кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра

специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекции 12-13

Вычисление объемов тел по площадям поперечных сечений и объемов тел вращения. Вычисление длины дуги кривой и площади поверхности вращения. Метод Симпсона приближенного вычисления определенного интеграла.

Определенные интегралы можно применять и для вычисления объемов. Пусть тело M (рис. 1) заключено между плоскостями $x = a$ и $x = b$, и пусть для каждой точки $x \in [a, b]$ известна площадь $S(x)$ фигуры, получающейся в сечении тела M плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс и проходящей через указанную точку. Предположим далее, что проекции двух сечений тела M такими плоскостями на плоскость OYZ лежат одна в другой (во всяком случае, для сечений, отвечающих достаточно близким плоскостям). Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b. \qquad (*)$$

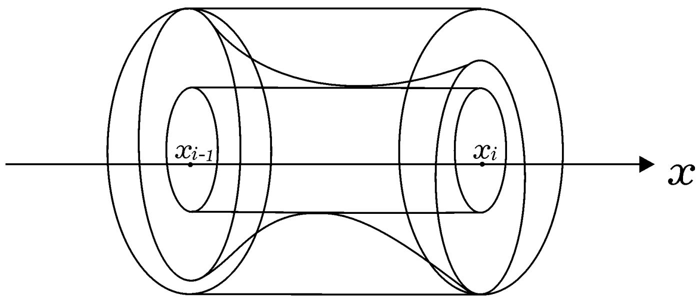

Рис. 1

Тогда объем V_i части M_i тела, расположенной между плоскостями $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$ в силу сделанного выше предположения о проекциях сечений тела M при достаточно малом диаметре разбиения (*) удовлетворяет неравенству

$$S(\eta_i)\Delta x_i \leqslant V_i \leqslant S(\xi_i)\Delta x_i \,,$$

где $S(\eta_i)$ и $S(\xi_i)$ – соответственно минимальное и максимальное значение функции $S(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$; здесь мы предполагаем дополнительно, что $S(x)$ непрерывна на $[a, b]$.
Геометрический смысл величин $S(\eta_i)\Delta x_i$ и $S(\xi_i)\Delta x_i$ очевиден - это объемы прямых

круговых цилиндров, один из которых содержится в части M_i тела M, а другой содержит внутри себя эту часть. Переходя в этом неравенстве к пределу при $max_i \Delta x_i \to 0$, получим неравенство

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx \ , \qquad \text{где} \quad V = \sum_{i=1}^{n} V_i \ - \quad \text{объем тела } M.$$

Если тело M получено вращением графика непрерывной функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, то, очевидно,

$$S(x) = \pi f^2(x),$$

и мы получаем такую формулу для вычисления объема тела вращения:

$$V + \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

Пример. Найти объем эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Рассматриваемое тело расположено между плоскостями $x = \pm a$. В сечении этого тела плоскостью, проходящей через точку $x \in (-a, a)$ перпендикулярно оси абсцисс, имеем эллипс

$$\frac{y^2}{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} + \frac{z^2}{c^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} = 1.$$

Площадь сечения $S(x)$ равна

$$S(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Заметим, что это равенство справедливо и при $x = \pm a$. Отсюда для искомого объема V получаем:

$$V = 2\int\limits_0^a S(x)dx = \frac{2\pi bc}{a^2}\int\limits_0^a (a^2 - x^2)dx = \frac{2\pi bc}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Рассмотрим вопрос о вычислении длины дуги кривой. В начальном курсе анализа было установлено, что непрерывно дифференцируемая плоская кривая Γ, заданная уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(x), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

спрямляема, и производная $S'(t)$ переменной длины дуги вычисляется по формуле:

$$S'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

Т.к. одной из первообразных функции из правой части этого равенства является

$$F(t) = \int\limits_a^t \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2} d\tau,$$

то отсюда, поскольку $F(a)=0$, следует равенство

$$S(t)=\int\limits_a^t \sqrt{(x'(\tau))^2+(y'(\tau))^2}d\tau.$$

Поэтому для длины всей кривой имеем формулу

$$l(\Gamma)=\int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt.$$

Если кривая Γ задана явно уравнением

$$y=y(x),\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

то, беря x в качестве параметра, получаем такую формулу

$$l(\Gamma)=\int\limits_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}dx.$$

Пусть кривая Γ задана в полярных координатах:

$$r=r(\varphi),\quad \alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta.$$

Тогда $\qquad x=r(\varphi)\cos\varphi,\quad y=r(\varphi)\sin\varphi,\quad \alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta;$

$$\sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2}=\sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi)^2+(r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi)^2}=$$
$$=\sqrt{(r'(\varphi))^2+r^2(\varphi)}.$$

Поэтому

$$l(\Gamma)=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(r'(\varphi))^2+r^2(\varphi)}d\varphi.$$

Отметим еще формулу

$$l(\Gamma)=\int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt$$

для длины пространственной кривой Γ, заданной уравнениями

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),\qquad a\leqslant t\leqslant b.$$

Пример. Пусть кривая Γ задана уравнениями

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=\operatorname{ch} t,\qquad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Тогда

$$l(\Gamma)=\int\limits_0^1 \sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+\operatorname{sh}^2 t}dt\ =\ \int\limits_0^1 \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}dt\ =$$

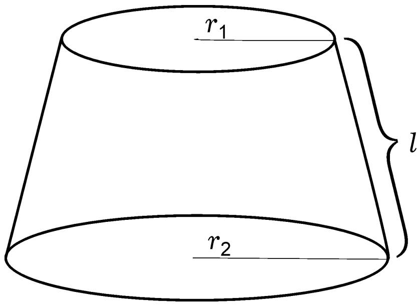

Рис. 2

$$= \int\limits_0^1 \operatorname{ch} t dt \; = \; \operatorname{sh} t|_0^1 \; = \; \operatorname{sh} 1 \; = \; \frac{e^2 - 1}{2e}.$$

Рассмотрим понятие площади поверхности вращения (рис. 2).

Из курса элементарной стереометрии известно, что площадь боковой поверхности усеченного конуса равна

$$2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot l.$$

Пусть плоская кривая Γ задана в виде графика непрерывно дифференцируемой неотрицательной функции

$$y = y(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

и пусть поверхность S получена вращением этой кривой вокруг оси OX (рис. 3).

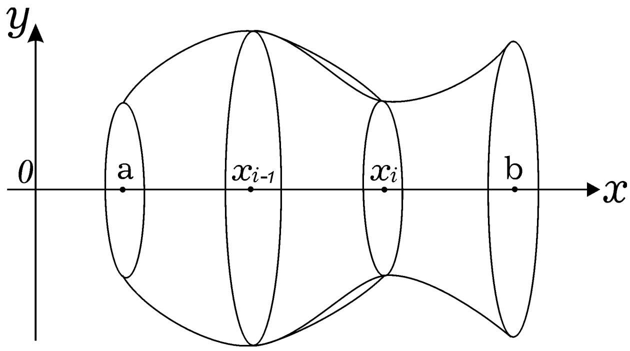

Рис. 3

Рассмотрим разбиение τ

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b \qquad \text{отрезка} \quad [a, b],$$

построим ломаную с вершинами в точках $(x_i, \; y(x_i)), \; i = 0, 1, ..., n,$ вписанную в кривую Γ, и рассмотрим поверхность S', полученную вращентем этой ломанной вокруг оси OX.

Эта поверхность является объединением боковых поверхнеостей усеченных конусов, и ее площадь

$$\mu S' = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \frac{y(x_{i-1}) + y(x_i)}{2} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y(x_i) - y(x_{i-1}))^2}.$$

Площадью μS поверхности S, полученной вращением кривой Γ вокруг оси OX, называется предел площадей $\mu S'$ при $\lambda(\tau) = max_i \Delta x_i \to 0$. Для вычисления этого предела преобразуем указанное выше выражение для $\mu S'$, используя уже известный прием с применением теоремы Лагранжа:

$$\mu S' = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y(x_{i-1}) + y(x_i)}{2} \sqrt{1 + (y'(\xi_i))^2} \Delta x_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} y(\xi_i) \sqrt{1 + (y'(\xi_i))^2} \Delta x_i +$$

$$+2\pi \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y(x_{i-1}) + y(x_i)}{2} - y(\xi_i) \right) \cdot \sqrt{1 + (y'(\xi_i))^2} \Delta x_i. \qquad (*)$$

При $\lambda(\tau) \to 0$ первая сумма, очевидно, стремится к интегралу

$$2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Второе слагаемое при указанном предельном переходе стремится к нулю. Чтобы доказать это, заметим сначала, что $y'(x)$ в силу непрерывности ограничена на отрезке $[a, b]$:

$$|y'(x)| \leqslant M \quad \text{для любого} \quad x \in [a, b].$$

Поэтому

$$\left| \frac{y(x_{i-1}) + y(x_i)}{2} - y(\xi_i) \right| \leqslant \frac{|y(x_{i-1}) - y(\xi_i)| + |y(x_i) - y(\xi_i)|}{2} =$$

$$= \frac{|y'(\eta_i)(\xi_i - x_{i-1})| + |y'(\xi_i)(x_i - \xi_i)|}{2} \leqslant M \Delta x_i.$$

Пользуясь этой оценкой, получаем

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y(x_{i-1}) + y(x_i)}{2} - y(\xi_i) \right) \sqrt{1 + (y'(\xi_i))^2} \Delta x_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} M \sqrt{1 + M^2} \Delta x_i^2 \leqslant$$

$$\leqslant \lambda(\tau) M \sqrt{1 + M^2} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \lambda(\tau) M \sqrt{1 + M^2} (b - a) \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda(\tau) \to 0.$$

Поэтому в (*) вторая сумма стремится к нулю при $\lambda(\tau) \to 0$ и для площади поверхности вращения имеем формулу

$$\mu S = 2\pi \int_a^b y(x) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Заметим, что если в этой формуле заменить под знаком интеграла $y(x)$ на $|y(x)|$, то условие неотрицательности функции $y(x)$ можно отбросить.

Пример. Площадь поверхности вытянутого эллипсоида вращения. Такой эллипсоид получается при вращении вокруг оси OX эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > b.$$

Имеем

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2, \qquad y \cdot y' = -\frac{b^2}{a^2} x,$$

$$y\sqrt{1+y'^2} \;=\; \sqrt{y^2+(yy')^2} \;=\; \sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2+\frac{b^4}{a^4}x^2} \;=\; \frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}.$$

Отношение $\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\varepsilon^2$, где ε – эксцентриситет эллипса, поэтому, учитывая симметричность рассматриваемой поверхности, для искомой площади μS получаем такое выражение (которое преобразовываем с помощью замены $x=\dfrac{t}{\varepsilon}$):

$$\mu S = 4\pi\frac{b}{a}\int\limits_0^a \sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx = 4\pi\frac{b}{a\varepsilon}\int\limits_0^{a\varepsilon}\sqrt{a^2-t^2}dt.$$

Используя найденную ранее первообразную

$$\int\sqrt{a^2-t^2}\,dt = \frac{t}{2}\sqrt{a^2-t^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{t}{a}+C,$$

получаем отсюда:

$$\mu S = 4\pi\frac{b}{a\varepsilon}\left(\frac{t}{2}\sqrt{a^2-t^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{t}{a}\right)\Bigg|_0^{a\varepsilon} = 4\pi\frac{b}{a\varepsilon}\left(\frac{a\varepsilon}{2}\sqrt{a^2-a^2\varepsilon^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\varepsilon\right).$$

Т.к. $a^2-a^2\varepsilon^2=a^2-a^2\dfrac{a^2-b^2{}^2}{a}=b^2$, то окончательно имеем

$$\mu S = 4\pi\frac{b}{a\varepsilon}\left(\frac{ab\varepsilon}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\varepsilon\right) = 2\pi b\left(b+\frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right).$$

Рассмотрим теперь формулу Симпсона, позволяющую находить приближенные значения определенных интегралов. Формулы для приближенных значений интегралов называются квадратурными формулами.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $f(x)$. Возьмем разбиение этого отрезка точками

$$x_i = a+\frac{b-a}{n}i, \qquad i=0,1,...,n,$$

на n равных частей и выберем точки

$$\xi_i = \frac{x_i+x_{i-1}}{2} = a+\frac{b-a}{n}\left(i-\frac{1}{2}\right),$$

являющиеся серединами отрезков разбиения.

На каждом отрезке $[x_{i-1},\ x_i]$ заменим приближенно интеграл $\displaystyle\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ интегралом

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(Ax^2+Bx+C)dx \qquad\qquad (*)$$

от квадратичной функции, график которой проходит через точки

$$(x_{i-1},\ f(x_{i-1})), \qquad (\xi_i,\ f(\xi_i)), \qquad (x_i,\ f(x_i)).$$

Непосредственное нахождение коэффициентов $A,\ B,\ C$ связано с громоздкими вычислениями, которых можно избежать, например, следующим образом. В интеграле (*) сделаем замену переменной $x=t+\xi_i$. Тогда получим интеграл

$$\int\limits_{-\eta}^{\eta}\left(\tilde{A}t^2+\tilde{B}t+\tilde{C}\right)dt, \qquad \text{где} \quad \eta=\frac{1}{2}\Delta x_i,$$

$$\tilde{A}t^2 + \tilde{B}t + \tilde{C} = A(t+\xi_i)^2 + B(t+\xi_i) + C.$$

Подставляя в последнее равенство вместо t последовательно числа $-\eta$, 0, η, получаем такую систему уравнений для нахождения коэффициентов $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ и $\tilde{C}$:

$$\begin{cases} \tilde{A}\eta^2 - \tilde{B}\eta + \tilde{C} = f(x_{i-1}) \\ \tilde{C} = f(\xi_i) \\ \tilde{A}\eta^2 + \tilde{B}\eta + \tilde{C} = f(x_i). \end{cases}$$

Используя специфику этой системы, легко находим, что

$$\tilde{A} = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i) - 2f(\xi_i)}{2\eta^2},$$

$$\tilde{B} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{2\eta}, \quad \tilde{C} = f(\xi_i).$$

Поэтому последний интеграл равен

$$\left(\tilde{A}\frac{t^3}{3} + \tilde{B}\frac{t^2}{2} + \tilde{C}t\right)\Bigg|_{-\eta}^{\eta} = 2 \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i) - 2f(\xi_i)}{2\eta^2} \cdot \frac{\eta^3}{3} + 2f(\xi_i)\eta =$$

$$= \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i) + 4f(\xi_i)}{3} \cdot \eta = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i) + 4f(\xi_i)}{6}\Delta x_i.$$

Таково же и значение интеграла (*), из которого вычисленный интеграл был получен заменой переменной. Для исходного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ получаем теперь такую приближенную формулу:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x_i}{6}\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1}) + f(x_i) + 4f(\xi_i)) =$$

$$= \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right),$$

в которой $x_i = a + \frac{b-a}{n}i$, $i = 1, ..., n-1$, $\xi_i = a + \frac{b-a}{n}\left(i - \frac{1}{2}\right)$, $i = 1, ..., n.$

Полученная приближенная формула называется формулой Симпсона. Можно доказать, что если $f(x)$ четырежды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, и $|f^{(4)}(x)| \leqslant M$ для всех x из этого отрезка, то абсолютная погрешность формулы Симпсона оценивается сверху величиной

$$\frac{1}{2880} \cdot \frac{M(b-a)^5}{n^4}.$$