

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект лекций

Для студентов всех специальностей

Москва
2009

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ СЛАУ

Свойства решений однородной СЛАУ. Фундаментальная система решений однородной СЛАУ, теорема о ее существовании. Нормальная фундаментальная система решений. Теорема о структуре общего решения однородной СЛАУ. Теорема о структуре общего решения неоднородной СЛАУ.

14.1. Однородные системы

Следующая теорема описывает важнейшее свойство множества *решений однородной системы m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными*

[illegible]

Теорема 14.1. Если столбцы $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(s)}$ — решения однородной СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то любая их *линейная комбинация* также является решением этой системы.

◀ Рассмотрим любую линейную комбинацию данных решений: $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^s \lambda_k \mathbf{x}^{(k)}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Тогда $A\mathbf{x} = A\left(\sum_{k=1}^s \lambda_k \mathbf{x}^{(k)}\right) = \sum_{k=1}^s \lambda_k A\mathbf{x}^{(k)} = \sum_{k=1}^s \lambda_k \mathbf{0} = \mathbf{0}$, т.е. столбец $\mathbf{x}$ является решением однородной СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. ▶

Следствие 14.1. Если однородная СЛАУ имеет ненулевое решение, то она имеет бесконечно много решений.

◀ Если $\mathbf{x}$ — ненулевое решение однородной СЛАУ, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ решением однородной СЛАУ является и $\lambda \mathbf{x}$, причем при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ решения $\lambda_1 \mathbf{x}$ и $\lambda_2 \mathbf{x}$ различаются. ▶

Естественно попытаться найти такие решения $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(s)}$ системы $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, чтобы любое другое решение этой системы представлялось в виде их линейной комбинации и притом единственным образом. Оказывается, что это всегда возможно и приводит к следующему определению.

Определение 14.1. Любой набор из $k = n - r$ линейно независимых столбцов, являющихся решениями однородной СЛАУ $Ax = 0$, где n — количество неизвестных в системе, а r — ранг ее матрицы A , называют **фундаментальной системой решений** этой однородной СЛАУ.

При исследовании и решении однородных систем линейных алгебраических уравнений будем использовать следующую терминологию. Если в матрице A однородной СЛАУ $Ax = 0$ фиксировать *базисный минор*, то ему соответствуют *базисные столбцы* и, следовательно, набор неизвестных, отвечающих этим столбцам. Указанные неизвестные называют *базисными*, или *зависимыми*, а остальные неизвестные — *свободными*, или *независимыми*.

Теорема 14.2. Пусть дана однородная СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ с n неизвестными и $\text{Rg } A = r$. Тогда существует набор из $k = n - r$ решений $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ этой СЛАУ, образующих фундаментальную систему решений.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = 0. \end{array} \right.$$
[illegible]
$$\begin{array}{lll}
x_{r+1}^{(1)} = 1, & x_{r+1}^{(2)} = 0, & x_{r+1}^{(k)} = 0, \\
x_{r+2}^{(1)} = 0, & x_{r+2}^{(2)} = 1, & x_{r+2}^{(k)} = 0, \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
x_n^{(1)} = 0; & x_n^{(2)} = 0; & x_n^{(k)} = 1.
\end{array} \tag{14.3}$$
$$\boldsymbol{x}^{(i)} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \vdots \\ x_n^{(i)} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, k}, \quad (14.4)$$
$$\alpha_1 \mathbf{x}^{(1)} + \dots + \alpha_k \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}.$$

Тогда левая часть этого равенства является столбцом, компоненты которого с номерами $r+1, \dots, n$ равны нулю. Но $(r+1)$ -я компонента равна $\alpha_1 1 + \alpha_2 0 + \dots + \alpha_k 0 = \alpha_1$. Аналогично, $(r+2)$ -я компонента равна α_2 и, наконец, k -я компонента равна α_k . Поэтому $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, что означает линейную независимость решений $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$. ►

Построенная при доказательстве теоремы 14.2 фундаментальная система решений (14.4) имеет достаточно специальный вид, поскольку, согласно (14.3), в любом из решений (14.4) все значения независимых неизвестных равны нулю, кроме одного, которое равно единице. Такие фундаментальные системы решений называют **нормальными**.

Следствие 14.2. С помощью нормальной фундаментальной системы решений (14.4) однородной СЛАУ (14.1) множество всех решений можно описать формулой

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)} + \dots + c_k \mathbf{x}^{(k)}, \quad (14.5)$$

где постоянные $c_i, i = \overline{1, k}$, принимают произвольные значения.

◀ Согласно теореме 14.1, столбец (14.5) является решением рассматриваемой однородной СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Поэтому остается доказать, что любое решение $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)^T$ этой однородной СЛАУ можно представить в виде (14.5). Рассмотрим столбец $\mathbf{x} = g_{r+1} \mathbf{x}^{(1)} + \dots + g_n \mathbf{x}^{(k)}$. Этот столбец совпадает со столбцом $\mathbf{g}$ по элементам с номерами $r+1, \dots, n$ и является решением СЛАУ (14.2). Поэтому столбцы $\mathbf{g}$ и $\mathbf{x}$ совпадают, так как решения системы (14.2) однозначно определяются набором значений ее свободных неизвестных $x_{r+1}, \dots, x_n$, а у столбцов $\mathbf{g}$ и $\mathbf{x}$ эти наборы совпадают. Следовательно, $\mathbf{g} = \mathbf{x} = g_{r+1} \mathbf{x}^{(1)} + \dots + g_n \mathbf{x}^{(k)}$, т.е. решение $\mathbf{g}$ есть линейная комбинация столбцов $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ нормальной фундаментальной системы решений, что завершает доказательство. ►

Однородная СЛАУ (14.1) может иметь не только нормальные фундаментальные системы решений, но и другие фундаментальные системы решений. Оказывается, что утверждение следствия 14.2 имеет место не только для нормальной фундаментальной системы решений, но и для произвольной фундаментальной системы решений, что и утверждает следующая теорема.

Теорема 14.3. Если $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ — произвольная фундаментальная система решений однородной СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то любое ее решение $\mathbf{x}$ можно представить в виде

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)} + \dots + c_k \mathbf{x}^{(k)}, \quad (14.6)$$

где $c_1, \dots, c_k$ — некоторые постоянные. #

Сформулированную теорему называют **теоремой о структуре общего решения однородной СЛАУ**. Это вызвано тем, что, согласно теоремам 14.1 и 14.3, при заданной фундаментальной системе решений $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ однородной СЛАУ (14.1) выражение

$$\mathbf{x}_{\text{оо}} = c_1 \mathbf{x}^{(1)} + \dots + c_k \mathbf{x}^{(k)}, \quad (14.7)$$

где $c_1, \dots, c_k$ принимают произвольные значения, описывает все множество решений. Соотношение (14.7) называют **общим решением однородной СЛАУ**.

14.2. Неоднородные системы

Рассмотрим произвольную СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Заменяя столбец $\mathbf{b}$ свободных членов нулевым, получим однородную СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, соответствующую неоднородной СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Справедливо следующее утверждение о структуре произвольного решения неоднородной СЛАУ.

Теорема 14.4. Пусть столбец $\mathbf{x}^\circ$ — некоторое решение СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Произвольный столбец $\mathbf{x}$ является решением этой СЛАУ тогда и только тогда, когда он имеет представление $\mathbf{x} = \mathbf{x}^\circ + \mathbf{y}$, где $\mathbf{y}$ — решение соответствующей однородной СЛАУ $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

[illegible]

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2, \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r, \end{cases}$$

14.3. Как решать СЛАУ ?

Предположим, что, решаемая система совместна. В матрице A' ступенчатого вида выбираем *базисный минор* и фиксируем соответствующие ему *базисные* и *свободные неизвестные* (см. **12.3**). В матрице $(A' | \mathbf{b}')$ ступенчатого вида отбрасываем нулевые строки (им соответствуют тривиальные уравнения) и по получившейся матрице восстанавливаем СЛАУ. В уравнениях этой СЛАУ слагаемые со свободными неизвестными переносим в правые части и получаем систему, матрица которой является *верхней треугольной* и *невырожденной*, так как ее *определитель* совпадает с базисным минором матрицы A' . Последовательно исключая неизвестные, выражаем базисные неизвестные через свободные. Свободные неизвестные обозначаем как произвольные постоянные и записываем общее решение СЛАУ в виде линейной комбинации столбцов, выделяя в правых частях полученных выражений в отдельные столбцы: а) свободные члены; б) коэффициенты при каждой произвольной постоянной. В этой записи столбец свободных членов есть *частное решение СЛАУ*, а столбцы при произвольных постоянных образуют *нормальную фундаментальную систему решений однородной СЛАУ*, соответствующей заданной неоднородной системе.

Если исходная СЛАУ является однородной, то изложенный метод решения чуть упрощается, поскольку в расширенной матрице последний столбец является всегда нулевым и не меняется при элементарных преобразованиях строк. Имея это в виду, его опускают, т.е. все преобразования проводят с *матрицей системы*.

Пример 14.1. Решим однородную СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Чтобы найти общее решение, запишем матрицу системы и преобразуем ее при помощи элементарных преобразований строк к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 10 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базисный минор в преобразованной матрице стоит сверху слева и имеет второй порядок. Это значит, что ранг r матрицы системы равен двум, фундаментальная система решений состоит из $n - r = 4 - 2 = 2$ решений, а сама СЛАУ эквивалентна следующей системе, которая соответствует преобразованной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Базисными неизвестными являются x_1 и x_2 , а свободными — x_3 и x_4 . Выражаем базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = -1,5x_3 - x_4, \\ x_2 = -0,5x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

Вводим обозначения $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$ и записываем общее решение СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 = -1,5c_1 - c_2, \\ x_2 = -0,5c_1 - 2c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2. \end{cases}$$

Используя матричную форму записи, получаем

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1,5c_1 - c_2 \\ -0,5c_1 - 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1,5 \\ -0,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -0,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} —$$

нормальная фундаментальная система решений, а c_1 , c_2 — произвольные постоянные.

Пример 14.2. Решим неоднородную СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4. \end{cases}$$

Преобразуем расширенную матрицу этой СЛАУ при помощи элементарных преобразований строк к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 2 & -4 & 1 & -6 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Теперь видно, что для преобразованной матрицы минор $M_{1,2}^{1,2}$ является базисным. Поэтому $\text{Rg } A = \text{Rg}(A|\mathbf{b}) = 2 = r$, и, согласно теореме 13.1 Кронекера — Капелли, СЛАУ совместна. Кроме того, СЛАУ свелась к эквивалентной системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4, \end{cases}$$

которая соответствует преобразованной матрице. Однако можно продолжить преобразования в матрице, упрощая *базисные столбцы* (1-й и 2-й) с помощью элементарных преобразований строк так, чтобы в каждом из них остался один ненулевой элемент, причем нулевые строки можно отбросить:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1,5 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0,5 & 2 & 2 \end{array} \right).$$

По этой матрице восстанавливаем систему

$$\begin{cases} x_1 + 1,5x_3 + x_4 = 6, \\ x_2 + 0,5x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

Переносим свободные неизвестные x_3, x_4 в правые части уравнений, получаем

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 1,5x_3 - x_4, \\ x_2 = 2 - 0,5x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

Для свободных неизвестных положим $x_3 = c_1, x_4 = c_2$, и тогда

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 1,5c_1 - c_2, \\ x_2 = 2 - 0,5c_1 - 2c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \end{cases}$$

или

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 - 1,5c_1 - c_2 \\ 2 - 0,5c_1 - 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1,5 \\ -0,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Полученное общее решение очень наглядно: 1-й столбец — частное решение неоднородной СЛАУ, а два последних — нормальная фундаментальная система решений соответствующей однородной СЛАУ (ср. пример 14.1).

Пример 14.3. Решим неоднородную СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 5, \end{cases}$$

отличающуюся от системы из примера 14.2 лишь одним коэффициентом.

Преобразуем расширенную матрицу этой СЛАУ при помощи элементарных преобразований строк к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 2 & -4 & 1 & -6 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Теперь видно, что в преобразованной матрице минор $M_{1,2}^{1,2}$ является базисным для матрицы системы, а минор $M_{1,2,3}^{1,2,5}$ — для расширенной матрицы. Поэтому $\text{Rg } A = 2$, $\text{Rg}(A|\mathbf{b}) = 3$ и, согласно теореме 13.1 Кронекера — Капелли, СЛАУ несовместна. Впрочем, несовместность очевидна и так, потому что последней матрице соответствует СЛАУ, в которой третье уравнение имеет вид: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$.

Пример 14.4. Найдем все матрицы, *перестановочные* с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обозначим искомые матрицы через X . Условие перестановочности означает выполнение матричного равенства $AX = XA$. Чтобы существовало произведение в левой части этого равенства, матрица X должна иметь две строки, а чтобы существовало произведение в правой части — два столбца. Следовательно, X — *квадратная матрица* второго порядка, т.е.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

и для ее нахождения требуется решить *матричное уравнение*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы в этом уравнении и приравнивая элементы, стоящие на одинаковых местах в получающихся матрицах, приходим к равносильной системе четырех уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = x_1 + 3x_2, \\ x_2 + 2x_4 = 2x_1 + 4x_2, \\ 3x_1 + 4x_3 = x_3 + 3x_4, \\ 3x_2 + 4x_4 = 2x_3 + 4x_4, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет простой вид, и мы можем отойти от общей схемы решения однородных СЛАУ, продемонстрированной в примере 14.1. Легко увидеть, что если из второго уравнения

вычесть удвоенное третье, то получится такое же уравнение, как первое и последнее. Поэтому первые два уравнения в этой системе можно отбросить и тогда

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 + x_4, \\ x_2 = 2x_3/3. \end{cases}$$

Итак, x_3, x_4 — свободные, а x_1, x_2 — базисные неизвестные. Для свободных неизвестных положим $x_3 = c_1, x_4 = c_2$ и тогда получим ответ в виде

$$\begin{cases} x_1 = -c_1 + c_2, \\ x_2 = 2c_1/3, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \end{cases}$$

или в матричной форме

$$X = \begin{pmatrix} c_2 - c_1 & 2c_1/3 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix},$$

где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные. Если фиксировать для c_1, c_2 конкретные значения, то из множества всех перестановочных с A матриц будет выделена одна. Например, при $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$ получается *нулевая матрица*, а при $c_1 = 0$ и $c_2 = 1$ — *единичная*.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 14. Свойства решений однородных и неоднородных СЛАУ	121
14.1. Однородные системы	121
14.2. Неоднородные системы	123
14.3. Как решать СЛАУ ?	125