кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций
для студентов 1-го курса 2-го семестра
специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекции 20-21

Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения. Построение общего решения по корням характеристического уравнения (вывод для $n = 2$). Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения. Теорема о наложении частных решений. Метод Лагранжа вариации постоянных (вывод для $n = 2$). Структура частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \ , \tag{1}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ – вещественные числа. Уравнение

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

называется характеристическим уравнением дифференциального уравнения (1). Пусть λ_0 – вещественный корень характеристического уравнения. Тогда $y_0(x) = e^{\lambda_0 x}$ есть решение уравнения (1). В самом деле, $y_0^{(k)}(x) = \lambda_0^k e^{\lambda_0 x}$ (доказывается по индукции), поэтому

$$y_0^{(n)} + a_1 y_0^{(n-1)} + \ldots + a_n y_0 = (\lambda_0^n + a_2\lambda_0^{n-1} + \ldots + a_n) \cdot e^{\lambda_0 x} = 0 \ .$$

Пусть имеется комплекснозначная функция $w(x) = u(x) + i\,v(x)$ вещественной переменной x. Считая, что $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы (соответствующее число раз), положим по определению

$$w^{(k)}(x) = u^{(k)} + i\,v(k)(x), \quad k = 0, 1, \ldots \ .$$

При таком определении сохраняются правила дифференцирования суммы, произведения и частного, а также многие другие свойства операции дифференцирования. Далее, если $z = x + i\,y$, то будем считать по определению, что

$$e^z = e^{x+i\,y} = e^x(\cos y + i\ \sin y) \ .$$

Пусть $\lambda = \alpha + i\,\beta$, и пусть x - вещественная переменная. Тогда

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x + i\,\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\ \sin\beta x) \ .$$

Поэтому

$$(e^{\lambda x})' = \alpha\, e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\,\sin\beta x) + e^{\alpha x}(-\beta\sin\beta x + i\,\beta\cos\beta x) = (\alpha + i\,\beta)\, e^{(\alpha+i\,\beta)\,x} = \lambda\, e^{\lambda x}\ .$$

По индукции можно доказать формулу

$$(e^{\lambda x})^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}\ , \quad k = 0, 1, 2\dots\ .$$

Нетрудно проверить, что если функция $w(x) = u(x) + i v(x)$ есть решение уравнения (1), то ее вещественная часть $u(x)$ и мнимая часть $v(x)$ также будут решениями этого уравнения (при вещественных коэффициентах $a_0, a_1, \dots, a_n$). С помощью равенства $(e^{\lambda x})^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$ можно без труда проверить, что если $\lambda_0 = \alpha + i\beta \neq 0$, есть комплексный корень характеристического уравнения, то $w(x) = e^{\lambda_0 x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ есть решение уравнения (1), а тогда и функции $u(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $v(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ также будут решениями этого уравнения. Мы видим, что, зная корни характеристического уравнения, можно находить частные решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Если известны все корни характеристического уравнения, то можно построить и общее решение соответствующего дифференциального уравнения. Подробно рассмотрим уравнение второго порядка. Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0\ , \tag{2}$$

где a_1 и a_2 - вещественные числа. Напишем соответствующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0\ . \tag{3}$$

Для уравнения (3) возможен один (и только один) из следующих случаев.

1. Корни уравнения (3) вещественны и различны. Обозначим эти корни λ_1 и λ_2. Тогда фундаментальную систему решений уравнения (2) образуют функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$, а общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\ .$$

Здесь нужно проверить лишь линейную независимость решений y_1 и y_2; чтобы убедиться в этом, составим определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1\cdot x} & e^{\lambda_2\cdot x} \\ \lambda_1\, e^{\lambda_1\cdot x} & \lambda_2\, e^{\lambda_2\cdot x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1\cdot x}\cdot e^{\lambda_2\cdot x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)\cdot x}\cdot(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0\ .$$

Таким образом, y_1 и y_2 линейно независимы и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений уравнения (2).

2. Уравнение (3) имеет один вещественный корень кратности 2; обозначим этот корень λ_0. Тогда фундаментальную систему решений уравнения (2) образуют функции $y_1 = e^{\lambda_0\cdot x}$ и $y_2 = x\, e^{\lambda_0\cdot x}$, а общее решение этого уравнения есть

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{\lambda_0\cdot x}\ .$$

Проверим, что y_2 есть решение уравнения (2). Т.к. λ_0 - корень кратности 2 характеристического уравнения (3), то $\lambda_0^2 + a_1\lambda_0 + a_2 = 0$ и $2\lambda_0 + a_1 = 0$. Далее

$$\begin{array}{l} y_2' = (1 + \lambda_0 x)\cdot e^{\lambda_0\cdot x}\ , \\ y_2'' = (2\lambda_0 + \lambda_0^2 x)\cdot e^{\lambda_0\cdot x} \end{array}\ .$$

Отсюда

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = e^{\lambda_0 \cdot x}(2\lambda_0 + \lambda_0^2 x + a_1 + a_1\lambda_0 x + a_2 x) = e^{\lambda_0 \cdot x}\left(2\lambda_0 + a_1 + x\left(\lambda_0^2 + a_1\lambda_0 + a_2\right)\right) = 0 \ ,$$

т.е. y_2 – решение уравнения (2). Проверим линейную независимость y_1 и y_2:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_0 \cdot x} & x \cdot e^{\lambda_0 \cdot x} \\ \lambda_0 \, e^{\lambda_0 \cdot x} & (1+\lambda_0 x)\, e^{\lambda_0 \cdot x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_0 \cdot x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x \\ \lambda_0 & 1+\lambda_0 x \end{vmatrix} = e^{2\lambda_0 \cdot x} \neq 0 \ .$$

Таким образом, y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений уравнения (2).

3. Характеристическое уравнение (3) имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\,\beta$, $\beta \neq 0$. В этом случае фундаментальная система решений уравнения (2) имеет вид

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \ , \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x \ ,$$

а общее решение записывается так:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \ .$$

Здесь в проверке нуждается лишь линейная независимость решений y_1 и y_2; имеем

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha \cdot x} \cos \beta x & e^{\alpha \cdot x} \sin \beta x \\ e^{\alpha \cdot x}(\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) & e^{\alpha \cdot x}(\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\alpha \cdot x} \cdot \begin{vmatrix} \cos \beta x & \sin \beta x \\ \alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x & \alpha \sin \beta + \beta \cos \beta x \end{vmatrix} = \beta\, e^{2\alpha \cdot x}(\cos^2 \beta x + \sin^2 \beta x) = \beta\, e^{2\alpha \cdot x} \neq 0 \ .$$

Поэтому y_1 и y_2 линейно независимы.

В случае уравнения n-го порядка каждому вещественному корню λ_0 характеристического уравнения кратности r ставим в соответствие систему функций $e^{\lambda_0 x}$, $xe^{\lambda_0 x}$, . . . , $x^{r-1}e^{\lambda_0 x}$, а каждой паре комплексно сопряженных корней $\alpha \pm i\,\beta$, $\beta \neq 0$, кратности s – систему функций

$$\begin{array}{llll} e^{\alpha \cdot x} \cos \beta x \ , & x e^{\alpha \cdot x} \cos \beta x \ , & \ldots \ , & x^{s-1} e^{\alpha \cdot x} \cos \beta x \ , \\ e^{\alpha \cdot x} \sin \beta x \ , & x e^{\alpha \cdot x} \sin \beta x \ , & \ldots \ , & x^{s-1} e^{\alpha \cdot x} \sin \beta x \ . \end{array}$$

Можно доказать, что все такие функции являются решениями уравнения (1), а совокупность этих функций образует фундаментальную систему решений указанного уравнения.

Рассмотрим теперь линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = b(x) \ , \tag{4}$$

где $a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x)$ – функции, непрерывные на промежутке I.

Теорема (о структуре общего решения неоднородного линейного уравнения). Общее решение уравнения (4) может быть записано в виде

$$y = y_0(x) + C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) \ , \tag{5}$$

где $y_0(x)$ – частное решение уравнения (4), а $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения; $C_1, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Доказательство. Уравнение (4) с помощью рассмотренного выше дифференциального оператора можно записать так:

$$L[y] = b(x) \ ;$$

соответствующее однородное уравнение запишется в виде

$$L[y] = 0 \ .$$

Применяя этот дифференциальный оператор к (5), получим:

$$L[y] = L[y_0 + C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n] = L[y_0] + C_1 L[y_1] + \ldots + C_n L[y_n] = b(x) \ ,$$

и, следовательно, при любых $C_1, \ldots, C_n$ функция y, определяемая равенством (5), является решением уравнения (4).

Проверим теперь, что при соответствующем подборе констант $C_1, \ldots, C_n$ можно получить решение, удовлетворяющее любым начальным условиям

$$y(x_0) = y_0 \ , \ y'(x_0) = y_0' \ , \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \ .$$

Для определения констант $C_1, \ldots, C_n$ имеем такую систему:

$$\begin{array}{l} y(x_0) + C_1 y_1(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)}(x_0) + C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \ . \end{array}$$

Определитель этой системы

$$W(x_0) = \left| \begin{array}{lll} y_1(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{array} \right| \neq 0 \ ,$$

т.к. $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (4). Поэтому требуемый набор постоянных $C_1, \ldots, C_n$ существует. Оба условия, входящие в определение общего решения, проверены. Теорема доказана.

Теорема (о наложении частных решений). Пусть имеются два линейных неоднородных уравнения

$$L[y] = b_1(x) \quad \text{и} \quad L[y] = b_2(x) \ ;$$

где $L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y$, и пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – решения этих уравнений. Тогда $y_1(x) + y_2(x)$ будет решением уравнения $L[y] = b_1(x) + b_2(x)$.

Доказательство. Имеем $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = b_1(x) + b_2(x)$, т.е. $y_1 + y_2$ – решение уравнения $L[y] = b_1(x) + b_2(x)$. Теорема доказана.

Рассмотрим метод Лагранжа вариации постоянных. Пусть $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ – фундаментальная система решений однородного уравнения $L[y] = 0$. Тогда частное решение неоднородного уравнения $L[y] = b(x)$ можно искать в виде

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x) \ , \tag{6}$$

где функции $C_1 = C_1(x), \ldots, C_n = C_n(x)$ определяются из системы

$$\begin{array}{l} C_1' y_1 + \ldots + C_n' y_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = b(x) \ . \end{array}$$

Т.к. определитель

$$\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \ ,$$

то из этой системы $C_1', \ldots, C_n'$ определяются однозначно, а сами функции $C_1, \ldots, C_n$ – с точностью до произвольных постоянных. Если в (6) подставить именно эти функции $C_1 = C_1(x), \ldots, C_n = C_n(x)$, то получим частное решение уравнения (4).

Докажем последнее утверждение для $n = 2$. Уравнение в этом случае имеет вид

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) \ ,$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, $b(x)$ – непрерывные на некотором промежутке функции. Частное решение данного уравнения ищем в виде

$$y(x) = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 \ ,$$

где $y_1(x),\ y_2(x)$ – фундаментальная система решений однородного уравнения

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \ ,$$

а $C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$ – подлежащие определению функции. Предположим, что они удовлетворяют системе:

$$\begin{aligned} &C_1'\, y_1 + C_2'\, y_2 = 0 \\ &C_1'\, y_1' + C_2'\, y_2' = b(x) \ . \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &y'(x) = C_1'\, y_1 + C_2'\, y_2 + C_1\, y_1' + C_2\, y_2' = C_1\, y_1' + C_2\, y_2' \ ; \\ &y''(x) = C_1'\, y_1' + C_2'\, y_2' + C_1\, y_1'' + C_2\, y_2'' = b\,(x) + C_1\, y_1'' + C_2\, y_2'' \ . \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y &= b(x) + C_1\, y_1'' + C_2\, y_2'' + a_1(x)(C_1\, y_1' + C_2\, y_2') + a_2(x)(C_1\, y_1 + C_2\, y_2) = \\ &= b(x) + C_1\big(y_1'' + a_2(x)y_1' + a_2(x)y_1\big) + C_2\big(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2\big) = b(x) \ , \end{aligned}$$

т.е. $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$, и наше утверждение доказано.

Квазимногочленом называется сумма нескольких слагаемых вида

$$e^{\alpha\cdot x}\big(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\big) \ , \tag{7}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены.

Частное решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$L[y] = b(x)$$

и квазимногочленом в правой части рекомендуется искать методом неопределённых коэффициентов (методом подбора). Для каждого слагаемого вида (7), входящего в правую часть решаемого уравнения, частное решение уравнения $L[y] = e^{\alpha\cdot x}\big(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\big)$ ищется в виде

$$x^r e^{\alpha\cdot x}\big(R(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x\big) \ , \tag{8}$$

где $r = 0$, если $\alpha + i\,\beta$ не есть корень характеристического уравнения, и r равно кратности этого корня в противном случае; $R(x)$ и $S(x)$ – многочлены с неопределёнными коэффициентами, степень каждого из которых равна максимальной из степеней $P(x)$ и $Q(x)$. Для нахождения неопределённых коэффициентов выражение (8) подставляется в соответствующее уравнение, и затем приравниваются коэффициенты при подобных членах слева и справа. После того, как частные решения найдены для всех слагаемых, входящих в $b(x)$, частное решение исходного уравнения определяется с помощью теоремы о наложении решений.

Пример. Пусть требуется найти частное решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = x + 2e^x \ .$$

Здесь характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет единственный корень $\lambda = 1$ кратности 2. Найдем частное решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = x \ . \tag{9}$$

Здесь $\alpha = \beta = 0$; максимальная степень многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ равна 1. Решение ищем в виде

$$y_{10} = ax + b \ .$$

Подставляя это в уравнение (9), получаем $-2a+ax+b = x$, откуда $a = 1$, $b = 2$ и $y_{10} = x+2$.

Для уравнения

$$y'' - 2y' + y = 2e^x$$

$\alpha = 1$, $\beta = 0$, $r = 2$; частное решение ищем в виде $y_{20} = ax^2e^x$. Подставляя это в уравнение, получаем

$$a(x^2 + 4x + 2)e^x - 2a(x^2 + 2x)e^x + ax^2e^x = 2e^x \ , \quad a = 1 \ ;$$

частное решение $y_{20} = x^2e^x$. Для исходного уравнения частное решение y_0 находится по теореме о наложении решений:

$$y_0 = y_{10} + y_{20} = x + 2 + x^2e^x \ .$$