кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций
для студентов 1-го курса 2-го семестра
специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 11

Вычисление площадей плоских фигур, ограниченных кривыми, заданными в декартовых координатах, параметрическии и в полярных координатах.

Рассмотрим вопрос о вычислении площади с помощью определенного интеграла. Выше было установлено, что при $f(x) \geqslant 0$ площадь S соответствующей криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ неположительна, т.е. $f(x) \leqslant 0$, то, очевидно,

$$S = -\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Пользуясь этими замечаниями, нетрудно установить, что если плоская геометрическая фигура ограничена сверху и снизу соответственно графиками непрерывных функций $\psi(x)$ и $\varphi(x)$, $\psi(x) \geqslant \varphi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, а с боков - отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, то площадь S этой фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b (\psi(x) - \varphi(x))dx.$$

Если плоская кривая задана параметрически, т.е. в виде

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

причем

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b, \quad a < b, \quad \varphi'(t) > 0 \quad \text{на} \quad [\alpha, \beta],$$

то эту же кривую можно задать и явным уравнением

$$y = y(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

где $y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$; $\varphi^{-1}(x)$ − функция, обратная по отношению к $\varphi(t)$. Все это хорошо известно из начального курса анализа.

Если $y(x) \geqslant 0$, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции можно вычислить следующим образом:

$$S = \int\limits_a^b y(x)dx = \int\limits_a^b \psi(\varphi^{-1}(x))dx = \left[\begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right] =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \psi(\varphi^{-1}(\varphi(t))) \cdot \varphi'(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Т.о., в данном случае справедлива формула

$$S = \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Нетрудно видеть, что при $\varphi'(t) < 0$ эта формула справедлива лишь с точностью до знака; поэтому в общем случае

$$S = \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)|\varphi'(t)|dt.$$

Пример. Вычислим площадь, ограниченную эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$ Запишем параметрические уравнения данного эллипса:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

При таком представлении дуга эллипса, лежащая в первой четверти, отвечает изменению параметра t на отрезке $[0, \pi/2]$. Используя симметричность эллипса, для искомой площади S получаем формулу

$$S \;=\; 4\int\limits_0^{\pi/2} b\sin t|-a\sin t|dt \;=\; 4ab\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t dt \;=$$

$$= 4ab\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2}dt \;=\; 4ab\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi ab, \qquad \text{т.е.} \quad S = \pi ab.$$

Криволинейным сектором называется геометрическая фигура, ограниченная отрезками лучей $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ (рис. 1).

Для вычисления площади криволинейного сектора рассмотрим разбиение

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < ... < \varphi_n = \beta \quad \text{отрезка} \quad [\alpha, \beta]$$

и предположив, что $r(\varphi)$ непрерывна на рассматриваемом отрезке (рис. 2), напишем очевидное неравенство

$$\frac{1}{2}r^2(\eta_i)\Delta\varphi_i \;\leqslant\; S_i \;\leqslant\; \frac{1}{2}r^2(\xi_i)\Delta\varphi_i, \qquad (*)$$

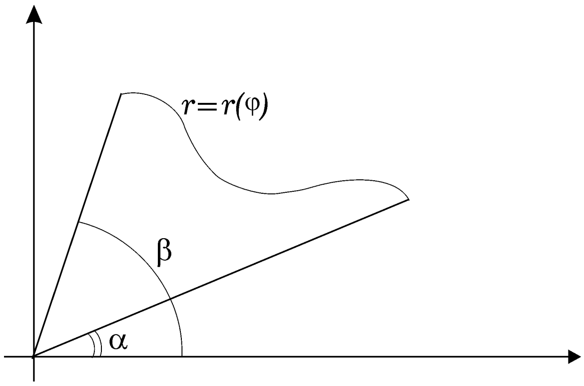

Рис. 1

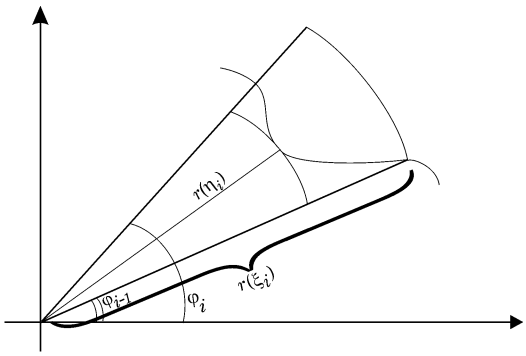

Рис. 2

в котором S_i – площадь криволинейного сектора, отвечающего изменению φ на отрезке $[\varphi_{i-1},\ \varphi_i]$; $r(\eta_i)$ и $r(\xi_i)$ – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $r(\varphi)$ на указанном частичном отрезке разбиении; при составлении неравенства (*) была использована известная школьная формула для площади криволинейного сектора. Кроме того, мы предполагаем дополнительно, что $r(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\ \beta]$. Суммируя неравенства (*) по $i = 1, 2, ..., n$ получим, что для площади S рассматриваемого криволинейного сектора справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r^2(\eta_i)\Delta\varphi_i \ \leqslant\ S\ \leqslant\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r^2(\xi_i)\Delta\varphi_i.$$

Переходя здесь к пределу при $max_i\Delta\varphi_i \to 0$, получаем требуемую формулу:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.$$

Пример. Пусть требуется вычислить площадь, ограниченную лемнискатой Бернулли $r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ (рис. 3).

Используя симметричность этой кривой, получаем:

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/4} a^2\cdot 2\cos 2\varphi d\varphi = 4a^2\frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/4} = 2a^2.$$

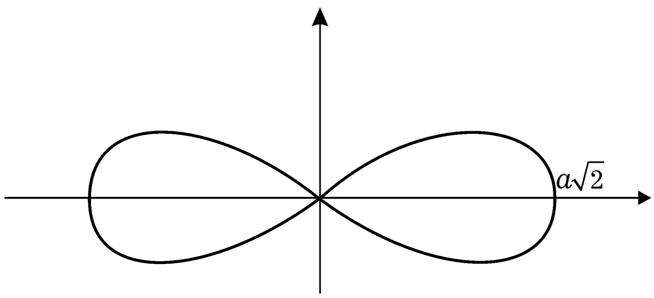

Рис. 3