кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра

специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 7

Определенный интеграл с переменным верхним пределом и теорема о его производной. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов подстановкой и по частям. Интегрирование периодических функций, интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат.

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то, как отмечалось выше, для любого x , $a \leqslant x \leqslant b$, существует интеграл

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad (*)$$

который называется интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема (о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом).
Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция $F(x)$, определяемая равенством $(*)$, непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. Пусть x и $x+\Delta x$ - точки отрезка $[a,b]$. Т.к. $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, и, следовательно, ограничена на этом отрезке, то существует число M такое, что для любого $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M.$ Поэтому

$$|F(x+\Delta x) - F(x)| = \left| \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| =$$

$$= \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \leqslant \left| \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|dt \right| \leqslant \left| \int_x^{x+\Delta x} M dt \right| = M \cdot |\Delta x|,$$

т.е. $|F(x+\Delta x) - F(x)| \leqslant M|\Delta x| \to 0$ при $\Delta x \to 0,$ и функция непрерывна в точке x . Теорема доказана.

Теорема (о производной интеграла с переменным верхним пределом).
Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и непрерывна в некоторой точке x этого отрезка. Тогда функция (*) дифференцируема в точке x , и $F'(x) = f(x).$

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} - f(x) \right) = 0. \qquad (**)$$

Оценим сверху модуль выражения под знаком предела в левой части этого равенства; имеем

$$\left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}-f(x)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\left(\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_x^{x+\Delta x} f(x)dt\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x}(f(t)-f(x))dt\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta x|}\cdot\left|\int\limits_x^{x+\Delta x}|f(t)-f(x)|dt\right|.$$

Т.к. функция f непрерывна в точке x, то для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом t, $|t-x| < \delta$, выполняется неравенство $|f(t)-f(x)| < \varepsilon/2$.

Поэтому для указанных t

$$\left|\int\limits_x^{x+\Delta x}|f(t)-f(x)|dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot|\Delta x|.$$

Окончательно

$$\left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}-f(x)\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta x|}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot|\Delta x| < \varepsilon,$$

если $|\Delta x| < \delta$. Это означает справедливость (**). Теорема доказана.

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она имеет на этом отрезке первообразную. В качестве такой первообразной можно взять, например, интеграл с переменным верхним пределом.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, и $\Phi(x)$ - какая-либо первообразная этой функции на указанном отрезке, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b)-\Phi(a). \qquad (*)$$

Доказательство. Одной из первообразных функции $f(x)$ является

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt;$$

две первообразные функции $f(x)$ различаются самое большее на константу, т.е.

$$\Phi(x) - \int\limits_a^x f(t)dt = C.$$

Подставляя сюда $x = a$, получаем, что $C = \Phi(a)$. Поэтому

$$\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x)-\Phi(a).$$

При $x = b$ получаем требуемую формулу. Теорема доказана.
Доказанную теорему часто называют основной теоремой интегрального исчисления. Формула (*) называется формулой Ньютона-Лейбница; эту формулу часто записывают в виде

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b,$$

правую часть при этом называют двойной подстановкой от a до b . Заметим еще, что формула Ньютона-Лейбница справедлива и при $a \geqslant b$.

Примеры.

1. $\displaystyle\int\limits_a^b x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}$ - результат, не без труда полученный нами ранее.

2. $\displaystyle\int\limits_1^x \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_1^x = \ln x;$

это равенство справедливо при любом $x > 0$.

Теорема (о замене переменной в определенном интеграле). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке I , а функция φ непрерывно дифференцируема на отрезке α, β , причем $\varphi(t) \in I$ для любого $t \in [\alpha, \beta]$. Тогда, если $a = \varphi(\alpha),\quad b = \varphi(\beta)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Доказательство. В силу сделанных предположений оба интеграла, входящие в последнее равенство, существуют. Пусть $F(x) -$ первообразная функции $f(x)$ на отрезке I ; эта первообразная существует в силу непрерывности $f(x)$ на I .
Тогда $F(\varphi(t))$ будет первообразной функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, что проверяется непосредственно. По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a);$$

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Из двух написанных равенств следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теорема (интегрирование по частям для определенного интеграла). Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = u(x) \cdot v(x) - \int\limits_a^x u'(t) \cdot v(t)dt;$$

имеем

$$F'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) - u'(x) \cdot v(x) = u(x) \cdot v(x).$$

Следовательно, $F(x) -$ первообразная для $u(x) \cdot v(x)$. По формуле Ньютона-Лейбница получаем

$$\int\limits_a^b u(x) \cdot v'(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \Big(u(x) \cdot v(x) - \int\limits_a^x u'(t) \cdot v(t)dt\Big)\Big|_a^b =$$

$$= u(x) \cdot v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x) \cdot v(x)dx.$$

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \sin x dx.$$

Имеем

$$I = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} (-\cos x)' dx = -\cos x \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+ \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sqrt{3}} + \ln \sin x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln \frac{2}{\sqrt[4]{27}}.$$

Функция $f(x)$, заданная на всей вещественной прямой, называется периодической с периодом $T \neq 0$, если для любого x выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$.

Теорема(об интеграле от периодической функции).Если периодическая с периодом $T > 0$ функция $f(x)$ интегрируема на каком-либо отрезке длины T , то она интегрируема на любом отрезке, и интеграл

$$\int\limits_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx$$

не зависит от α .

Доказательство. Для упрощения доказательства предположим дополнительно, что $f(x)$ непрерывна при всех x . Напишем очевидное равенство:

$$\int\limits_\alpha^{\alpha+T} = \int\limits_\alpha^0 + \int\limits_0^T + \int\limits_T^{\alpha+T}.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной:

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx \;=\; \int\limits_{0}^{\alpha} f(u+T)du = \int\limits_{0}^{\alpha} f(u)du.$$

Следовательно, в равенстве (*)

$$\int\limits_{\alpha}^{0} + \int\limits_{T}^{\alpha+T} = 0, \quad \text{и} \quad \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} = \int\limits_{0}^{T}.$$

Теорема доказана.

Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-\alpha;\ \alpha]$. Тогда

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int\limits_{-\alpha}^{0} + \int\limits_{0}^{\alpha}.$$

Предположив, что функция $f(x)$ непрерывна, сделаем в первом интеграле замену $x = -t$; получим:

$$\int\limits_{-\alpha}^{0} f(x)dx = -\int\limits_{\alpha}^{0} f(-t)dt = \int\limits_{0}^{\alpha} f(-t)dt.$$

Отсюда

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int\limits_{0}^{\alpha} (f(x)+f(-x))dx.$$

Поэтому в случае четной функции

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{\alpha} f(x)dx,$$

а в случае нечетной

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0.$$