кафедра «Математическое моделирование»

проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра

специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекции 5-6

Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Теорема об интегрируемости кусочно-непрерывной функции (без доказательства). Геометрическая интерпретация определенного интеграла. Основные свойства определенного интеграла. Теоремы об оценке и о среднем значении.

Множество точек $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ называется разбиением отрезка $[a,\ b]$; отрезки $[x_{i-1},\ x_i],\quad i = 1, ..., n,$ называются отрезками разбиения; длина $i-$го отрезка разбиения обозначается Δx_i т.е. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; число $\lambda(\tau) = \max\limits_i \Delta x_i$ называется диаметром разбиения.

Пусть на отрезке $[a,\ b]$ задана функция $f(x)$. Выберем произвольно точки $\xi_i \in [x_{i-1},\ x_i],\quad i = 1, ..., n,$ и составим сумму

$$\sigma(\tau) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

которая называется интегральной суммой функции $f(x)$, отвечающей разбиению τ и точкам $\xi_1, ..., \xi_n,$ выбранным на отрезках разбиения. Предел интегральных сумм $\sigma(\tau)$ при условии, что диаметр разбиения $\lambda(\tau) \longrightarrow 0$, называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$. Этот предел (если он существует и не зависит от выбора точек ξ_i) обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)dx,$$

в котором a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования. Более точно определение предела интегральных сумм выглядит так.

Число I называется пределом интегральных сумм $\sigma(\tau)$ при $\lambda(\tau) \longrightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения τ , для которого $\lambda(\tau) < \delta$ при любом выборе точек на отрезках разбиения выполняется неравенство

$$|I - \sigma(\tau)| < \varepsilon.$$

Это же определение, как и в случае предела функций, можно записать и на языке последовательностей.

Примеры.

1. Пусть $f(x) \equiv C$ на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$\sigma(\tau) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = C\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = C(b-a).$$

Мы видим, что в данном случае интегральные суммы не зависят от способа разбиения отрезка и выбора точек на отрезках разбиения. Поэтому предел таких сумм (при условии, что диаметр разбиения стремится к нулю) равен $C(b-a)$; этому же числу равен и соответствующий интеграл:

$$\int_a^b C dx = C(b-a).$$

2. Пусть $f(x) = x$ на отрезке $[a,b]$. Можно доказать, что интеграл $\int\limits_a^b x dx$ существует. Поэтому предел интегральных сумм не зависит от выбора точек на отрезках разбиения, и , следовательно, данный интеграл равен пределу полусуммы двух интегральных сумм:

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i\Delta x_i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Отсюда ясно, что

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

.

3. Рассмотрим функцию Дирихле

$$\chi(x) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Для любого отрезка $[a,b]$ и для любого его разбиения τ , выбрав все точки на отрезках разбиения рациональными, получим, как и выше, что

$$\sigma(\tau) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a.$$

Выбрав указанные точки иррациональными, получим,что

$$\sigma(\tau) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Нетрудно проверить, что теорема о единственности предела справедлива и для пределов интегральных сумм. Поэтому для функции Дирихле интегральные суммы не имеют предела (при $\lambda(\tau) \longrightarrow 0$), и эта функция неинтегрируема.
В связи с последним примером возникает вопрос об условиях интегрируемости функции.

Теорема (о необходимом условии интегрируемости функции).
Если функция интегрируема на отрезке, то она ограничена (на этом отрезке).
В связи с этой теоремой (на доказательство которой у нас нет времени) заметим, что одной лишь ограниченности еще недостаточно для интегрируемости функции - в этом можно

убедиться на примере функции Дирихле.
Пусть снова имеется функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$. Эта функция называется кусочно-непрерывной на этом отрезке, если существует разбиение

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

такое, что $f(x)$ непрерывна на каждом интервале $(x_{i-1},\ x_i)$, и при этом существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_{i-1}+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_i - 0} f(x)$, $\quad i = 1, 2, ..., n.$
Иными словами, функция $f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$ за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых $f(x)$ имеет разрывы 1-го рода. В частности, непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция кусочно- непрерывна на этом отрезке.

Теорема (об интегрируемости кусочно-непрерывной функции).
Если функция кусочно-непрерывна на некотором отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.
Эту теорему принимаем без доказательства. Из нее следует, что непрерывная на отрезке функция интегрируема (на этом отрезке). Заметим еще, что кусочная непрерывность функции не является необходимым условием интегрируемости.
Рассмотрим геометрическую интерпретацию определенного интеграла. Пусть дана геометрическая фигура, ограниченная свеерху графиком непрерывной неотрицательной функции $f(x)$, с боков отрезками вертикальных прямых $x = a$ и $x = b$ и снизу отрезком $[a, b]$ оси абсцисс. Такая фигура называется криволинейной трапецией (рис. 1).

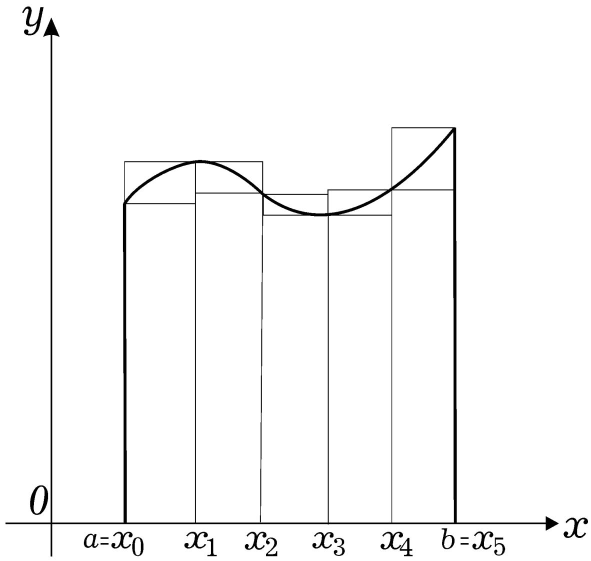

Рис. 1

Вычислим площадь S криволинейной трапеции. Для этого возьмем разбиение $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ на отрезке $[a, b]$ и выберем на отрезке $[x_{i-1},\ x_i]$ точки ξ_i и η_i , в которых достигается соответственно минимальное и максимальное значения непрерывной на этом отрезке функции $f(x)$; $\quad i = 1, 2, ..., n$. Обозначив через S_i площадь криволинейной трапеции, отвечающей изменению x на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, запишем очевидное неравенство

$$f(\xi_i)\Delta x_i \ \leqslant\ S \ \leqslant\ f(\eta_i)\Delta x_i.$$

Просуммируем такие неравенства по $i = 1, 2, ..., n$. Т.к. $\sum_{i-1}^{n} S_i = S$, то

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ \leqslant\ S \ \leqslant\ \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i.$$

Поскольку непрерывная функция интегрируема,то при стремлении диаметра разбиения к нулю получаем отсюда, что

$$\int_a^b f(x)dx \ \leqslant \ S \ \leqslant \ \int_a^b f(x)dx.$$

Следовательно, $S = \int_a^b f(x)dx$. Т.о., интеграл от неотрицательной непрерывной функции равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

Рассмотрим основные свойства определенного интеграла.

1. Линейность. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, и пусть α_1 и α_2 - произвольные вещественные числа. Тогда функция $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ также интегрируема на $[a, b]$, и

$$\int_a^b (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))dx = \alpha_1 \int_a^b f_1(x)dx + \alpha_2 \int_a^b f_2(x)dx.$$

Для доказательства запишем очевидное равенство для интегральных сумм:

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_1 f_1(\xi_i) + \alpha_2 f_2(\xi_i))\Delta x_i = \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda(\tau) \longrightarrow 0$, получаем требуемое. Заметим, что просто сослаться на известные теоремы из теории пределов мы здесь не можем, т.к. понятие предела интегральных сумм не сводится непосредственно к понятию предела функции. При более подробном изложении следовало бы рассмотреть несколько теорем о свойствах пределов интегральных сумм (при $\lambda(\tau) \longrightarrow 0$).

2. Аддитивность. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$. Тогда она интегрируема и на отрезке $[a, b]$, причем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Интегрируемость функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ очевидна в случае кусочно-непрерывной функции; в общем случае оставляем этот факт без доказательства. Поскольку $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то при составлении интегральной суммы для интеграла из левой части доказываемого равенства можно считать, что соответствующее разбиение $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = c = y_0 < y_1 < ... < y_m = b$ содержит точку c . Тогда сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{j=1}^{m} f(\eta_j)\Delta y_j$$

будет интегральной суммой для интеграла $\int_a^b f(x)dx$ и одновременно суммой интегральных сумм для интегралов $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$.

После перехода к пределу при $max\ \Delta x_i \longrightarrow 0$ и $max\ \Delta y_j \longrightarrow 0$ получим требуемое. Можно доказать, что на самом деле определенный интеграл является аддитивной функцией ориентированного промежутка. Для того, чтобы сформулировать соответствующее свойство, распространим понятие определенного интеграла на случай $a > b$ (т.е. на случай, когда нижний предел интегрирования больше верхнего) с помощью равенства

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

при $a = b$ будем считать, что

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

При таком обобщении понятия интеграла справедливо следующее утверждение.
Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке I, и если $a, b, c -$ произвольные точки этого отрезка, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

причем, разумеется, все написанные интегралы существуют.
Для доказательства следует рассмотреть все возможные случаи расположения точек a, b, c на отрезке I (при этом, если среди точек a, b, c есть совпадающие, то получается очевидное равенство, а если все эти точки различны, то доказываемое равенство очевидным образом следует из установленного выше свойства "обычной" аддитивности определенного интеграла).
3. Интегрирование неравенств. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, и пусть в каждой точке x этого отрезка выполняется неравенство $f_1(x) \leqslant f_2(x)$. Тогда

$$\int_a^b f_1(x)dx \leqslant \int_a^b f_2(x)dx. \qquad (*)$$

Для доказательства, как обычно, запишем соответствующее соотношение для интегральных сумм:

$$\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя здесь к пределу, получим требуемое.
Если на отрезке $[a, b]$ выполняется неравенство

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

то из (*) следует, что

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

4. Неравенство для абсолютных величин. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке, и

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (**)$$

Факт интегрируемости функции $|f(x)|$ нетрудно доказать для кусочно-непрерывной функции $f(x)$; в общем случае принимаем это без доказательства. Запишем очевидное неравенство для интегральных сумм:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i.$$

Переходя к пределу при стремлении к нулю диаметра разбиения, получаем требуемое. Заметим, что (**) можно обобщить и на случай $a \geqslant b$; в этом случае соответствующее неравенство приобретает вид:

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^b |f(x)|dx\right|.$$

Рассмотрим еще теорему о среднем для определенного интеграла.

Теорема (о среднем). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a).$$

Доказательство. Т.к. $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то эта функция достигает на этом отрезке своего наименьшего значения m и наибольшнго значения M и принимает все значения из отрезка $[m,M]$. Далее, из неравенства $m \leqslant f(x) \leqslant M$ получаем, что

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a),$$

или

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M.$$

Поэтому существует число $\xi \in [a,b]$ такое, что

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Отсюда легко следует требуемое. Теорема доказана.

Геометрический смысл доказанной теоремы заключается в том, что на отрезке $[a,b]$ найдется точка ξ такая, что площадь соответствующей криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой $f(\xi)$; при этом предполагается, что $f(x)$ неотрицательна на $[a,b]$ (рис. 2).

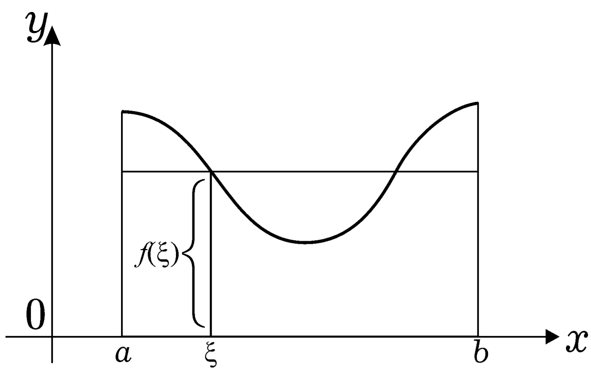

Рис. 2