кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра
специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 4

Интегрирование выражений, рационально зависимых от тригонометрических функций. Интегрирование иррациональных функций. Примеры интегралов, не выражающихся через элементарные функции.

Через $R(x, y, ..., t)$ будем обозначать рациональную функцию указанных аргументов (т.е. отношение двух многочленов от этих аргументов). Выше мы научились интегрировать рациональные функции. В дальнейшем основным приемом интегрирования функций различных классов будет применение таких подстановок, которые приводят подынтегральное выражение к рациональному виду. Этот прием называется рационализацией подынтегрального выражения.

Интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \qquad (*)$$

подстановкой

$$u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi,$$

сводится к интегралу от рациональной функции.В самом деле,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} u, \qquad dx = \frac{2du}{1+u^2},$$

следовательно,

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2}.$$

Рассмотренная подстановка называется универсальной.

Пример. Применим универсальную подстановку для вычисления интеграла

$$I = \int \frac{dx}{1 + 3\cos x}.$$

Имеем

$$I = \int \left(1 + 3\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^{-1}\cdot\frac{2du}{1+u^2} = \int\frac{du}{2-u^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \right| + C.$$

При вычислении интеграла (*) часто используют также подстановки

$$u = \cos x, \quad u = \sin x, \quad u = \operatorname{tg} x.$$

В некоторых случаях применение этих подстановок оказывается более выгодным, чем применение универсальной подстановки. В качестве примера рассмотрим интеграл

$$I_{m,n} = \int \cos^m x \cdot \sin^n x dx,$$

где m и n - целые числа. Пусть сначала n - нечетное число; тогда

$$I_{m,n} = \int \cos^m x \cdot \sin^{n-1} x \cdot \sin x dx = -\int \cos^m x \cdot (1-\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} d\cos x =$$

$$= -\int u^m (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}} du,$$

где $u = \cos x$. Если нечетным является m , то применяем подстановку $u = \sin x$. Если m и n являются четными, то, поскольку

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \qquad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x},$$

можно применить подстановку $u = \operatorname{tg} x$. В этом случае $x = \operatorname{arctg} u, \quad dx = \dfrac{du}{1+u^2}$, и мы получаем, что

$$I_{m,n} = \int \left(\frac{1}{1+u^2}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \left(\frac{u^2}{1+u^2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{du}{1+u^2},$$

т.е. дело сводится к интегрированию рациональной функции. Если оба числа m и n являются нечетными, то можно применить подстановку $u = \cos 2x$. В самом деле,

$$I_{m,n} = \int (\cos^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \cdot (\sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \cos x \cdot \sin x dx =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} d\cos 2x =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \left(\frac{1+u}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \left(\frac{1-u}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} du,$$

и получился интеграл от рациональной функции, т.к. показатели степени $\dfrac{m-1}{2}$ и $\dfrac{n-1}{2}$ являются целыми числами (быть может, отрицательными).

Пример. Применим последний прием для вычисления интеграла

$$I_{9,7} = \int \cos^9 x \cdot \sin^7 x dx.$$

Имеем

$$I_{9,7} = \int (\cos^2 x)^4 \cdot (\sin^2 x)^3 \cdot \cos x \cdot \sin x dx = -\frac{1}{4} \int \left(\frac{1+u}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1-u}{2}\right)^3 du =$$

$$= -\frac{1}{2^9}\int (1+u)(1-u^2)^3 du = -\frac{1}{512}\left(\int (1-u^2)^3 du + \int (1-u^2)^3 u du\right) =$$

$$= -\frac{1}{512}\left(\int (1-3u^2+3u^4-u^6) du - \frac{1}{2}\int (1-u^2)^3 d(1-u^2)\right) =$$

$$= -\frac{1}{512}\left(u - u^3 + \frac{3}{5}u^5 - \frac{u^7}{7} - \frac{(1-u^2)^4}{8}\right) + C, \qquad u = \cos 2x.$$

Интегралы $\int \sin\alpha x \cdot \cos\beta x dx$, $\int \sin\alpha x \cdot \sin\beta x dx$ и $\int \cos\alpha x \cdot \cos\beta x dx$ вычисляются с помощью формул элементарной тригонометрии:

$$\sin\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x),$$

$$\sin\alpha x \cdot \sin\beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x),$$

$$\cos\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x).$$

Например,

$$\int \sin 2x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2}\int \sin 3x dx + \frac{1}{2}\int \sin x dx = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C.$$

Рассмотрим интегралы от некоторых иррациональных функций. Пусть требуется вычислить интеграл

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{r_1}, ..., \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{r_n}\right) dx, \qquad \text{где}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0; \quad r_1, ..., r_n - \text{рациональные числа}, m - \text{их общий}$$

наименьший знаменатель.

Пусть

$$t = \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{1}{m}};$$

тогда

$$x = r(t) = \frac{\delta tm - \beta}{\alpha - \gamma t^m}; \qquad dx = r'(t)dt,$$

и мы получаем, что

$$I = \int R(r(t), t^{mr_1}, ..., t^{mr_n}) r'(t) dt,$$

после чего дело сводится к интегрированию рациональной функции.

Пример. Пусть

$$I = \int \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1}.$$

Тогда, применяя указанную выше подстановку, получаем

$$t = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}, \qquad x = \frac{t^4+1}{t^4-1}, \qquad dx = \frac{-8t^3 dt}{(t^4-1)^2};$$

$$I=\int t\cdot\frac{t^4-1}{2t^4}\cdot\frac{-8t^3dt}{(t^4-1)^2}=-4\int\frac{dt}{t^4-1}=-2\int\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+2\operatorname{arctg}t+C,\qquad t=\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Рассмотрим теперь интегралы вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$;разберем два случая. Пусть сначала квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет вещественных корней; в этом случае $a>0$, и имеет смысл подстановка

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\cdot x.$$

Тогда

$$ax^2+bx+c=t^2-2\sqrt{a}\cdot tx+ax^2;$$

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\cdot t+b};\qquad dx=\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\cdot t+b}\right)'dt;$$

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})dx=\int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\cdot t+b};\quad t-\sqrt{a}\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\cdot t+b}\right)\cdot\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\cdot t+b}\right)'dt,$$

и дело сводится к интегрированию рациональной функции. Рассмотренная подстановка является одной из подстановок Эйлера.

Пример. Пусть

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

Применим подстановку Эйлера: $\sqrt{x^2+1}=t-x,\qquad x=\frac{t^2-1}{t},\qquad dx=\frac{t^2+1}{2t^2}dt;$

$$I=\int\frac{2t}{t^2-1}\left(t-\frac{t^2-1}{2t}\right)^{-1}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}dt=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{x+\sqrt{x^2+1}+1}\right|+C.$$

Пусть теперь квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет два вещественных корня, т.е.

$$ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu).$$

Тогда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)}=|x-\lambda|\cdot\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}},$$

и мы имеем интеграл уже рассмотренного типа:

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}dx=\int R\left(x,\ |x-\lambda|\cdot\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}}\right)dx.$$

Здесь рационализация достигается подстановкой

$$t=\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}}.$$

В заключении отметим, что многие интегралы от элементарных функций не выражаются через элементарные функции; таковы, например,встречающиеся в приложениях интегралы $\int e^{-x^2}dx,\ \int\cos x^2dx,\ \int\sin x^2dx,\ \int\frac{\cos x}{x}dx,\ \int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int\frac{dx}{\ln x}$ и др.