кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций
для студентов 1-го курса 2-го семестра
специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 14

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальное уравнение первого порядка, его решения. Частные и общие решения. Интегральные кривые. Понятие частной производной функции нескольких переменных. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Теорема Коши о существовании решения дифференциального уравнения (без доказательства).

Дифференциальными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестными являются функции одной или нескольких переменных, причем в уравнения входят не только сами функции, но и их производные. Если неизвестными являются функции нескольких переменных, то уравнения называются уравнениями в частных производных. В противном случае, т.е. если неизвестные функции являются функциями одной переменной, уравнения называются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Мы будем изучать обыкновенные дифференциальные уравнения и системы таких уравнений.

Пример. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(0;1)$, у которой угловой коэффициент касательной в каждой точке равен ординате точки касания.

По условию, если уравнение кривой имеет вид $y = y(x)$, то

$$y' = y.$$

Дополнительно известно, что $y(0) = 1$.

Полученное дифференциальное уравнение является примером уравнения первого порядка; порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной неизвестной функции, входящей в уравнение. В общем виде дифференциальное уравнение 1-го порядка можно записать так:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

где x – независимая переменная, $y = y(x)$ – неизвестная функция, $y' = y'(x)$ – производная этой функции, а F – заданная функция трех переменных.

Решением такого дифференциального уравнения называется функция $y = y(x)$, определенная и дифференцируемая на некотором интервале I, после подстановки которой в уравнение (1) получается верное равенство при любом $x \in I$. График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой этого уравнения. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения часто называют интегрированием, а сами решения – интегралами этого уравнения.

Нам потребуются некоторые понятия, относящиеся к функциям двух переменных. Все множества, о которых идет речь в нижеследующих определениях, являются плоскими. Окрестностью точки на плоскости называется открытый круг (т.е. круг без точек ограничивающей его окружности) положительного радиуса с центром в этой точке. Множество называется открытым, если вместе с каждой своей точкой оно содержит и некоторую ее окрестность. Множество называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в этом множестве. Множество называется областью, если оно одновременно открыто и связно.

Примеры. Круг $K = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$ радиуса 1 с центром в начале координат является открытым множеством; круг $\overline{K} = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ открытым множеством не является.

Оба круга K и $\overline{K}$ являются примерами связных множеств; при этом круг K является областью. Объединение двух непересекающихся кругов не является связным множеством (и, следовательно, не является областью).

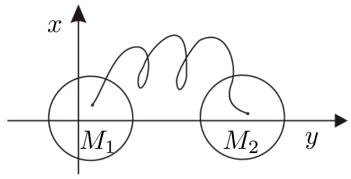

Рис.1

Уравнением, разрешенным относительно производной, называется уравнение вида

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Пусть правая часть этого уравнения определена на некоторой области G плоскости переменных x и y, а функция

$$y = f(x, C). \tag{3}$$

определена на области D плоскости переменных x, C.

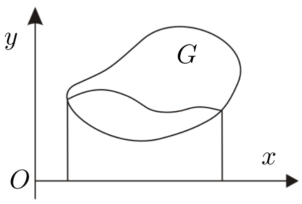

Рис.2

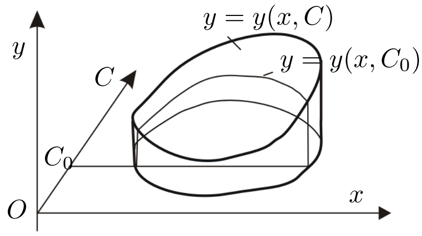

Рис.3

Функция (3) называется общим решением уравнения (2), если выполнены следующие условия.

1. При любом фиксированном C функция $y = y(x, C)$ есть решение данного дифференциального уравнения (такое решение, получающееся из общего решения при фиксированном C называют частным решением).

2. Для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ найдется значение $C = C_0$ такое, что $y_0 = y(x_0, C_0)$.

По поводу первого пункта этого определения следует заметить, что при некоторых значениях C может и не существовать таких x, при которых $(x, C) \in D$. Эти значения C следует исключить из рассмотрения. Если значения x, при которых $(x, C) \in D$ существуют, то может случиться, что областью определения функции $y = y(x, C)$ при фиксированном C служит объединение нескольких (или даже бесконечного числа) непересекающихся интервалов. В этом случае имеются в виду решения, заданные на отдельных интервалах, входящих в указанную область определения.

Интегрируя то или иное дифференциальное уравнение, мы нередко приходим к соотношению вида

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{4}$$

Разрешив это соотношение относительно y, получаем отсюда общее решение. Однако выразить y из (4) в элементарных функциях не всегда возможно. В таких случаях общее решение оставляют в неявном виде. Равенство (4), неявно задающее общее решение, называют общим интегралом соответствующего дифференциального уравнения. Неявно заданное решение, получаемое из (4) при фиксированном C, называют частным интегралом.

Пример. Покажем, что

$$y = Ce^x \tag{5}$$

есть общее решение уравнения

$$y' = y, \tag{6}$$

полученного в рассмотренном в начале лекции примере.

Очевидно, при любом фиксированном C функция (5) есть решение уравнения (6). Если задана произвольная точка (x_0, y_0), то для нахождения соответствующего значения C_0 имеем уравнение

$$y_0 = Ce^{x_0},$$

откуда $C_0 = y_0 e^{-x_0}$, и мы получаем такое частное решение

$$y = y_0 e^{x - x_0}.$$

Таким образом, установлено, что (5) есть общее решение уравнения (6). Кривая, проходящая через т. $M(0;1)$, о которой речь в указанном примере, задается, следовательно, уравнением $y = e^x$. То, что других таких кривых не существует, следует из формулируемой ниже теоремы существования и единственности.

Задача Коши для уравнения

$$y' = f(x, y)$$

ставится следующим образом.

Дана точка (x_0, y_0) из области определения правой части этого уравнения. Требуется найти решение, удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0.$$

Это условие называется начальным условием, а x_0 и y_0 – начальными значениями. Геометрически задача Коши заключается в отыскании интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0).

Чтобы сформулировать уже упоминавшуюся теорему существования и единственности, нам потребуется понятие частной производной. Пусть функция $f(x, y)$ определена в области G на плоскости переменных x, y; частной производной этой функции в точке $(x, y) \in G$ по переменному y называется предел (при условии, что он существует):

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Для вычисления такой производной следует зафиксировать x и продифференцировать получившуюся функцию одной переменной.

Теорема (Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка).
Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна вместе со своей частной производной $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ на некоторой области G плоскости переменных x, y. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ существует решение $y = y(x)$ уравнения

$$y' = f(x, y),$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0.$$

Любые два решения этого уравнения, удовлетворяющие одному и тому же начальному условию, совпадают всюду, где они оба определены.

Эту теорему принимаем без доказательства.

Таким образом, при выполнении условий сформулированной теоремы решение соответствующей задачи Коши существует и единственно. На геометрическом языке утверждение теоремы означает, что через каждую точку области, в которой задана правая часть уравнения, проходит в точности одна интегральная кривая этого уравнения. Ясно также, что уравнение, для которого выполнены требования теоремы существования и единственности, имеет бесконечно много решений: достаточно зафиксировать x_0 и рассмотреть решения, удовлетворяющие начальному условию $y(x_0) = y_0$ при различных y_0 таких, что $(x_0, y_0) \in G$.

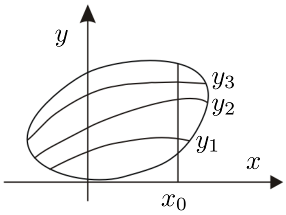

Рис.4

Таким способом можно получить столько различных решений, сколько точек имеется на соответствующем интервале.