^{(m)} &= f_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m-1)})\ . \end{aligned}$$

Пусть $y_{11} = y_1,\ y_{12} = y_1', \dots, y_{1n} = y_1^{(n-1)}, y_{21} = y_2,\ y_{22} = y_2', \dots, y_{2m} = y_2^{(m-1)}$. Относительно этих функций получаем такую (нормальную) систему:

$$\begin{aligned} & y_{11}' = y_{12}, \dots, y_{1,n-1}' = y_{1n}\ , \\ & y_{1n}' = f_1(x, y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2m})\ , \\ & y_{21}' = y_{22}, \dots, y_{2,m-1}' = y_{2m}\ , \\ & y_{2m}' = f_2(x, y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2m})\ . \end{aligned}$$

Ясно, что одно уравнение n -го порядка этим приемом будет сведено к нормальной системе относительно n неизвестных функций. В принципе верно и обратное: при определенных условиях нормальную систему можно свести к одному уравнению. Пусть имеется нормальная система двух уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \ . \end{cases}$$

Продифференцируем по x первое уравнение и подставим в получившееся выражение вместо y_2' правую часть второго уравнения системы:

$$y_1'' = \frac{\partial f_1(x, y_1, y_2)}{\partial x} + \frac{\partial f_1(x, y_1, y_2)}{\partial y_1}\, y_1' + \frac{\partial f_1(x, y_1, y_2)}{\partial y_2} \cdot f_2(x, y_1, y_2) \ .$$

Затем из первого уравнения системы определим y_2 как функцию x , y_1 , y_1', т.е. $y_2 = y_2(x, y_1, y_1')$ и поставим эту функцию вместо y_2 в полученное ранее равенство. Т.о., следствием данной системы является уравнение второго порядка относительно одной неизвестной функции $y_1 = y_1(x)$. Аналогичным приемом можно получить и уравнение относительно $y_2 = y_2(x)$.

Рассмотрим снова нормальную систему (2):

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \ , \quad i = 1, \ldots, n \ , \tag{2}$$

правые части которой определены на области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x, y_1, \ldots, y_n}$. Всегда будем предполагать, что для этой системы выполнены требования теоремы существования и единственности. Пусть имеется функция $\Phi(x, y_1, \ldots, y_n)$, заданная на области G. Выражение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\, f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \ ,$$

в котором все частные производные вычисляются в точке $(x, y_1, \ldots, y_n)$, называется производной функции Φ в силу системы (2). Функция $\Phi : G \to \mathbb{R}$ называется первым интегралом системы (2), если для любого решения этой системы $y_i = y_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, заданного на некотором интервале I, функция

$$\Phi\big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\big)$$

постоянна на этом интервале.

Теорема (об условиях, при которых функция является первым интегралом системы). Пусть в системе (2) правые части непрерывно дифференцируемы в области G по всем переменным. Для того, чтобы непрерывно дифференцируемая функция

$$\Phi \ : \ G \to \mathbb{R}$$

была первым интегралом этой системы необходимо и достаточно, чтобы производная этой функции, составленная в силу системы, равнялась нулю всюду в области G.

Доказательство. Необходимость. Пусть Φ – первый интеграл системы (2), и пусть $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$ – произвольная точка области G. По теореме **существования** и единственности найдется решение $y_i = y_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, системы (2), заданное на некотором интервале I, содержащем точку x_0, удовлетворяющее начальным условиям $y_i(x_0) = y_0$, $i = 1, \ldots, n$. Далее, т.к. Φ – первый интеграл системы (2), то функция $\Phi\big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\big)$ постоянна на интервале I. Поэтому

$$\frac{d\,\Phi}{d\,x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\, y_i'(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\, f_i\big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\big) = 0$$

для любого $x \in I$ $\Big($ все частные производные функции Φ вычисляются в точке $\big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\big)$ $\Big)$. Подставляя в последнее равенство $x = x_0$, получим, что производная в силу системы

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\, f_i(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$$

равна нулю в точке $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$ области G. Т.к. последняя точка была взята произвольно, то эта производная равна нулю всюду в области G. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для функции Φ производная в силу системы (2) равна нулю всюду в области G. Рассмотрим произвольное решение этой системы $y_i = y_i(x)$ $, i = 1, \ldots, n$, заданное на некотором интервале I. Требуется доказать, что функция

$$\Phi\big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\big) \tag{5}$$

постоянна на интервале I. Продифференцируем эту функцию по x на указанном интервале:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\, y_i'(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\, f_i\big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\big) = 0\ ,$$

т.к. $\big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)\big) \in G$, и производная функции Φ в силу системы равна нулю в каждой точке этой области. Мы видим, что производная функции (5) равна нулю в каждой точке интервала I. Поэтому Φ постоянна на этом интервале. Достаточность доказана. Теорема доказана.

Для автономной системы

$$y_i' = f_i(y_1, \ldots, y_n),\ i = 1, \ldots, n\ , \tag{6}$$

правые части которой заданы на области $G \subset \mathbb{R}^n_{y_1,\ldots,y_n}$, первым интегралом называется такая функция $\Phi\ :\ G \to \mathbb{R}$, что для любого решения $y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n),\ i = 1, \ldots, n$, системы (6), заданного на интервале I, функция

$$\Phi\big(y_1(x), \ldots, y_n(x)\big)$$

постоянна на этом интервале. Другими словами, функция Φ постоянна вдоль всякой фазовой траектории системы (4). Для функции Φ, заданной на области G, производной в силу системы (4) называется

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\, f_i(y_1, \ldots, y_n)\ , \tag{7}$$

где все частные производные вычисляются в точке $(y_1, \ldots, y_n)$. Для автономных систем справедлив аналог теоремы об условиях, при которых функция является первым интегралом: в предположении непрерывной дифференцируемости функции Φ и правых частей системы (6) для того, чтобы Φ была первым интегралом необходимо и достаточно, чтобы производная функции Φ в силу системы, т.е. функция (7), равнялась нулю во всех точках области G.

Если известен первый интеграл Φ системы (2), то, разрешая уравнение

$$\Phi(x, y_1, \ldots, y_n) = C$$

относительно, например, y_n, получим

$$y_n = y_n(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, C)\ .$$

Подставляя правую часть этого равенства вместо y_n в первые $n-1$ уравнений системы (2), мы перейдем к системе из $n-1$ уравнений относительно $n-1$ неизвестных функций. Если найдены n независимых первых интегралов системы (2):

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = (x, y_1, \ldots, y_n) = C_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\Phi_n = (x, y_1, \ldots, y_n) = C_n \ , \end{aligned} \tag{8}$$

то, разрешая эти уравнения относительно $y_1, \ldots, y_n$, получим общее решение исходной системы:

$$y_1 = y_1(x, C_1, \ldots, C_n), \ldots, y_n = y_n(x, C_1, \ldots, C_n) \ .$$

Равенства (8) образует общий интеграл системы (2); точное определение этого понятия не рассматриваем. Независимость функций $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ понимается в том смысле, что отличен от нуля определитель (якобиан):

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

Интегрируемой комбинацией системы (2) называется дифференциальное уравнение, являющееся следствием этой системы и легко интегрирующееся. Иногда систему дифференциальных уравнений удается решить, найдя достаточное количество интегрируемых комбинаций.

Пример. Пусть дана система

$$y_1' = y_2 \ , \ y_2' = y_1 \ .$$

Складывая уравнения системы, получаем:

$$(y_1 + y_2)' = y_1 + y_2 \ , \ \text{т.е. } y_1 + y_2 = C_1 e^x \ .$$

Вычитая из первого уравнения второе, находим еще одну интегрируемую комбинацию:

$$(y_1 - y_2)' = -(y_1 - y_2) \ , \ \text{т.е. } y_1 - y_2 = C_2 e^{-x} \ .$$

Общее решение данной системы запишется в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}\left(C_1 e^x + C_2 e^{-x}\right) \ , \\ y_2 &= \frac{1}{2}\left(C_1 e^x - C_2 e^{-x}\right) \ . \end{aligned}$$

Коэффициент 1/2 перед скобкам в правых частях "поглощается" произвольными постоянными; поэтому общее решение можно записать и так:

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \ , \quad y_2 = C_1 e^x - C_2 e^{-x} \ .$$

Другая форма записи общего решения получится, если привлечь гиперболические функции:

$$y_1 = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x \ , \quad y_2 = C_1 \operatorname{sh} x + C_2 \operatorname{ch} x \ .$$

Нахождение интегрируемых комбинаций иногда облегчается записью системы уравнений в симметрической форме. Для автономной системы (6) такая запись имеет вид:

$$\frac{d\,y_1}{f_1(y_1,\ldots,y_n)} = \ldots = \frac{d\,y_n}{f_n(y_1,\ldots,y_n)}\ .$$

При использовании симметрической формы записи для нахождения интегрируемых комбинаций нередко оказывается полезным свойство равных отношений: если даны равные дроби $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$ и произвольные числа $R_1,\ldots,R_n$, то

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{R_1a_1 + R_2a_2 + \ldots + R_na_n}{R_1b_1 + R_2b_2 + \ldots + R_nb_n}\ .$$

Пример. Пусть требуется найти первый интеграл системы

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}\ ,$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ – неизвестные функции от переменной t. Используя свойство равных отношений, получаем

$$\frac{xdx + ydy}{2xyz} = \frac{dz}{xy}\ .$$

Отсюда

$$xdx + ydy = 2zdz\ ;$$

$$\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) = z^2 + C\ .$$

Последнее равенство задает первый интеграл рассматриваемой системы.