кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра
специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 15

Решение дифференциальных уравнений первого порядка: с разделяющимися переменными, однородных, линейных, Бернулли.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти все его решения. Если заданы дополнительные условия (обычно начальные), то требуется найти решения, удовлетворяющие этим дополнительным условиям. Как правило, дело сводится к нахождению общих интегралов (общих решений) и выделению частных интегралов (частных решений), удовлетворяющих дополнительным условиям (если такие условия заданы).

Если решение дифференциального уравнения удается записать с помощью арифметических операций, операции взятия функции от функции и операции нахождения первообразной, примененных конечное число раз к элементарным функциям, то говорят, что это дифференциальное уравнение интегрируется в квадратурах. Заметим, что большинство дифференциальных уравнений, встречающихся в теоретических и прикладных задачах, не интегрируются в квадратурах.

Рассмотрим методы интегрирования в квадратурах некоторых типов дифференциальных уравнений первого порядка.

Уравнение вида

$$y' = f(x)\,g(y) \tag{1}$$

называется уравнением с разделяющимися переменными. Пусть функции $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны соответственно на интервалах I_1 и I_2, причём $g(y) \neq 0$ при любом $y \in I_2$. Если $y = y(x)$ – решение уравнения (1), то

$$\frac{y'(x)}{g\big(y(x)\big)} = f(x). \tag{2}$$

Обозначим через $G(y)$ и $F(y)$ первообразные соответственно функций $1/g(y)$ и $f(x)$ на указанных интервалах. Из (2) следует, что

$$G\big(y(x)\big) = F(x) + C.$$

Можно доказать, что при сделанных относительно $f(x)$ и $g(y)$ предположениях соотношение

$$G(y) = F(x) + C$$

есть общий интеграл уравнения (1). Отсюда получаем такой формальный прием для отыскания решений этого уравнения.

Разделяем переменные и умножаем обе части на dx:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx;$$

находим соответствующие первообразные (причём в левой части переменной интегрирования считаем y) и записываем общий интеграл в виде

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

В этом равенстве интегралы означают какие-либо фиксированные первообразные (а не всю их совокупность). Если требуется найти интегральную кривую, проходящую через точку $(x_0, y_0),\ x_0 \in I_1,\ y_0 \in I_2$, то соответствующее решение задается неявно равенством

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(\eta)d\eta.$$

Может оказаться, что в уравнении (1) функция $g(y)$ равна нулю в некоторых точках $y_1, y_2 \ldots$ интервала I_2. В таком случае указанный приём применяется на каждом из интервалов, на которые эти точки делят I_2; при этом следует иметь в виду, что все функции $y \equiv y_1, y \equiv y_2, \ldots$ являются решениями уравнения (1). Про эти решения говорят, что они "теряются при разделении переменных" $\big($т.е. при делении обеих частей уравнения на $g(y)\big)$.

Пример. Рассмотрим уравнение $2\sqrt{1-x^2}\ y' = x(1-y^2)$.
После разделения переменных получаем, что

$$\frac{2dy}{y^2-1} = -\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}\ ;$$

далее, находим первообразные

$$2\int \frac{dy}{y^2-1} = \ln\Big|\frac{y-1}{y+1}\Big| + C\ ,$$

$$-\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} + C\ .$$

Поэтому имеем на каждой из областей

$$\Pi_1 = \big\{(x,y)\ :\ x \in (-1;1),\ y \in (-\infty;-1)\big\},$$

$$\Pi_2 = \big\{(x,y)\ :\ x \in (-1;1),\ y \in (-1;1)\big\} \text{ и}$$

$$\Pi_3 = \big\{(x,y)\ :\ x \in (-1;1),\ y \in (1;\infty)\big\}$$

такой общий интеграл

$$\ln\Big|\frac{y-1}{y+1}\Big| = \sqrt{1-x^2} + C$$

рассматриваемого уравнения. Сюда следует добавить еще решения $y = \pm 1$, потерянные при разделении переменных. В данном случае нетрудно найти и общее решение; например, на открытом квадрате Π_2 имеем последовательно:

$$\frac{1-y}{1+y} = e^{\sqrt{1-x^2}+C}\ ;$$

$$y = \frac{1-C_1 e^{\sqrt{1-x^2}}}{1+C_1 e^{\sqrt{1-x^2}}}\ , \quad C_1 = e^C > 0.$$

Здесь общее решение определено в области $-1 < x < 1$, $C_1 > 0$. Если в последнюю формулу для y подставить какое-либо отрицательное значение C_1 (например, $C_1 = -1$), то мы также получим решение исходного уравнения, однако соответствующая интегральная кривая не будет лежать в квадрате Π_2. Этот пример показывает, что нужно соблюдать определенную осторожность, утверждая, что "при подстановке в общее решение любого значения C получается частное решение исходного уравнения".

Дифференциальное уравнение 1-го порядка часто записывают в виде

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{3}$$

Здесь $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – заданные в некоторой области (непрерывные) функции. Если считать x независимой переменной, а $y = y(x)$ – неизвестной функцией, то уравнение (3) эквивалентно такому

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Если же считать, что y независимая переменная, а $x = x(y)$ – неизвестная функция, то (3) эквивалентно уравнению

$$M(x,y)\frac{dx}{dy} + N(x,y) = 0.$$

Про уравнение (3) говорят, что оно записано через дифференциалы (или в симметрической форме).

Уравнение с разделяющимися переменными, записанное в такой форме, имеет вид:

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0.$$

После разделения переменных получаем уравнение

$$\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = -\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx.$$

Рассмотрим ещё однородные уравнения. Функция $h(x,y)$ называется однородной функцией степени m, если для любых x, y и $t > 0$ выполняется равенство

$$h(tx,ty) = t^m h(x,y).$$

Если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями одной и той же степени, то дифференциальное уравнение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

называется однородным. Считая для определённости, что $x > 0$, а функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями степени m, преобразуем это уравнение следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = -\frac{M\left(x;\ x\cdot\dfrac{y}{x}\right)}{N\left(x;\ x\cdot\dfrac{y}{x}\right)} = -\frac{x^m M\left(1;\ \dfrac{y}{x}\right)}{x^m N\left(1;\ \dfrac{y}{x}\right)} = -\frac{M\left(1;\ \dfrac{y}{x}\right)}{N\left(1;\ \dfrac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

где $f(u) = -\dfrac{M(1,u)}{N(1,u)}$.

Таким образом, однородное уравнение можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Чтобы решить это уравнение, введем новую неизвестную функцию $z = y/x$, т.е. $xz = y$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = z + x\,\frac{dz}{dx}\ ,$$

и для нахождения z имеем уравнение

$$x\,\frac{dz}{dx} = f(z) - z.$$

Это – уравнение с разделяющимися переменными. Решив его, найдем z, а затем и y.

Пример. Пусть требуется решить уравнение $y' = \dfrac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x}$.
Будем считать, что $x > 0$ и $x^2 - y^2 > 0$; соответствующая область заштрихована на чертеже (граничные точки исключаются).

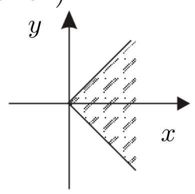

Рис.5

В этой области данное уравнение эквивалентно такому:

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}\ .$$

Это – однородное уравнение; вводим новую неизвестную функцию $z = y/x$ и получаем уравнение

$$xz' + z = \sqrt{1-z^2} + z\ ; \quad \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{dx}{x}\ .$$

Найдя первообразные , получим

$$\arcsin z = \ln|x| + C\ ; \quad \arcsin\frac{y}{x} = \ln|x| + C\ .$$

Это – общий интеграл исходного уравнения (в указанной области). Поскольку $x > 0$, то этот общий интеграл можно записать и так:

$$\arcsin\frac{y}{x} = \ln x + C\ .$$

В данном случае можно найти и общее решение:

$$y = x\ \sin(\ln x + C),\ -\frac{\pi}{2} < \ln x + C < \frac{\pi}{2}\ .$$

Уравнение

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{4}$$

называется линейным; функции $p(x)$ и $f(x)$ будем считать непрерывными на некотором интервале I. Чтобы решить уравнение (4), найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y' + p(x)y = 0. \tag{5}$$

Пусть $P(x)$ – какая-либо первообразная функции $p(x)$ на интервале I. Тогда, как легко проверить, функция

$$y(x, C) = Ce^{-P(x)},\ x \in I,\ -\infty < C < \infty\ ,$$

есть общее решение уравнения (5). Этот результат можно получить и "естественным" путем, заметив, что (5) является уравнением с разделяющимися переменными. Далее применим метод вариации постоянной, состоящий в том, что постоянная C, входящая в общее решение, заменяется функцией $C(x)$; затем эта последняя функция определяется из исходного неоднородного уравнения (4). Имеем:

$$\left(C(x)e^{-P(x)}\right)'+C(x)p(x)e^{-P(x)}=f(x);\quad C'(x)e^{-P(x)}-C(x)p(x)e^{-P(x)}+C(x)p(x)e^{-P(x)}=f(x)$$

$$C'(x)=f(x)e^{P(x)}.$$

Отсюда

$$C(x)=\int f(x)\,e^{-P(x)}\,dx+C_1\ ,$$

где интеграл в правой части означает какую-любо фиксированную первообразную соответствующей функции (а не всю совокупность этих первообразных). Следовательно, общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$y(x,C_1)=\left(\int f(x)\,e^{-P(x)}\,dx+C_1\right)\ e^{-P(x)}\ ,$$

где $P(x)$ – какая-либо первообразная функции $p(x)$ на интервале I.

К линейным уравнениям первого порядка сводится уравнение Бернулли

$$y'+p(x)\,y=f(x)\,y^{\alpha}\ ,$$

где α отлично от 0 и 1 (т.к. при этих значениях α получается линейное уравнение). Разделим обе части последнего уравнения на y^{α}:

$$y'\cdot y^{-\alpha}+p(x)\,y^{1-\alpha}=f(x).$$

Если $z=y^{1-\alpha}$, то $z'=(1-\alpha)y'\cdot y^{-\alpha}$ и относительно z имеем линейное уравнение:

$$\frac{1}{1-\alpha}\cdot z'+p(x)\,z=f(x)$$

Решив его, найдем z, а затем и y. При $\alpha>0$ уравнению Бернулли удовлетворяет также функция, тождественно равная нулю. Другой подход к решению уравнений Бернулли состоит в следующем. Пусть $y=u\cdot v$; тогда

$$u'\cdot v+u(v'+p(x)\cdot v)=f(x)(u\,v)^{\alpha}.$$

Подберем $v\not\equiv 0$ так, чтобы было

$$v'+p(x)\,v=0\ ,$$

для чего достаточно решить линейное однородное уравнение первого порядка. После этого для определения u получаем уравнение

$$u'\cdot v=f(x)(u\cdot v)^{\alpha},$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными. Решив его, найдем u, а затем и $y=u\cdot v$.