кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций
для студентов 1-го курса 2-го семестра
специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 16

Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка. Изоклины. Геометрическое решение дифференциальных уравнений с помощью изоклин. Особые точки и особые решения дифференциального уравнения первого порядка.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной

$$y' = f(x,y) \ , \tag{1}$$

где правая часть определена на области G плоскости переменных x, y. Такое дифференциальное уравнение устанавливает связь между координатами точки $M(x,y) \in G$ и угловым коэффициентом касательной $y'(x)$ к интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через эту точку:

$$\operatorname{tg}\alpha = y'(x) = f(x,y) \ .$$

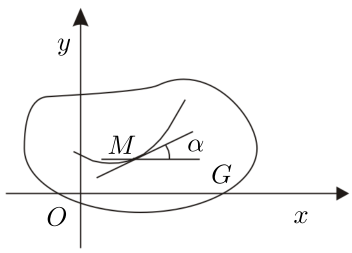

Рис.6

Касательным вектором к этой кривой в указанной точке является вектор

$$\bigl\{1, y'(x)\bigr\} = \bigl\{1, f(x,y)\bigr\} \ .$$

Если каждой точке $M(x,y) \in G$ поставить в соответствие такой вектор, то мы получим в области G поле направлений. Интегральные кривые – это те кривые, для которых вектор $\bigl\{1, f(x,y)\bigr\}$ является касательным в соответствующей точке. Поэтому, если в области G выбрать достаточно густую сеть точек и в каждой точке $M(x,y)$ нарисовать исходящий из этой точки вектор с координатами $\bigl\{1, f(x,y)\bigr\}$, то можно приближенно изобразить интегральные кривые уравнения (1), проводя эти кривые так, чтобы они в каждой своей точке касались векторов построенного поля направлений. Построение поля направлений облегчается использованием изоклин. Изоклиной дифференциального уравнения (1) называется множество точек плоскости, в каждой из которых угловой коэффициент касательной к интегральным кривым этого уравнения имеет постоянное значение. Очевидно, уравнение изоклины имеет вид

$$f(x,y) = k \ ,$$

где k – упомянутое в определении изоклины постоянное значение углового коэффициента касательной. Таким образом, изоклины являются линиями уровня функции $f(x, y)$ из правой части уравнения (1).

Пример. Пусть дано уравнение

$$y' = x^2 - y^2 \ .$$

Областью определения правой части является вся плоскость переменных x, y. Уравнения изоклин имеют вид

$$x^2 - y^2 = k \ .$$

При $k = 0$ имеем пару вещественных пересекающихся прямых (биссектрис координатных углов). При построении поля направлений (чтобы не загромождать чертеж) будем рисовать не векторы, а короткие отрезки прямых, проходящих через точки построенных изоклин и имеющих соответствующие угловые коэффициенты. При $k \neq 0$ изоклинами являются гиперболы.

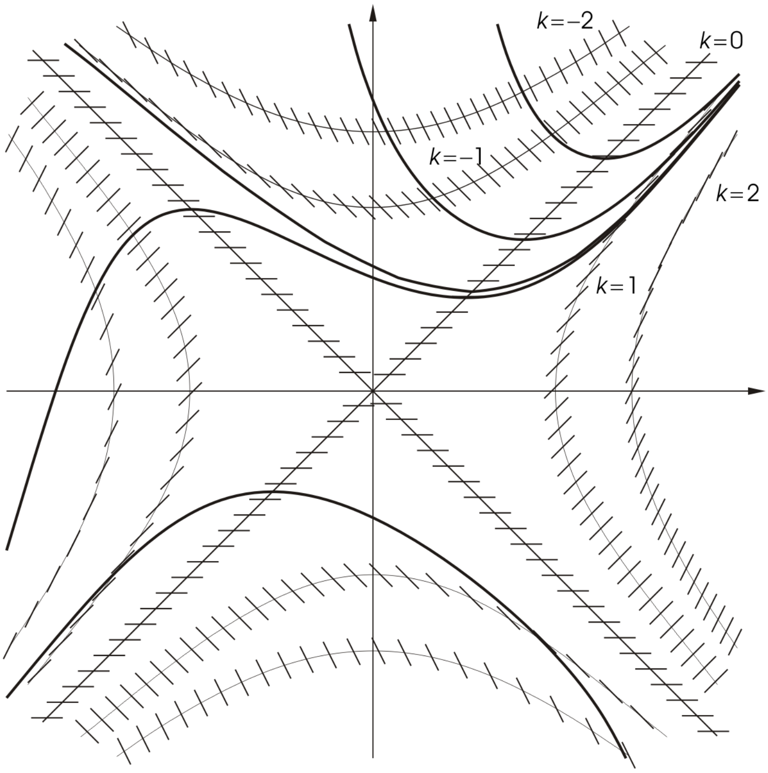

Рис.7

Пусть снова имеется дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \ , \tag{1}$$

правая часть которого определена на области G плоскости переменных x, y. Если для точки $M(x_0, y_0) \in G$ найдутся две интегральные кривые, проходящие через эту точку и не совпадающие ни в какой ее окрестности, или через эту точку не проходит ни одна интегральная кривая, то M называется особой точкой данного дифференциального уравнения. Точка, не являющаяся особой, называется обыкновенной. В частности, обыкновенными являются все точки, имеющие окрестность, в которой выполняются требования теоремы существования и единственности. Решение уравнения (1) называется особым, если все точки соответствующей интегральной кривой суть особые точки этого дифференциального уравнения.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}} \ .$$

Здесь правая часть определена на всей плоскости переменных x, y; условия теоремы существования и единственности нарушены в точках оси OX, т.к. при $y = 0$ функция $f(x, y) = 3y^{2/3}$ не имеет частной производной по переменной y. Т.к. данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, то в каждой из областей $y > 0$ или $y < 0$ можно без труда найти общее решение

$$y = (x + C)^3.$$

Ясно, что при любом фиксированном значении C эта формула дает решение рассматриваемого уравнения, заданное при всех значениях x. С другой стороны $y \equiv 0$ также есть решение этого уравнения. Последнее решение является особым, т.к. через каждую точку соответствующей интегральной кривой (в данном случае оси абсцисс) проходит не меньше двух интегральных кривых этого уравнения.

Если точка $M(x_0, y_0)$ лежит на интегральной кривой, отвечающей особому решению $y = y(x)$, то через эту точку проходит и другая интегральная кривая $y = y_1(x)$ данного дифференциального уравнения. Т.к. $y_1'(x_0) = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, то эти кривые имеют общую касательную в точке M. Это простое замечание позволяет использовать для нахождения особых решений понятие огибающей из теории кривых.

Пусть имеется семейство плоских кривых

$$\Phi(x, y, C) = 0 \ , \tag{2}$$

зависящих от параметра C. При каждом фиксированном C уравнение (2) задает неявно соответствующую кривую этого семейства.

Кривая γ называется огибающей семейства (2), если в каждой своей точке γ касается некоторой кривой этого семейства, не совпадая с ней ни в какой окрестности указанной точки. Если (2) задает семейство решений дифференциального уравнения (1), то огибающая этого семейства также будет решением (очевидно, особым) этого уравнения $\big($если только эта огибающая может быть задана уравнением $y = y(x)\big)$. Действительно, если $y = y(x)$ – уравнение огибающей и x_0 – произвольная точка из области определения функции $y(x)$, то для некоторого решения $y = y_1(x)$ данного уравнения $y(x_0) = y_1(x_0)$ и $y'(x_0) = y_1'(x_0)$. Поэтому из равенства $y_1'(x_0) = f\big(x_0, y_1(x_0)\big)$ следует, что $y'(x_0) = f\big(x_0, y(x_0)\big)$. Т.к. x_0 – произвольная точка из области определения функции $y(x)$, то $y(x)$ – решение уравнения (1).

Чтобы составить уравнение огибающей, можно рассуждать следующим образом. Если γ касается кривых семейства (2), отвечающих изменению параметра C на интервале $C_1 < C < C_2$, то на этом интервале γ можно задавать параметрически уравнениями

$$x = \varphi(C) \ , \quad y = \psi(C) \ .$$

В таком случае должно выполняться равенство

$$\Phi\big(\varphi(C), \psi(C), C\big) = 0 \ ,$$

т.к. в точке $\big(\varphi(C), \psi(C)\big)$ кривая γ и кривая семейства (2), отвечающая данному значению параметра C, имеют общую точку. Чтобы записать условие наличия общей касательной, найдем соответствующие угловые коэффициенты. Для γ угловой коэффициент касательной в точке кривой, отвечающей значению C параметра, равен $\psi'(C)\big/\varphi'(C)$. Предположим, что функция $\Phi(x, y, C)$ имеет непрерывные частные производные по всем переменным, и

$$(\Phi_x')^2 + (\Phi_y')^2 > 0 \ .$$

Пусть, для определенности, в окрестности точки (x, y) кривой $\Phi(x, y, C) = 0$ отлична от нуля производная Φ'_y. Из теоремы о неявной функции, рассматриваемой в теории функций нескольких переменных, следует, что тогда угловой коэффициент касательной к этой кривой в указанной точке есть

$$-\frac{\Phi'_x(x, y, C)}{\Phi'_y(x, y, C)} .$$

Поэтому условие наличия общей касательной запишется в виде

$$\frac{\psi'(C)}{\varphi'(C)} = -\frac{\Phi'_x\big(\varphi(C), \psi(C), C\big)}{\Phi'_y\big(\varphi(C), \psi(C), C\big)} .$$

Отсюда

$$\Phi'_x \cdot \varphi'(C) + \Phi'_y \cdot \psi'(C) = 0 .$$

Таким образом, для функций $\varphi(C)$ и $\psi(C)$ выполняются равенства

$$\begin{gathered} \Phi\big(\varphi(C), \psi(C), C\big) = 0 , \\ \Phi'_x \cdot \varphi'(C) + \Phi'_y \cdot \psi'(C) = 0 , \end{gathered} \tag{3}$$

где значения частных производных функции Φ вычисляются в точке $\big(\varphi(C), \psi(C), C\big)$. Продифференцируем по C первое из этих равенств:

$$\Phi'_x \cdot \varphi'(C) + \Phi'_y \cdot \psi'(C) + \Phi'_C = 0 .$$

С учетом (3) получаем отсюда такие необходимые условия того, чтобы кривая γ была огибающей семейства $\Phi(x, y, C) = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \Phi\big(\varphi(C), \psi(C), C\big) = 0 \\ \Phi'_C\big(\varphi(C), \psi(C), C\big) = 0 \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

Из этой системы можно, в принципе, найти $\varphi(C)$ и $\psi(C)$. Если переписать последние равенства в виде

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \Phi_C(x, y, C) = 0 \end{aligned} \right\} , \tag{5}$$

то, исключив C, можно получить неявное уравнение кривой γ. Заметим, что условия (4) или (5) лишь необходимы для того, чтобы определяемая ими кривая была огибающей, достаточными эти условия не являются. Поэтому, найдя параметрические уравнения кривой из (4) или неявное уравнение из (5), следует проверить, действительно ли найденная кривая является огибающей.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = 3(y - \sin x)^{2/3} + \cos x . \tag{6}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что при любом C функция

$$y = (x + C)^3 + \sin x \tag{7}$$

есть решение этого уравнения. Здесь семейство интегральных кривых задается с помощью функции

$$\Phi(x, y, C) = y - (x + C)^3 - \sin x .$$

Для нахождения уравнения огибающей имеем систему

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(x,y,C)=y-(x+C)^3-\sin x=0\\ \Phi'_C(x,y,C)=-3(x+C)^2=0\end{array}\right\}.$$

Отсюда $x+C=0$, и $y=\sin x$. Надо еще проверить, что последнее равенство задает огибающую. Легко видеть, что при $x=x_0$ кривые $y=\sin x$ и $y=(x-x_0)^3+\sin x$ имеют общую касательную в точке с абсциссой $x=x_0$. Поэтому $y=\sin x$ – огибающая семейства кривых (7) и, следовательно, особое решение уравнения (6).