кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванков

Интегралы и дифференциальные уравнения

конспект лекций

для студентов 1-го курса 2-го семестра

специальностей РЛ1,2,3,6, БМТ1,2

Лекция 1

Первообразная и ее свойства. Неопределенный интеграл, его свойства, связь с дифференциалом. Таблица основных неопределенных интегралов.

В дифференциальном исчислении рассматривались методы вычисления производной заданной функции. Теперь мы займемся обратной задачей:по данной функции $f(x)$ требуется найти такую функцию, для которой $f(x)$ была бы производной.

Пусть функции $f(x)$ и $F(x)$ заданы на одном и том же промежутке I.Функция $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на этом промежутке,если для любого $x \in I$ существует производная $F'(x)$, равная $f(x)$.Для граничной точки (если она принадлежит I под $F'(x)$ понимается соответствующая односторонняя производная.

Пример. Функция $F(x) = x^3$ является первообразной для $f(x) = 3x^2$ на промежутке $-\infty < x < \infty$ функция $F(x) = \arcsin x$ является первообразной для $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на промежутке $-1 < x < 1$; функция $F(x) = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ является первообразной для $f(x) = \sqrt{x}$ промежутке$[0; +\infty)$.

Если $F(x)$ — какая-либо первообразная для $f(x)$, то $F(x) + C$, где C — постоянная, также будет первообразной этой функции (т.к. $F'(x) = (F(x) + C)')$.

Далее, если $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные функции $f(x)$, то $(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$. Поэтому в силу известного условия постоянства функции на промежутке разность $F(x) - G(x)$ является константой, т.е. $F(x) - G(x) = C$. Таким образом, вся совокупность первообразных функции $f(x)$ описывается выражением $F(x) + C$, где $F(x)$ — какая-либо фиксированная первообразная, а C — произвольная постоянная. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ (на некотором промежутке) называется *неопределенным интегралом* и обозначается

$$\int f(x)dx;$$

при этом символ $\int$ называется *интегралом*; $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*; $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*; x *-переменной интегрирования.* Из вышесказанного следует, что если $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C\ ,$$

где C — произвольная постоянная. Восстановление функции по ее производной (или, что тоже самое, отыскание соответствующего неопределенного интеграла) называется интегрированием этой функции. Интегрирование представляет собой операцию, обратную по отношению к операции дифференцирования.
Для того, чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

Пример. Проверим, что при $a \neq 0$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Имеем

$$\left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{x^2 + a^2}.$$

Впоследствии будет доказано, что всякая функция, непрерывная на некотором промежутке, имеет на этом промежутке первообразную. Всюду в дальнейшем будем считать, что функции, стоящие под знаком интеграла,непрерывны; если же подынтегральная функция имеет точки разрыва, то будем рассматривать эту функцию лишь на тех промежутках, на которых она непрерывна.
Поэтому все первообразные, о которых будет идти речь, существуют, и мы не будем это каждый раз особо оговаривать.

Пример. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке I . Тогда, как известно из курса дифференциального исчисления, на любом промежутке $I_1 \subset I$, не содержащем нулей рассматриваемой функции, выполняется равенство

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Поэтому

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C;$$

в частности,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C,$$

причем применять последнюю формулу можно на любом промежутке, не содержащем нуля.
Рассмотрим основные свойства неопределенного интеграла, непосредственно вытекающие из соответствующего определения.
1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x); \qquad d \int f(x) dx = f(x) dx.$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int F(x) = F(x) + C.$$

3. Постоянный множитель, отличный от нуля, можно вынести за знак неопределенного интеграла, т.е.

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx, \quad \alpha \neq 0.$$

В самом деле, пусть

$$\int f(x)dx = F(x) + C;$$

тогда $\alpha F(x)$ -одна из первообразных функции $\alpha f(x)$, и

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha F(x) + C.$$

Поэтому доказываемое равенство принимает вид:

$$\alpha F(x) + C = \alpha \left(F(x) + C\right).$$

Такое равенство (понимаемое как равенство двух множеств функций) справедливо, т.к. если C пробегает множество всех вещественных чисел, то и αC при $\alpha \neq 0$ также пробегает это множество.

4. Неопределенный интеграл от суммы двух (или большего числа) функций равен сумме неопределенных интегралов от слагаемых:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные соответственно функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то $F_1(x) + F_2(x)$ есть первообразная суммы $f_1(x) + f_2(x)$. Поэтому доказываемое равенство принимает вид

$$F_1(x) + F_2(x) + C = F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2,$$

где C, C_1, C_2 независимо пробегают множество вещественных чисел; само равенство понимается как равенство двух множеств функций. Ясно, что сумму $C_1 + C_2$ в правой части можно "заменить на одну произвольную постоянную", и, следовательно, доказываемое равенство справедливо.
Вычисление неопределенных интегралов основано на применении таблицы основных интегралов и правил интегрирования.

Таблица интегралов

$$\begin{aligned}
&1. \quad \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1; 2. \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;\\
&3. \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1; \qquad \int e^x dx = e^x + C;\\
&4. \quad \int \cos x dx = \sin x + C;\\
&5. \quad \int \sin x = -\cos x + C;\\
&6. \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;\\
&7. \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;\\
&8. \quad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0;\\
&9. \quad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0;\\
&10. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a > 0;\\
&11. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad a \neq 0.
\end{aligned}$$

Полезно также помнить некоторые интегралы, содержащие гиперболические функции:

$$\begin{aligned}
&12. \quad \int \operatorname{sh} x dx = chx + C;\\
&13. \quad \int \operatorname{ch} x dx == \operatorname{sh} x + C;\\
&14. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;\\
&15. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.
\end{aligned}$$

Все приведенные формулы могут быть доказаны дифференцированием правых частей. Проверим, например, формулу 11; имеем

$$(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

и мы видим, что данная формула справедлива.