кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра
специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 17

Дифференциальные уравнения n-го порядка. Частные и общие решения. Задача Коши и ее геометрическая интерпретация ($n = 2$). Теорема Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (без доказательства). Краевая задача. Понижение порядка некоторых типов дифференциальных уравнений n-го порядка.

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \ ,$$

где x – независимая переменная, $y{-}y(x)$ – неизвестная функция, $y' = y'(x), \dots, y^{(n)} = y^{(n)}(x)$ – производные соответствующих порядков неизвестной функции, F – заданная функция указанных переменных.

В дальнейшем в основном ограничимся рассмотрением дифференциальных уравнений n-го порядка, разрешенных относительно старшей производной, т.е. уравнений вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{1}$$

Мы будем считать, что правая часть последнего уравнения определена и непрерывна на некоторой области $(n+1)$-мерного пространства переменных $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$. Решением уравнения (1) называется n раз (непрерывно) дифференцируемая функция $y = y(x)$, заданная на некотором интервале I, после подстановки которой в уравнение получается верное равенство при всех $x \in I$. Общим решением уравнения (1) называется функция

$$y = y(x, C_1, \dots, C_n) \ , \tag{2}$$

заданная на некоторой области D $(n+1)$-мерного пространства переменных $x, C_1, \dots, C_n$ и обладающая следующими свойствами.

1. При любых фиксированных $C_1, \dots, C_n$, для которых существует хотя бы один интервал I такой, что для любого $x \in I$ точка $(x, C_1, \dots, C_n)$ лежит в области D, функция (2) является решением уравнения (1) на любом таком интервале. Иногда это свойство формулируют короче: при любых фиксированных $C_1, \dots, C_n$ функция (2) есть решение уравнения (1).

2. Для любой точки $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ из области определения правой части уравнения (1) найдутся числа $C_{10}, \dots, C_{n0}$ такие, что функция

$$y = y(x, C_{10}, \dots, C_{n0})$$

определена на некотором интервале, содержащем точку x_0, и удовлетворяет начальным условиям

$$\begin{aligned} &y(x_0, C_{10}, \ldots, C_{n0}) = y_0 \ , \\ &y'(x_0, C_{10}, \ldots, C_{n0}) = y'_0 \ , \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &y^{(n-1)}(x_0, C_{10}, \ldots, C_{n0}) = y_0^{(n-1)} \end{aligned} \quad .$$

Соотношение

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0 \ ,$$

неявно задающее общее решение, называют общим интегралом. Подробно смысл последнего определения не рассматриваем. Всякое решение уравнения (1), получающееся из общего решения при фиксированных $C_1, \ldots, C_n$, называется частным решением этого уравнения; неявно заданное решение, получаемое таким способом из общего интеграла, называется частным интегралом.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти все его решения; обычно дело сводится к нахождению общего интеграла (общего решения). Если заданы начальные условия (или иные дополнительные условия), то требуется найти частное решение, удовлетворяющее этим условиям.

Для уравнений n-го порядка справедлива теорема, аналогичная теореме существования и единственности для уравнений первого порядка.

Теорема (Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка).

Если в уравнении

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

функция f и ее частные производные по переменным $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ непрерывны в некоторой области G пространства переменных $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, то для любой точки $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ из этой области существует решение $y = y(x)$ данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \ .$$

Любые два решения, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, совпадают всюду, где они оба определены.

Эту теорему принимаем без доказательства.

Как и в случае уравнения первого порядка задача отыскания решения уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \ ,$$

называется задачей Коши. Из сформулированной теоремы следует, что при выполнении ее условий решение задачи Коши существует и единственно. Рассмотрим геометрическую интерпретацию задачи Коши для уравнения второго порядка.

$$y'' = f(x, y, y') \ . \tag{3}$$

Здесь требуется найти решение этого уравнения, удовлетворющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0 \ , \quad y'(x_0) = y'_0 \ ,$$

где (x_0, y_0, y'_0) – некоторая точка из области определения правой части (3).

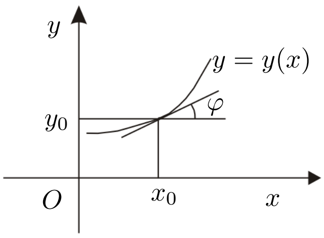

Рис.8

Геометрически это означает, что надо найти интегральную кривую на плоскости переменных x, y, проходящую через точку (x_0, y_0) и касающуюся в этой точке прямой с заданным угловым коэффициентом $\operatorname{tg}\varphi = y_0'$. Варьируя y_0', мы можем получить бесконечно много интегральных кривых, проходящих через указанную точку. Отсюда следует, что (при выполнении условий сформулированной теоремы) уравнение (3) второго порядка имеет бесконечно много решений. Аналогичный вывод справедлив и для уравнений более высоких порядков.

При решении задачи Коши для уравнения (1) n-го порядка при известном общем решении $y = y(x, C_1, \ldots, C_n)$ проходится выделять частное решение, определяя $C_1, \ldots, C_n$ из системы

$$\begin{aligned}
&y(x_0, C_1, \ldots, C_n) = y_0\ , \\
&y'(x_0, C_1, \ldots, C_n) = y_0'\ , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&y^{(n-1)}(x_0, C_1, \ldots, C_n) = y_0^{(n-1)}\ ,
\end{aligned}$$

в которой начальные значения заданы в одной точке x_0. При решении многих задач, однако, приходится находить частное решение, удовлетворяющее начальным значениям, заданным при различных x. Задача отыскания такого частного решения называется краевой задачей для уравнения n-го порядка.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \tag{4}$$

При этом будем рассматривать решения этого уравнения, заданные не на интервале, а на отрезке; под производными функции $y = y(x)$ в граничных точках отрезка будем понимать соответствующие односторонние производные. Общее решение уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные, поэтому для их определения потребуется два условия.

Пусть требуется найти решение уравнения (4), заданное на отрезке $[x_1, x_2]$ и удовлетворяющее условиям

$$y(x_1) = y_1\ , \quad y(x_2) = y_2\ .$$

Эти условия называются краевыми условиями 1-го рода.

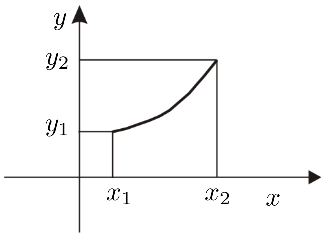

Рис.9

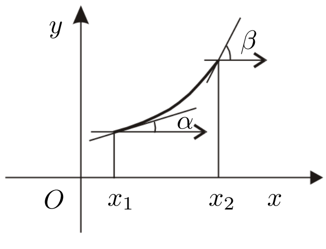

Рис.10

Геометрически такая задача означает, что требуется найти интегральную кривую, проходящую через две заданные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Если задать значения производных

$$y'(x_1) = y_1'\ , \quad y'(x_2) = y_2'\ ,$$

то получим краевые условия второго рода. Задача отыскания решений решений уравнения (4), удовлетворяющего таким условиям, геометрически означает, что требуется найти интегральную кривую, имеющую в точках с абсциссами x_1 и x_2 касательные с угловыми коэффициентами $y_1' = \operatorname{tg}\alpha$ и $y_2' = \operatorname{tg}\beta$ соответственно.

Рассматривают и смешанную краевую задачу, когда задаются условия разного рода.

В отличие от задачи Коши, которая при достаточно общих предположениях имеет единственное решение, краевая задача может не иметь решений или иметь несколько (и даже бесконечно много) решений. Для решения краевой задачи находят общее решение соответствующего дифференциального уравнения, содержащее две произвольные постоянные C_1 и C_2, а затем (если это возможно), определяют C_1 и C_2, при которых выполняются краевые условия.

Пример. Пусть имеется уравнение

$$y'' + y = 0\,.$$

Нетрудно проверить, что общее решение имеет в данном случае вид:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x\,.$$

Найдем решение, удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0) = 1\,, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\,.$$

Имеем

$$\begin{array}{l} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 1 \\ C_1 \cos \dfrac{\pi}{2} + C_2 \sin \dfrac{\pi}{2} = 1 \end{array}\,.$$

Полученная система имеет единственное решение $C_1 = C_2 = 1$. Требуемое решение есть

$$y = \cos x + \sin x\,.$$

Если задать краевые условия в виде $y(0) = 1$, $y(\pi) = 1$, то для определения C_1 и C_2 получим систему:

$$\begin{array}{l} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 1 \\ C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi = 1 \end{array}\,,$$

которая, как легко видеть, несовместна. Решений у соответствующей краевой задачи нет.

Нетрудно проверить, что при краевых условиях $y(0) = 1$, $y(\pi) = -1$ краевая задача для рассматриваемого уравнения имеет бесконечно много решений.

Рассмотрим некоторые уравнения, допускающие понижение порядка. Пусть дано уравнение

$$F\big(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}\big) = 0\,,$$

не содержащее явно y. Положим $z = y'$ и в результате получим уравнение $(n-1)$-го порядка

$$F\big(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}\big) = 0$$

относительно новой неизвестной функции z. Решив его (если это возможно), найдем z, а затем и y.

Если требуется решить уравнение n-го порядка, не содержащее явно x, т.е. уравнение вида

$$F\big(y', y'', \ldots, y^{(n)}\big) = 0\,,$$

то понизить порядок такого уравнения можно с помощью новой неизвестной функции $p = p(y)$, для которой $y' = p(y)$. Из последнего равенства

$$y'' = p'(y) \cdot y' = p'(y) \cdot p(y)\,,$$

и при $n = 2$ для определения неизвестной функции p получаем уравнение

$$F\big(y, p(y), p'(y) \cdot p(y)\big) = 0$$

первого порядка, при решении которого y следует считать независимой переменной, а $p = p(y)$ – неизвестной функцией этой переменной. Решив последнее уравнение, найдем $p(y)$, а затем и y из уравнения $y' = p(y)$. В случае уравнения n-го порядка этот прием позволяет свести исходную задачу к аналогичной задаче для уравнения $(n-1)$-го порядка.

Пример. Пусть требуется найти решение уравнения

$$2yy'' = 1 + (y')^2 \ ,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = 1$.

Введем новую неизвестную функцию $p(y)$, для которой $y' = p(y)$. Поскольку $y'' = p'(y) \cdot y' = p'(y) \cdot p(y)$, то для определения $p(y)$ имеем уравнение 1-го порядка

$$2y\, p \cdot p' = 1 + p^2 \ .$$

Это – уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и находя первообразные, получаем

$$\ln(1 + p^2) = \ln|y| + C \ . \qquad (5)$$

Для определения C запишем это уравнение так

$$\ln\Big(1 + \big(y'(x)\big)^2\Big) = \ln|y(x)| + C \ .$$

Подставив $x = 0$, получим с учетом начальных условий

$$\ln 2 = \ln 1 + C \ ,$$

т.е. $C = \ln 2$. Поэтому из (5) получаем

$$1 + p^2 = \pm 2y \ ;$$

т.к. $y(x) > 0$ в окрестности интересующей нас точки $x = 0$, то справа выбираем знак "+"; поскольку $p\big(y(0)\big) = y'(0)$ также также положительно, то

$$p = \sqrt{2y - 1} \ .$$

Для определения y имеем, следовательно, уравнение

$$y' = \sqrt{2y - 1} \ .$$

Решив это уравнение с разделяющимися переменными, получим

$$\sqrt{2y - 1} = x + C \ .$$

подставив $x = 0$, найдем $C = 1$. Поэтому $\sqrt{2y - 1} = x + 1$, и окончательно

$$y = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x + 2\right) \ .$$