

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект лекций

Для студентов всех специальностей

Москва
2009

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Координатная, матричная и векторная формы записи. Критерий Кронекера — Капелли совместности СЛАУ. Однородные СЛАУ. Критерий существования ненулевого решения однородной СЛАУ.

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (сокращенно **СЛАУ**) представляет собой систему вида

Уравнения системы (13.1) называют алгебраическими потому, что левая часть каждого из них есть *многочлен от n переменных $x_1, \dots, x_n$* , а линейными потому, что эти многочлены имеют первую *степень*.

Числа $a_{ij} \in \mathbb{R}$ называют **коэффициентами СЛАУ**. Их нумеруют двумя индексами: номером уравнения i и номером неизвестного j . Действительные числа $b_1, \dots, b_m$ называют **свободными членами уравнений**.

Запись СЛАУ в виде (13.1) будем называть *координатной*.

СЛАУ называют **однородной**, если $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$. В противном случае ее называют **неоднородной**.

Решением СЛАУ, да и вообще всякой системы уравнений, называют такой набор значений неизвестных $x_1^o, \dots, x_n^o$, при подстановке которых каждое уравнение системы превращается в тождество. Любое конкретное решение СЛАУ также называют ее **частным решением**.

Решить СЛАУ — значит решить две задачи:

- выяснить, имеет ли СЛАУ решения;
- найти все решения, если они существуют.

СЛАУ называют **совместной**, если она имеет какие-либо решения. В противном случае ее называют **несовместной**. Однородная СЛАУ всегда совместна, поскольку нулевой набор значений ее неизвестных всегда является решением. Как показывает следующий пример, для неоднородных СЛАУ возможны различные случаи.

Пример 13.1. Рассмотрим три системы двух уравнений с двумя неизвестными:

С геометрической точки зрения уравнения каждой из этих СЛАУ задают прямые на плоскости x_1Ox_2 (рис. 13.1). Решениям СЛАУ соответствуют точки пересечения указанных прямых. Складывая почленно уравнения в первой системе, получаем $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ — единственное ее

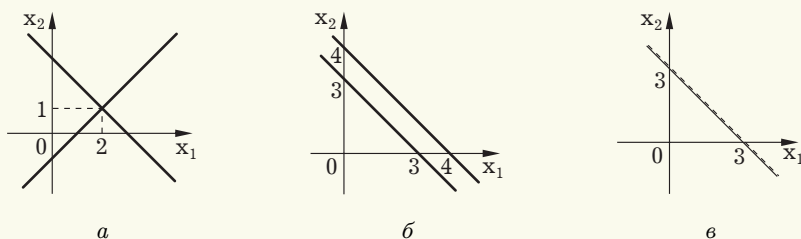


Рис. 13.1

решение. Геометрически это подтверждается тем, что соответствующие прямые пересекаются в единственной точке (2; 1) (рис. 13.1, а). Из уравнений второй системы следует, что $3 = 4$. Следовательно, эта СЛАУ несовместна, и геометрически это соответствует двум параллельным несовпадающим прямым (рис. 13.1, б). Наконец, третья СЛАУ такова, что второе ее уравнение является следствием первого: оно получается из первого умножением на 2. Геометрически это означает, что уравнения задают одну и ту же прямую (рис. 13.1, в). Следовательно, координаты любой точки этой прямой удовлетворяют каждому из уравнений системы, т.е. третья СЛАУ совместна и имеет бесконечно много решений. #

Если СЛАУ (13.1) имеет решение, и притом единственное, то ее называют **определенной**, а если решение неединственное — то **неопределенной**. При $m = n$, т.е. когда в (13.1) количество уравнений совпадает с количеством неизвестных, СЛАУ называют **квадратной**.

13.2. Формы записи СЛАУ

Кроме *координатной формы* (13.1) *записи СЛАУ* часто используют и другие ее представления.

Рассматривая *коэффициенты* a_{ij} СЛАУ при одном неизвестном x_j как элементы столбца, а x_j как коэффициент, на который умножается столбец, из (13.1) получаем новую форму записи СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

или, обозначая столбцы соответственно $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$,

$$x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}. \quad (13.2)$$

Таким образом, решение СЛАУ (13.1) можно трактовать как представление столбца $\mathbf{b}$ в виде *линейной комбинации* столбцов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Соотношение (13.2) называют **векторной записью СЛАУ**.

Обратим внимание на то, что слева в каждом уравнении системы (13.1) стоит сумма парных произведений — так же, как и в *произведении двух матриц*. Если взять за основу произведение матриц, то СЛАУ (13.1) можно записать так (см. пример 10.5):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

или $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, где A — матрица типа $m \times n$; $\mathbf{x}$ — столбец неизвестных; $\mathbf{b}$ — столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Матрицу A называют **матрицей** (коэффициентов) **СЛАУ** (13.1). Поскольку A , $\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ являются матрицами, то запись СЛАУ (13.1) в виде $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ называют **матричной**. Если $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, то СЛАУ является однородной и в матричной записи имеет вид $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Приведенные рассуждения показывают, что задачи:

- решения СЛАУ (13.1);
- представления столбца в виде линейной комбинации данных столбцов;
- решения матричных уравнений вида $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

являются просто различной формой записи одной и той же задачи.

13.3. Критерий совместности СЛАУ

Векторная запись СЛАУ позволяет легко получить критерий совместности СЛАУ. Напомним, что содержательный смысл это понятие имеет для *неоднородных СЛАУ* (*однородные СЛАУ* всегда *совместны*).

Матрицу

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

называют **расширенной матрицей СЛАУ** (13.1). Расширенная матрица полностью характеризует СЛАУ. Это означает, что по этой матрице однозначно (если сохранить обозначения для неизвестных) восстанавливается сама СЛАУ.

Критерий совместности СЛАУ дает следующая **теорема Кронекера — Капелли**.

Теорема 13.1. Для совместности СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ необходимо и достаточно, чтобы *ранг* ее матрицы A был равен рангу ее расширенной матрицы $(A|\mathbf{b})$.

◀ **Необходимость.** Отметим, что ранг матрицы A СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ не превышает ранга расширенной матрицы $(A|\mathbf{b})$. Поэтому нам достаточно показать, что ранг матрицы системы не меньше ранга ее расширенной матрицы. Если система совместна, то, записывая ее в векторной форме, делаем вывод, что существуют такие значения неизвестных $x_1, \dots, x_n$, для которых $\mathbf{a}_1x_1 + \dots + \mathbf{a}_nx_n = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}_i$ — столбцы матрицы A , $\mathbf{b}$ — столбец свободных членов. Это означает, что последний столбец $\mathbf{b}$ в расширенной матрице системы является *линейной комбинацией* остальных столбцов. Выберем какой-либо *базисный минор* матрицы A . Для простоты пусть он содержит строки с номерами $1, 2, \dots, k$ и столбцы с теми же номерами, т.е.

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Согласно теореме 12.5 о базисном миноре, *базисные столбцы линейно независимы*, в то время как для каждого $j > k$ существуют такие $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, k}$, что $\mathbf{a}_j = \lambda_{1j}\mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_{kj}\mathbf{a}_k$. Поэтому столбец

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{a}_1x_1 + \dots + \mathbf{a}_kx_k + \mathbf{a}_{k+1}x_{k+1} + \dots + \mathbf{a}_nx_n = \\ &= \mathbf{a}_1x_1 + \dots + \mathbf{a}_kx_k + (\lambda_{1,k+1}\mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_{k,k+1}\mathbf{a}_k)x_{k+1} + \dots + (\lambda_{1n}\mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_{kn}\mathbf{a}_k)x_n \end{aligned}$$

является линейной комбинацией базисных столбцов матрицы A . Это означает, что M является также базисным минором и в расширенной матрице (во-первых, он ненулевой; во-вторых, если взять какой-либо *окаймляющий минор* M' , то либо он будет минором матрицы A , т.е. нулевым, либо он будет содержать столбец $\mathbf{b}$ и, следовательно, не может быть ненулевым, так как его столбцы линейно зависимы). Поэтому $\text{Rg}(A|\mathbf{b}) = \text{Rg } A$.

Достаточность. Пусть $\text{Rg}(A|\mathbf{b}) = \text{Rg } A$. Выберем в A базисный минор M (как и выше). Тогда он будет базисным и в матрице $(A|\mathbf{b})$. Значит, столбец $\mathbf{b}$ можно представить как линейную комбинацию базисных столбцов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$: $\mathbf{b} = x_1^\circ \mathbf{a}_1 + \dots + x_k^\circ \mathbf{a}_k$. Полагая $x_{k+1}^\circ = x_{k+2}^\circ = \dots = x_n^\circ = 0$, получаем *решение* $x_1^\circ, \dots, x_n^\circ$ исходной *СЛАУ*, поскольку

$$\mathbf{b} = x_1^\circ \mathbf{a}_1 + \dots + x_k^\circ \mathbf{a}_k = x_1^\circ \mathbf{a}_1 + \dots + x_k^\circ \mathbf{a}_k + 0\mathbf{a}_{k+1} + \dots + 0\mathbf{a}_n.$$

Это означает, что *СЛАУ* совместна. ►

Из векторной записи *СЛАУ* вытекает также следующий критерий существования ненулевых решений у квадратной однородной *СЛАУ*.

Теорема 13.2. Для существования ненулевого решения у однородной *квадратной СЛАУ* необходимо и достаточно, чтобы ее матрица была *вырождена*.

◄ Из векторной записи *СЛАУ* (13.2) вытекает, что существование ненулевого решения однородной *СЛАУ* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ равносильно существованию равной нулю линейной комбинации столбцов матрицы A , в которой не все коэффициентами нулевые. Другими словами однородная *СЛАУ* имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда столбцы ее матрицы линейно зависимы. Согласно следствию 12.1 из теоремы о базисном миноре линейная зависимость столбцов квадратной матрицы равносильная ее невырожденности, что и доказывает теорему. ►

Замечание 13.1. Из теоремы 12.7 вытекает, что столбцы матрицы линейно зависимы тогда и только тогда, когда ранг матрицы меньше количества столбцов. Сопоставляя этот факт с доказательством последней теоремы, приходим к следующему критерию существования ненулевых решений однородной *СЛАУ*: однородная *СЛАУ* имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы меньше количества неизвестных.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 13. Системы линейных алгебраических уравнений	117
13.1. Основные определения	117
13.2. Формы записи СЛАУ	118
13.3. Критерий совместности СЛАУ	119