кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра
специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 8

Несобственные интегралы по бесконечному промежутку (1-го рода). Несобственные интегралы от неограниченных функций на отрезке (2-го рода).

Определенный интеграл от неограниченной на отрезке функции не существует; функцию, заданную на неограниченном промежутке, нельзя проинтегрировать по этому промежутку. Эти ограничения оказываются неудобными при рассмотрении многих теоретических и прикладных задач. Поэтому возникает необходимость расширить понятие интеграла. Это делается с помощью дополнительного предельного перехода.
Рассмотрим сначала интегралы по неограниченному промежутку.
Пусть функция $f(x)$ определена при $x \geqslant a$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$. Тогда на промежутке $[a, +\infty)$ определена функция

$$F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если существует (конечный) предел

$$\lim_{b\to+\infty} F(x), \qquad (*)$$

то этот предел называется несобственным интегралом (1-го рода) от функции $f(x)$ по промежутку $[a, +\infty)$ и обозначается

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx.$$

В случае существования предела (*) последний интеграл называют сходящимся, в противном случае - расходящимся.
Если $f(x) \geqslant 0$ и интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится, то значение этого интеграла можно истолковать геометрически как площадь бесконечной криволинейной трапеции (рис. 1).

Для функции $f(x)$, заданной для $x \leqslant b$ и интегрируемой на любом отрезке $[a, b]$, можно рассмотреть несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx.$$

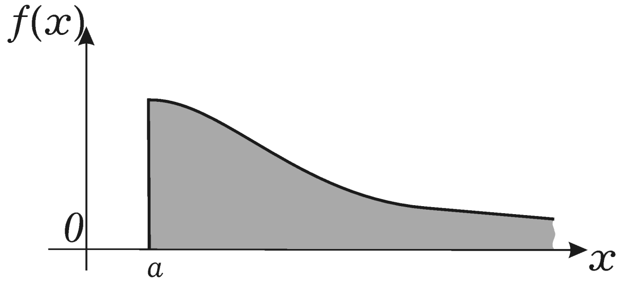

Рис. 1

Если же функция $f(x)$ определена на всей вещественной прямой и интегрируема на любом отрезке $[a,b]$, то, выбрав произвольно точку c на этом отрезке, можно рассмотреть несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx.$$

Такой интеграл считается сходящимся, если существуют оба предела в правой части последнего равенства. Нетрудно проверить, что сходимость (т.е. существование) интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ и его значение не зависят от выбора точки c .

Из определений несобственных интегралов следует, что для непрерывной функции $f(x)$ в случае сходимости соответствующих интегралов справедливы следующие обобщения формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{\infty},$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{\infty},$$

где $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на соответствующем промежутке;

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x), \qquad F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x).$$

Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

При $\alpha \neq 1$ имеем

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{1}^{\infty} = \begin{cases} \infty, & \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

При $\alpha = 1$ получаем

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_{1}^{\infty} = \infty.$$

Итак, интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при α и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Свойства несобственных интегралов вытекают из известных свойств пределов и определенных интегралов.

В перечисленных ниже свойствах 1-3 будем считать, что функции $f(x)$ и $g(x)$ определены при $x \geqslant a$ и интегрируемы на любом отрезке $[a, b]$.

1. Аддитивность. Пусть $c \in [a, +\infty)$. Тогда несобственные интегралы

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx \qquad \text{и} \qquad \int\limits_c^\infty f(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно и в случае сходимости

$$\int\limits_a^\infty = \int\limits_a^c + \int\limits_c^\infty .$$

В самом деле,

$$\int\limits_a^b = \int\limits_a^c + \int\limits_c^b .$$

Переходя здесь к пределу при $b \to \infty$, получаем требуемое.

2. Линейность. Пусть существуют интегралы

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx \qquad \text{и} \qquad \int\limits_a^\infty g(x)dx.$$

Тогда для любых вещественных чисел α и β существует интеграл от функции $\alpha f(x)+\beta g(x)$ по промежутку $[a, \infty)$, причем

$$\int\limits_a^\infty (\alpha f(x) \ + \ \beta g(x))dx \ = \ \alpha \int\limits_a^\infty f(x)dx \ + \ \beta \int\limits_a^\infty g(x)dx.$$

Справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из определения несобственных интегралов.

3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $[a, \infty)$, и пусть для любого x из этого промежутка $f(x) \leqslant g(x)$.

Тогда

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx \ \leqslant \ \int\limits_a^\infty g(x)dx.$$

Доказательство очевидно.

Рассмотрим несобственные интегралы 2-го рода. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b)$ и не ограничена ни на каком интервале вида $(b-\epsilon,\ b)$, $\quad 0 < \epsilon < b-a$. Предположим далее, что эта функция интегрируема на отрезке $[a, \eta]$ при любом $\eta < b$.

Предел (если он существует)

$$\lim_{\eta \to b-0} f(x)dx \qquad\qquad (*)$$

называется несобственным интегралом (2-го рода) от (неограниченной) функции $f(x)$ по промежутку $[a, b)$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Можно доказать, что если при выполнении прочих перечисленных выше условий функция $f(x)$ ограничена на $[a, b)$, то после доопределения этой функции при $x = b$ любым значением получается интегрируемая на $[a, b]$ функция, причем интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ равен пределу (*). Поэтому новое понятие получается лишь для функции $f(x)$, неограниченной на любом интервале вида $(b - \varepsilon,\ b)$. Геометрически несобственный интеграл рассматриваемого вида истолковывается как площадь неограниченной криволинейной трапеции (рис. 2).

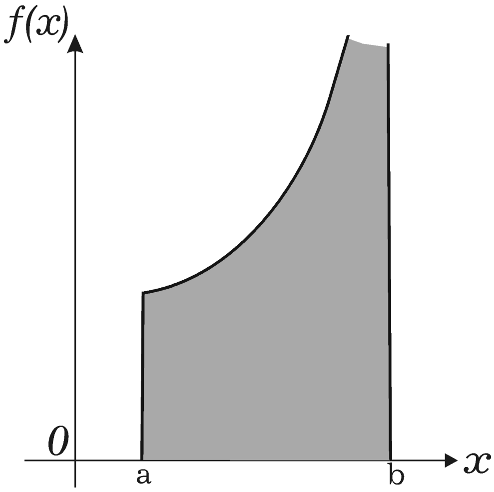

Рис. 2

Если функция $f(x)$ задана на полуинтервале $(a, b]$ и не ограничена на интервале $(a,\ a + \varepsilon)$ при любом ε, $0 < \varepsilon < b - a$, и при этом интегрируема на любом отрезке $[\xi, b]$, $\xi > a$, то можно рассмотреть предел

$$\lim_{\xi \to a+0} \int_\xi^b f(x)dx.$$

В случае существования этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $(a, b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

В случае неограниченности функции $f(x)$, заданной на интервале (a, b), в соответствующих полуокрестностях точек a и b, можно рассмотреть интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi \to a+0} \int_\xi^c f(x)dx + \lim_{\eta \to b-0} \int_c^\eta f(x)dx, \qquad (*)$$

который существует тогда и только тогда, когда существуют оба предела в правой части. Как и в случае несобственных интегралов 1-го рода, можно доказать, что значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)$ не зависит от выбора точки c .

Разумеется, при рассмотрении последнего интеграла предполагалось, что функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[\xi, \eta] \subset (a, b)$. Для несобственных интегралов 2-го рода справедлива обобщенная формула Ньютона-Лейбница; для интеграла (*) эта формула имеет вид:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a+0),$$

где функция $f(x)$ непрерывна на (a, b) и $F(x)$ – первообразная этой функции на указанном интервале; $F(b-0) = \lim\limits_{x \to b-0} F(x)$, $F(a+0) = \lim\limits_{x \to a+0} F(x)$.

Примеры.

1. Пусть требуется вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Первообразной функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на интервале $(-1, 1)$ является функция $F(x) = \arcsin x$. Поэтому

$$I = \arcsin x \Big|_{-1}^{1} = \pi.$$

2. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^\alpha}$.

Несобственным такой интеграл является при $\alpha > 0$. Пусть $\alpha \neq 1$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_0^1 = \begin{cases} \infty, & \alpha > 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1. \end{cases}$$

При $\alpha = 1$ имеем

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_0^1 = \infty.$$

Т.о., рассматриваемый интеграл сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

Свойства несобственных интегралов от неограниченных функций аналогичны свойствам интегралов по неограниченным промежуткам.