кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра
специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекции 18-19

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка, однородные и неоднородные. Теорема существования и единственности решения. Дифференциальный оператор $L[y]$, его свойства. Линейное пространство решений однородного линейного дифференциального уравнения. Линейная зависимость и независимость системы функций на промежутке. Определитель Вронского (вронскиан). Теорема о вронскиане системы линейно независимых решений однородного линейного дифференциального уравнения. Теорема о структуре общего решения однородного линейного дифференциального уравнения. Размерность пространства решений однородного линейного дифференциального уравнения. Фундаментальная система решений однородного линейного дифференциального уравнения. Формула Остроградского-Лиувилля и ее следствия. Понижение порядка однородного линейного уравнения (при известном частном решении).

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = b(x) \ , \tag{1}$$

где функции $a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x)$ определены на некотором промежутке I числовой прямой; мы будем считать, что все эти функции непрерывны на указанном промежутке. Если $b(x) \equiv 0$, то уравнение (1) называется однородным, в противном случае (т.е. если $b(x)$ отлична от тождественного нуля) – неоднородным.

Теорема (о существовании и единственности решения линейного уравнения n-го порядка). Для любой точки $x_0 \in I$ и для любых чисел $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ существует решение $y = y(x)$ уравнения (1), определенное на всем промежутке I и удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Любые два решения, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, совпадают во всех точках промежутка I.

Эту теорему принимаем без доказательства.

В дальнейшем будем рассматривать лишь те решения уравнения (1), которые заданы на всем промежутке I (т.н. непродолжаемые решения).

Пусть X – множество всех n раз непрерывно дифференцируемых функций на интервале I; Y – множество всех непрерывных функций на этом интервале. Легко проверить, что X и Y – линейные пространства относительно обычных операций сложения функций и умножения их на числа. Нулём этих пространств служит функция, тождественно равная нулю на промежутке I.

Отображение $L : X \to Y$, определяемое равенством

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y \ ,$$

является линейным оператором, т.к.

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] \ , \quad L[\alpha y] = \alpha L[y]$$

для любых элементов y, y_1, y_2 пространства X и для любого числа α. Оба эти равенства проверяются непосредственно. Линейный оператор $L[y]$ называется линейным дифференциальным оператором n-го порядка.

Теорема (о пространстве решений линейного однородного уравнения n-го порядка). Совокупность всех решений линейного однородного уравнения n-го порядка образует линейное пространство.

Доказательство. Уравнение (1) при $b(x) \equiv 0$ можно записать в виде

$$L[y] = 0 \ . \tag{2}$$

Если y, y_1, y_2 – произвольные решения этого уравнения и α – вещественное число, то в силу линейности оператора L имеем

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + K[y_2] = \overline{0} \ , \quad L[\alpha y] = \alpha L[y] = \overline{0} \ ,$$

где $\overline{0}$ означает функцию, тождественно равную нулю на промежутке I. Мы видим, что $y_1 + y_2$ и αy – также решения уравнения (2). Прочие условия из определения линейного пространства также проверяются без труда. Поэтому совокупность решений уравнения (2) образует линейное пространство. Теорема доказана.

Для системы функций

$$y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x) \ ,$$

заданных на промежутке I, обычным образом вводится понятие линейной зависимости; такая система называется линейно зависимой, если существует нетривиальная равная нулю линейная комбинация этих функций:

$$\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0 \ , \quad \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 > 0 \ .$$

В противном случае (т.е. когда тождественному нулю может равняться лишь тривиальная линейная комбинация этих функций) система функций называется линейно независимой.

Если система функций $y_1, \ldots, y_n$, заданных на промежутке I, состоит из $n-1$ раз дифференцируемых функций, то определителем Вронского (вронскианом) этой системы функций называют определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \ .$$

Теорема (об определителе Вронского линейно зависимой системы функций). Если система $n-1$ раз дифференцируемых на промежутке I функций $y_1, \ldots, y_n$ линейно зависима, то определитель Вронского этой системы функций тождественно равен нулю.

Доказательство. Т.к. функции $y_1, \ldots, y_n$ линейно зависимы, то существует нетривиальная линейная комбинация этих функций, тождественно равная нулю:

$$\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0 \ .$$

Дифференцируя это равенство $n-1$ раз, получим

$$\begin{array}{l} \alpha_1 y_1' + \ldots + \alpha_n y_n' \equiv 0 \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \ . \end{array} \quad .$$

Мы видим, что столбцы определителя Вронского рассматриваемой системы функций линейно зависимы, и, следовательно, этот определитель равен нулю. Теорема доказана.

Замечание. Равенство нулю определителя Вронского является лишь необходимым условием линейной зависимости функций. Например, функции $y_1(x) = x^2$ и $y_2(x) = x|x|$ линейно независимы на интервале $(-1;1)$, однако определитель Вронского этой системы функций равен нулю в каждой точке указанного интервала.

Теорема (об определителе Вронского линейно независимой системы решений линейного однородного уравнения n-го порядка). Пусть $y_1, \ldots, y_n$ – линейно независимая система решений уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \ , \tag{3}$$

где $a_1 = a_1(x), \ldots, a_n = a_n(x)$ – функции, непрерывные на промежутке I. Тогда определитель Вронского этой системы решений не равен нулю ни в одной точке промежутка I.

Доказательство. Пусть вопреки утверждению теоремы в некоторой точке $x_0 \in I$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Из этого равенства следует, что столбцы определителя $W(x_0)$ линейно зависимы, т.е. существует нетривиальный набор чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ такой, что

$$\begin{array}{c} \alpha_1 y_1^{(j)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(j)}(x_0) = 0 \ , \\ j = 0, 1, \ldots, n-1 \ . \end{array} \tag{4}$$

Рассмотрим функцию $y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x)$; по теореме о пространстве решений линейного однородного уравнения эта функция есть решение уравнения (3). Функция, тождественно равная нулю на промежутке I, также удовлетворяет этому уравнению и начальным условиям (4). По теореме существования и единственности получаем отсюда, что $y(x) \equiv 0$, т.е. существует нетривиальная равная нулю линейная комбинация функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, что противоречит линейной независимости этих функций. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема (о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения). Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = 0 \ ,$$

где функции $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ определены и непрерывны на промежутке I. Тогда совокупность всех решений этого уравнения есть линейное пространство размерности n.

Доказательство. То, что совокупность X всех решений данного дифференциального уравнения образует линейное пространство, уже доказано (см. теорему о линейном пространстве решений линейного однородного уравнения). Чтобы доказать, что $\dim X = n$, достаточно указать в X базис из n векторов. С этой целью рассмотрим решения $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ данного дифференциального уравнения, удовлетворяющие таким начальным условиям

$$\begin{aligned}
&y_1(x_0) = 1\ , \quad y_1'(x_0) = \ldots = y_1^{(n-1)}(x_0) = 0\ ,\\
&y_2(x_0) = 0\ , \quad y_2'(x_0) = 1\ ,\ y_2''(x_0) = \ldots = y_2^{(n-1)}(x_0) = 0\ ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_n(x_0) = \ldots = y_n^{(n-2)}(x_0) = 0\ , \quad y_n^{(n-1)}(x_0) = 1\ ,
\end{aligned}$$

где x_0 – произвольная точка промежутка I. Существование таких решений следует из теоремы **существования** и единственности. Решения эти линейно независимы, т.к.

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\ .$$

Далее, если $y(x)$ – произвольное решение рассматриваемого уравнения, и если

$$y(x_0) = C_1\ ,\ y'(x_0) = C_2\ ,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = C_n\ ,$$

то в точке x_0, очевидно, выполняются равенства

$$\begin{gathered} y^{(j)}(x_0) = C_1 y_1^{(j)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(j)}(x_0)\ , \\ j = 0, 1, \ldots, n-1\ . \end{gathered}$$

Поэтому по теореме существования и **единственности**

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

при любом $x \in I$. Таким образом, $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ образуют базис в X и, следовательно, $\dim X = n$. Теорема доказана.

Базис пространства решений линейного однородного дифференциального уравнения называется фундаментальной системой решений этого уравнения. Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений линейного однородного уравнения, то общее решение такого уравнения можно записать в виде

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)\ ,$$

где $C_1, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Пусть $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – решения линейного однродного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0\ ,$$

где, как обычно, $a_1(x)$ и $a_2(x)$ – функции, непрерывные на некотором промежутке. Для определителя Вронского указанных решений имеем

$$W'(x) = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_1(x)y_1' - a_2(x)y_1 & -a_1(x)y_2' - a_2(x)y_2 \end{vmatrix} = -a_1(x)W(x)\ ,\ \text{т.е.}$$

$$W'(x) + a_1(x)W(x) = 0\ .$$

Мы видим, что определитель Вронского $W(x)$ удовлетворяет уравнению

$$y' + a_1(x)y = 0 \ . \tag{5}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что этому же уравнению удовлетворяет и функция

$$y(x) = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt} \ ,$$

причём $y(x_0) = W(x_0)$, где x_0 – произвольная фиксированная точка промежутка I. Из теоремы существования и **единственности** для уравнения (5) получаем, что для всех $x \in I$ выполняется равенство

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt} \ .$$

Это равенство называется формулой Остроградского-Лиувилля.

Аналогичная формула справедлива и для линейного однородного уравнения n-го порядка: если $y_1, \ldots, y_n$ – решения уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0 \ ,$$

то

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt} \ ,$$

где

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \ ,$$

а x_0 – произвольная точка промежутка, на котором заданы коэффициенты уравнения.

Если известно частное решение $\varphi(x)$ линейного однородного уравнения, то порядок уравнения может быть понижен. Соответствующий прием рассмотрим для уравнения второго порядка

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \ . \tag{6}$$

Подставим в это уравнение $y = z \cdot \varphi(x)$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция. Т.к.

$$\begin{aligned} y' &= z \cdot \varphi'(x) + z'\varphi(x) = 0 \ , \\ y'' &= z \cdot \varphi''(x) + 2z'\varphi'(x) + z''\varphi(x) \ , \end{aligned}$$

то для определения z имеем уравнение

$$z\big(\varphi''(x) + a_1(x)\varphi'(x) + a_2(x)\varphi(x)\big) + 2z'\varphi'(x) + z''\varphi(x) + a_1(x)z' \cdot \varphi(x) = 0 \ .$$

Коэффициент при z здесь равен нулю, и z определяется из уравнения

$$z''\varphi(x) + \big(2\varphi'(x) + a_1(x)\varphi'(x)\big) \cdot z' = 0 \ ,$$

которое не содержит z и легко сводится к линейному однородному уравнению первого порядка.

Другой подход к понижению порядка линейного однородного уравнения при известном частном решении основан на применении формулы Остроградского-Лиувилля. Если, как и выше, $\varphi(x)$ – известное частное решение уравнения (6), то

$$W(x) = \begin{vmatrix} y & \varphi(x) \\ y' & \varphi'(x) \end{vmatrix} = W(x_0) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt} , \tag{7}$$

и для определения $y = y(x)$ получается линейное однородное уравнение первого порядка. Если при этом нас не интересуют начальные условия для $y(x)$, то x_0 и $W(x_0)$ в правой части (7) можно задать произвольно. Например, можно находить $y = y(x)$ из уравнения

$$\begin{vmatrix} y & \varphi(x) \\ y' & \varphi'(x) \end{vmatrix} = e^{-\int a_1(x)dx} ,$$

где $\displaystyle\int a_1(x)dx$ означает произвольную фиксированную первообразную функции $a_1(x)$.

Пример. Пусть требуется найти общее решение уравнения

$$2\sqrt{x} \cdot y'' - (4\sqrt{x}+1)\, y' + (2\sqrt{x}+1)\, y = 0 ,$$

если известно его частное решение $\varphi(x) = e^x$. Второе частное решение (линейно независимое с первым) ищем в виде $y = z\, e^x$; имеем $y' = (z'+z)\, e^x$, $y'' = (z''+2z'+z)\, e^x$, и для определения z получаем уравнение

$$2\sqrt{x}(z''+2z'+z) - (4\sqrt{x}+1)(z'+z) + (2\sqrt{x}+1)\, z = 0 .$$

После очевидных преобразований находим $\dfrac{z''}{z'} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Нас интересует лишь частное решение этого уравнения, например, $z' = e^{\sqrt{x}}$. Отсюда

$$z = \int e^{\sqrt{x}} dx = \int 2t\, e^t dt = 2t\, e^t - 2\int e^t dt = 2(t-1)\, e^t + C = 2(\sqrt{x}-1)\, e^{\sqrt{x}} + C .$$

Таким образом, можно взять $z = 2(\sqrt{x}-1)\, e^{\sqrt{x}}$. Поэтому фундаментальную систему решений данного дифференциального уравнения составляют функции

$$y_1(x) = e^x \quad \text{и} \quad y_2(x) = 2(\sqrt{x}-1)\, e^{\sqrt{x}+x} ,$$

а общее решение можно записать в виде

$$y = C_1 e^x + C_2(\sqrt{x}-1)\, e^{\sqrt{x}+x} ,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные (коэффициент 2, входящий в решение $y_2(x)$, "поглощается" постоянной C_2).