кафедра «Математическое моделирование»

проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра

специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекции 9-10

Признаки сходимости несобственных интегралов. Абсолютная и условная сходимости. Несобственные интегралы с несколькими особенностями.

Поскольку вычислить несобственный интеграл удается далеко не всегда, основное внимание уделяется вопросам сходимости.
Рассмотрим сначала неотрицательную функцию $f(x)$, заданную при $x \geqslant a$ и интегрируемую на любом отрезке $[a, b]$. В этом случае функция

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx \qquad (*)$$

будет неубывающей на промежутке $[a, +\infty)$; применяя известный признак существования предела монотонной функции, получаем отсюда, что предел

$$\lim_{b \to +\infty} F(b) = \int_a^\infty f(x)dx \qquad (**)$$

существует тогда и только тогда, когда $F(b)$ ограничена при всех достаточно больших b. Рассмотрим теоремы, в которых используется последнее замечание.

Теорема (признак сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ при любом b, и пусть для любого $x \geqslant a$ выполняется неравенство $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.
Тогда из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$, а из расходимости $\int\limits_a^\infty f(x)dx$, следует расходимость $\int\limits_a^\infty g(x)dx$.

Доказательство. Из неравенства $f(x) \leqslant g(x)$ следует, что для любого b

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

Если второй из этих интегралов сходится, то, ввиду неотрицательности $g(x)$ для некоторой константы C при всех $b \geqslant a$ выполняется неравенство

$$\int_a^b g(x)dx \leqslant C.$$

Но тогда из предыдущего неравенства для интегралов следует, что при $b \geqslant a$

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant C.$$

Отсюда вытекает сходимость последнего интеграла.
Если интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ расходится, а интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходится, то мы получаем противоречие с только что доказанным. Поэтому расходимость первого интеграла влечет расходимость второго.
Теорема доказана.

Пример. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\ln x + 1}}$. Известно, что интеграл $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x}$ расходится. Поэтому из неравенства $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\ln x + 1}}$ следует расходимость интеграла $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{\ln x + 1}}$.

Теорема (признак сравнения в предельной форме). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны при $x \geqslant a$ и интегрируемы на любом отрезке $[a, b]$. Тогда, если существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K, \quad 0 < K < \infty,$$

то интегралы $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ и $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. В теореме содержатся четыре утверждения. Докажем лишь одно из них: если интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx$. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{K}{2} > 0$. Тогда при всех $x \geqslant \Delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad K - \varepsilon \ < \ \frac{f(x)}{g(x)} \ < \ K + \varepsilon.$$

Т.к. $K - \varepsilon = \dfrac{K}{2}$, то отсюда следует, что при всех указанных x выполняется неравенство $\dfrac{K}{2}g(x) < f(x)$. На основании предыдущей теоремы получаем, что сходится интеграл

$$\int_{\Delta(\varepsilon)}^\infty \frac{K}{2} \cdot g(x)dx,$$

а тогда сходится и интеграл $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$. Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично. Теорема доказана.

Замечание. Из этой теоремы вытекает, что если $f(x)$ и $g(x)$ положительны (по крайней мере для достаточно больших x) и являются эквивалентными бесконечно малыми при $x \to \infty$, то интегралы от этих функций указанного вида сходятся или расходятся одновременно.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} \arcsin\frac{1}{x}dx.$$

Т.к. $\arcsin\dfrac{1}{x} > 0$ при $x \geqslant 1$, и $\arcsin\dfrac{1}{x} \sim \dfrac{1}{x}$ при $x \to \infty$, то из расходимости интеграла $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x}$ следует расходимость данного интеграла.
Аналогичные признаки сходимости (расходимости) справедливы и для несобственных интегралов второго рода.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}\cdot\sin x\cdot\arcsin x\cdot\operatorname{arctg} x\cdot\operatorname{sh} x}{(\sqrt{1+x}-1)(1-\cos x)(e^x-1)\ln(1+x)}dx.$$

Обозначим подынтегральную функцию через $f(x)$. Положительность этой функции для всех $x \in (0,1]$ не вызывает сомнения. Используя известную таблицу эквивалентных бесконечно малых, получаем, что

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}\cdot x^4}{\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x^2\cdot x^2} = \frac{4}{\sqrt{x}}, \quad x \to +0.$$

Известно, что интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится. Поэтому сходится и исследуемый интеграл.
Более сложным является вопрос о сходимости несобственных интегралов от функций, принимающих значения разных знаков. Пусть функция $f(x)$ определена при $x \geqslant a$ и интегрируема на любом отрезке $[a,b]$. Тогда то же самое верно и для функции $|f(x)|$. Поэтому в данной ситуации мы можем рассмотреть два несобственных интеграла

$$I_1 = \int\limits_a^{\infty} f(x)dx \qquad \text{и} \qquad I_2 = \int\limits_a^{\infty} |f(x)|dx.$$

Если I_2 сходится, то про I_1 говорят, что этот интеграл сходится абсолютно. Если же I_1 сходится, а I_2 расходится, то говорят, что I_1 сходится условно.

Теорема (о сходимости абсолютно сходящегося интеграла). Если интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Здесь, как обычно, предполагается, что функция $f(x)$ определена при $x \geqslant a$ и интегрируема на каждом отрезке $[a,b]$. Напишем очевидное неравенство, верное для любого $x \geqslant a$:

$$0 \leqslant f(x) + |f(x)| \leqslant 2|f(x)|.$$

Т.к. $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ по условию сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^\infty 2 \cdot |f(x)|dx$. Следовательно, по признаку сравнения сходится интеграл

$$\int\limits_a^\infty (f(x) + |f(x)|)dx.$$

Но тогда сходится и интеграл

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \int\limits_a^\infty (f(x) + |f(x)|)dx - \int\limits_a^\infty |f(x)|dx.$$

Теорема доказана.

Пример. Интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}dx$ сходится абсолютно, т.к. сходится интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{|\cos x|}{x\sqrt{x}}dx.$$

Сходимость последнего интеграла вытекает из очевидного неравенства

$$\frac{|\cos x|}{x\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

и сходимости интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

Привести пример условно сходящегося интеграла не так-то просто.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx.$$

Имеем

$$\int\limits_1^A \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx \quad = \quad \int\limits_1^A \frac{(-\cos x)'}{\sqrt{x}}dx \quad = \quad -\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\bigg|_1^A - \frac{1}{2}\int\limits_1^A \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}dx.$$

Предел правой части при $A \to \infty$ существует: для двойной подстановки это очевидно, а для интеграла это верно в силу его сходимости (установленной в последнем примере). Таким образом, интеграл I сходится. Докажем, что абсолютной сходимости здесь нет. Для этого заметим сначала, что

$$\int\limits_{K\pi}^{(K+1)\pi} |\sin x|dx = \left[\begin{array}{c} x = t + K\pi \\ dx = dt \end{array}\right] = \int\limits_0^\pi \sin t dt = -\cos t\big|_0^\pi = 2,$$

и $\qquad \dfrac{|\sin x|}{\sqrt{x}} \geqslant \dfrac{|\sin x|}{\sqrt{(K+1)\pi}}\,, \qquad$ если $\quad K\pi \leqslant x \leqslant (K+1)\pi\,, \quad K=1,2,....$

Отсюда

$$\int\limits_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{n}{\sqrt{n+1}} \to \infty \qquad \text{при} \qquad n \to \infty.$$

Поэтому интеграл $\displaystyle\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}dx$ расходится, а тогда расходится и интеграл $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}dx$. Итак, интеграл $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ сходится условно.

Рассмотрим еще т.н. интегралы с несколькими особенностями. Пусть $I -$ промежуток с граничными точками a и b, $\;-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, и пусть существует разбиение

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

этого промежутка такое, что некоторая функция $f(x)$, определенная во всех точках промежутка I за исключением, быть может, точек указанного разбиения, интегрируема в собственном смысле на любом отрезке, целиком лежащем на каком-либо из интегралов (x_{i-1}, x_i), $\;i = 1, ..., n$. В этой ситуации можно рассмотреть (вообще говоря, несобственные) интегралы

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Если все эти интегралы сходятся, то говорят, что $f(x)$ интегрируема на промежутке I; соответствующий несобственный интеграл определяется равенством

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

Используя свойства интегралов, можно показать, что правая часть не зависит от выбора разбиения, обладающего указанными выше свойствами.

Пример. Рассмотрим интеграл $I = \displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x^2-1)}}$. Разбиение, о котором речь в последнем определении, состоит из точек $-1,\ 0,\ 1$;

$$I = \int\limits_{-1}^{0} + \int\limits_{0}^{1}.$$

Оба последних интеграла сходятся, поэтому функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x(x^2-1)}}$ интегрируема на $(-1;1)$.