

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект лекций

Для студентов всех специальностей

Москва
2009

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Лекция 12

РАНГ МАТРИЦЫ

Минор матрицы. Ранг матрицы. Базисный минор. Линейная зависимость и линейная независимость строк и столбцов матрицы. Критерий линейной зависимости. Теорема о базисном миноре и ее следствия. Инвариантность ранга матрицы относительно ее элементарных преобразований. Способы вычисления ранга матрицы.

Определение 12.1. *Минором порядка k матрицы A типа $m \times n$ называют определитель, который составлен из элементов этой матрицы, стоящих на пересечении произвольно выбранных k строк и k столбцов с сохранением порядка этих строк и столбцов.*

Если выбранные строки имеют номера $i_1, i_2, \dots, i_k$, а столбцы — $j_1, j_2, \dots, j_k$, то соответствующий минор будем обозначать $M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$.

О миноре $M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$ говорят, что:

- строки $i_1, i_2, \dots, i_k$ и столбцы $j_1, j_2, \dots, j_k$ матрицы входят в него;
- он образован этими строками и столбцами;
- он располагается на пересечении этих строк и столбцов;
- он располагается в этих строках и столбцах матрицы.

Строки, входящие в минор, попарно различны, и в обозначении минора естественно упорядочить их по возрастанию номеров. Это же относится и к столбцам. Правило возрастания номеров означает, что, например, $M_{1,3,4}^{3,5,6}$ является минором некоторой матрицы, расположенным на пересечении 1-й, 3-й и 4-й строк с 3-м, 5-м и 6-м столбцами, в то время как $M_{1,3,4}^{5,3,6}$ минором не является, потому что нарушен порядок столбцов (5-й столбец указан в верхних индексах перед 3-м). Это просто определитель третьего порядка, который получается из минора $M_{1,3,4}^{3,5,6}$ матрицы при перестановке в нем первых двух столбцов. Поэтому, согласно свойствам определителей, $M_{1,3,4}^{5,3,6} = -M_{1,3,4}^{3,5,6}$.

Итак, мы следуем соглашению, что обозначение $M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$ соответствует минору матрицы, если верхние и нижние индексы в нем строго возрастают. В противном случае, если индексы расположены в ином порядке, это обозначение соответствует определителю, который получается из соответствующего минора перестановкой строк и столбцов.

Пример 12.1. У квадратной матрицы третьего порядка $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ девять миноров первого порядка, девять миноров второго порядка и один минор третьего порядка.

Определение 12.2. *Рангом матрицы* называют число, которое равно максимальному порядку среди ее ненулевых миноров.

Для ранга матрицы A используют обозначение $\text{Rg } A$.

Если *квадратная матрица порядка n невырождена*, то ее ранг равен ее порядку n : ненулевым является единственный минор максимального порядка n , совпадающий с *определителем матрицы*. В частности, ранг *единичной матрицы E порядка n* равен n .

Если *квадратная матрица вырождена*, то ее ранг меньше ее порядка: единственный минор максимального порядка, равного порядку матрицы, является нулевым, и в этом случае ненулевые миноры имеют меньший порядок. Ранг *нулевой матрицы* полагают равным нулю.

Ранг *диагональной матрицы* равен количеству ее ненулевых *диагональных элементов*.

Непосредственно из определения ранга матрицы следует, что ранг имеет следующее свойство, полностью его характеризующее.

Свойство 12.1. Если ранг матрицы равен r , то матрица имеет хотя бы один минор порядка r , не равный нулю, а все ее миноры больших порядков равны нулю.

Теорема 12.1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется, т.е. $\text{Rg } A^T = \text{Rg } A$.

◀ Если мы покажем, что при транспонировании матрицы A ее ранг r не убывает, т.е. $\text{Rg } A^T \geq r$, то сможем прийти к следующему заключению. Поскольку $(A^T)^T = A$, то $r = \text{Rg } A \leq \text{Rg } A^T \leq \text{Rg } (A^T)^T = \text{Rg } A = r$, и поэтому $\text{Rg } A^T = r$.

Итак, докажем, что $\text{Rg } A^T \geq r$. Согласно определению 12.2 ранга матрицы, существует ее минор порядка r , отличный от нуля. Пусть это будет минор $M = M_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r}$. При транспонировании строки и столбцы меняются местами. Поэтому минору M , образованному строками $i_1, i_2, \dots, i_r$ и столбцами $j_1, j_2, \dots, j_r$ матрицы A , соответствует минор $N = N_{j_1 j_2 \dots j_r}^{i_1 i_2 \dots i_r}$ матрицы A^T , образованный строками $j_1, j_2, \dots, j_r$ и столбцами $i_1, i_2, \dots, i_r$. Ясно, что эти миноры получаются один из другого операцией транспонирования. Согласно свойствам определителей, они равны. Таким образом, найден минор r -го порядка в матрице A^T , а именно минор N , который не равен нулю. Следовательно, $\text{Rg } A^T \geq r$. ▶

Теорема 12.2. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях ее строк и столбцов. #

12.1. Линейная зависимость строк и столбцов

Строки и столбцы матриц можно рассматривать как *матрицы-строки* и, соответственно, *матрицы-столбцы*. Поэтому над ними, как и над любыми другими матрицами, можно выполнять *линейные операции*. Ограничение на операцию сложения состоит в том, что строки (столбцы) должны быть одинаковой длины (высоты), но это условие всегда выполнено для строк (столбцов) одной матрицы.

Линейные операции над строками (столбцами) дают возможность составлять строки (столбцы) в виде выражений $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_s \mathbf{a}_s$, где $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ — произвольный набор строк (столбцов) одинаковой длины (высоты), а $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ — действительные числа. Такие выражения называют *линейными комбинациями строк (столбцов)*.

Определение 12.3. Строки (столбцы) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ называют *линейно независимыми*, если равенство

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_s \mathbf{a}_s = \mathbf{0}, \quad (12.1)$$

где $\mathbf{0}$ в правой части — нулевая строка (столбец), возможно лишь при $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = 0$. В противном случае, когда существуют такие действительные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, не равные нулю одновременно, что выполняется равенство (12.1), эти строки (столбцы) называют *линейно зависимыми*.

Следующее утверждение известно как критерий линейной зависимости.

Теорема 12.3. Строки (столбцы) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$, $s > 1$, линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы одна (один) из них является линейной комбинацией остальных.

◀ Доказательство проведем для строк, а для столбцов оно аналогично.

Необходимость. Если строки $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ линейно зависимы, то, согласно определению 12.3, существуют такие действительные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, не равные нулю одновременно, что $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_s \mathbf{a}_s = \mathbf{0}$. Выберем ненулевой коэффициент α_i . Для определенности пусть это будет α_1 . Тогда $\alpha_1 \mathbf{a}_1 = (-\alpha_2) \mathbf{a}_2 + \dots + (-\alpha_s) \mathbf{a}_s$ и, следовательно, $\mathbf{a}_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \mathbf{a}_2 + \dots + \left(-\frac{\alpha_s}{\alpha_1}\right) \mathbf{a}_s$, т.е. строка $\mathbf{a}_1$ представляется в виде линейной комбинации остальных строк.

Достаточность. Пусть, например, $\mathbf{a}_1 = \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_s \mathbf{a}_s$. Тогда $1 \mathbf{a}_1 + (-\lambda_2) \mathbf{a}_2 + \dots + (-\lambda_s) \mathbf{a}_s = \mathbf{0}$. Первый коэффициент линейной комбинации равен единице, т.е. он ненулевой. Согласно определению 12.3, строки $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ линейно зависимы. ▶

Теорема 12.4. Пусть строки (столбцы) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ линейно независимы, а хотя бы одна из строк (столбцов) $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_l$ является их линейной комбинацией. Тогда все строки (столбцы) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_l$ линейно зависимы.

◀ Пусть, например, $\mathbf{b}_1$ есть линейная комбинация $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$, т.е. $\mathbf{b}_1 = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_s \mathbf{a}_s$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, s}$. В эту линейную комбинацию добавим строки (столбцы) $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_l$ (при $l > 1$) с нулевыми коэффициентами: $\mathbf{b}_1 = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_s \mathbf{a}_s + 0\mathbf{b}_2 + \dots + 0\mathbf{b}_l$. Согласно теореме 12.3, строки (столбцы) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_l$ линейно зависимы. ▶

12.2. Теорема о базисном миноре

Среди *миноров матрицы* могут быть как равные нулю, так и отличные от нуля.

Определение 12.4. Минор M матрицы A называют **базисным**, если выполнены два условия:

- а) он не равен нулю;
- б) его порядок равен *рангу матрицы* A .

Матрица A может иметь несколько базисных миноров. *Строки и столбцы* матрицы A , в которых расположен выбранный базисный минор, называют **базисными**.

Следующую теорему, занимающую одно из центральных мест в теории матриц и ее приложениях, называют **теоремой о базисном миноре**.

Теорема 12.5. Базисные строки (столбцы) матрицы A , соответствующие любому ее базисному минору M , *линейно независимы*. Любые строки (столбцы) матрицы A , не входящие в M , являются *линейными комбинациями* базисных строк (столбцов).

◀ Доказательство проведем для строк. Пусть ранг матрицы $A = (a_{ij})$ типа $m \times n$ равен r . Фиксируем какой-либо ее базисный минор M и соответствующие ему базисные строки матрицы A .

Докажем, что базисные строки линейно независимы. Предположим, что они *линейно зависимы*. Тогда по теореме 12.3 одна из них является линейной комбинацией остальных базисных строк. Согласно свойствам определителей, минор M равен нулю. Это противоречит тому, что минор M базисный.

Теперь докажем, что любая строка матрицы A , не входящая в базисный минор, является линейной комбинацией базисных строк. Предположим, не ограничивая общности доказательства, что базисный минор M расположен в верхнем левом углу матрицы. Пусть i — номер строки, не являющейся базисной, т.е. $r + 1 \leq i \leq m$. Покажем, что *определитель порядка* $r + 1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix},$$

полученный добавлением к минору M элементов i -й строки и произвольного j -го столбца матрицы A , $j = \overline{1, n}$, равен нулю. При $j \leq r$ определитель равен нулю, так как он содержит два одинаковых столбца. Если же $j > r$, то $\Delta = 0$, так как в этом случае Δ является минором матрицы A , порядок которого равен $r + 1$ и больше ранга матрицы. Итак, $\Delta = 0$.

Раскладывая определитель Δ по последнему столбцу, получаем равенство

$$A_{1,r+1}a_{1j} + A_{2,r+1}a_{2j} + \dots + A_{r,r+1}a_{rj} + A_{r+1,r+1}a_{ij} = 0,$$

в котором через $A_{1,r+1}, A_{2,r+1}, \dots, A_{r,r+1}, A_{r+1,r+1}$ обозначены *алгебраические дополнения* соответствующих *элементов* рассматриваемого *определителя*. Отметим, что эти алгебраические

дополнения не зависят от номера j , т.е. не зависят от того, элементы какого из столбцов матрицы A взяты в качестве последнего столбца определителя Δ . Кроме того, $A_{r+1,r+1} = M \neq 0$. Поэтому из последнего равенства следует, что для всех $j = \overline{1, n}$

$$a_{ij} = b_1 a_{1j} + b_2 a_{2j} + \dots + b_r a_{rj},$$

где коэффициенты $b_k = -A_{k,r+1}/A_{r+1,r+1}$, $k = \overline{1, r}$, не зависят от j , а это означает, что i -я строка ($r+1 \leq i \leq m$) матрицы A является линейной комбинацией первых r ее строк, т.е. линейной комбинацией ее базисных строк. ►

Следствие 12.1. Для того чтобы квадратная матрица была невырожденной, необходимо и достаточно, чтобы ее строки (столбцы) были линейно независимы.

◄ **Необходимость.** Если квадратная матрица A невырождена, то ее ранг равен ее порядку, а ее определитель является базисным минором. Поэтому все строки (столбцы) являются базисными и по теореме 12.5 о базисном миноре они линейно независимы.

Достаточность. Если все строки (столбцы) квадратной матрицы A являются линейно независимыми, то они являются базисными. Действительно, если бы только некоторые из них были базисными, то, согласно теореме 12.5 о базисном миноре, оставшиеся были бы линейными комбинациями базисных и, следовательно, строки (столбцы) матрицы A , согласно теореме 12.4, были бы линейно зависимыми. Так как все строки и столбцы квадратной матрицы A являются базисными, а им соответствует определитель матрицы, то он является базисным минором и, следовательно, согласно определению 12.4, отличен от нуля, т.е. квадратная матрица A невырождена. ►

Теорема 12.6. Линейно независимые строки (столбцы) матрицы, количество которых равно рангу матрицы, являются базисными строками (столбцами).

◄ Докажем теорему для строк. Зафиксируем произвольный набор из r линейно независимых строк матрицы, где r — это ранг матрицы. Нам достаточно показать, что хотя бы один из базисных миноров расположен в фиксированных строках. Отбросим остальные строки матрицы и докажем, что ранг новой матрицы, содержащей r строк, равен r . Так как новая матрица не имеет миноров порядка больше чем r , то ее ранг не может превосходить r . Если бы он был меньше r , то только часть этих r фиксированных строк были бы базисными в новой матрице, а остальные, согласно теореме 12.5 о базисном миноре, являлись бы их линейными комбинациями. Согласно теореме 12.4, последнее означало бы линейную зависимость фиксированных r строк, что противоречит условию теоремы.

Итак, ранг новой матрицы равен r . Ее базисный минор имеет порядок r и является ненулевым минором порядка r исходной матрицы, расположенным в рассмотренных фиксированных r строках. ►

Теорема 12.7 (Теорема о ранге матрицы). Для любой матрицы ее ранг равен максимальному количеству ее линейно независимых строк (столбцов).

◄ Доказательство теоремы проведем для строк. Согласно теореме 12.5 о базисном миноре, базисные строки линейно независимы. Следовательно, максимальное количество k линейно независимых строк матрицы не может быть меньше ранга r матрицы. Итак, $k \geq r$.

Остается доказать, что $k \leq r$. Отбросим те строки матрицы, которые не входят в число рассматриваемых k линейно независимых строк. Получим матрицу, в которой все k строк линейно независимы. Согласно теореме 12.6, все k строк этой матрицы являются базисными, а ее ранг равен k . Базисный минор матрицы из k строк имеет порядок k и является ненулевым минором порядка k исходной матрицы. Следовательно, $k \leq r$. ►

Следствие 12.2. Для любой матрицы максимальное число линейно независимых строк равно максимальному числу линейно независимых столбцов.

12.3. Вычисление ранга матрицы

Для вычисления *ранга матрицы* применяют два метода: метод окаймляющих миноров и метод элементарных преобразований.

Метод окаймляющих миноров. Минор M' матрицы A называют **окаймляющим** для минора M , если он получается из последнего добавлением одной новой строки и одного нового столбца матрицы A . Ясно, что порядок окаймляющего минора M' на единицу больше, чем порядок минора M .

Метод окаймляющих миноров. Метод окаймляющих миноров, позволяющий найти один из *базисных миноров* матрицы, состоит в следующем. Выбирается ненулевой минор первого порядка (ненулевой *элемент матрицы*). К очередному ненулевому минору последовательно добавляются такие строка и столбец, чтобы новый окаймляющий минор оказался ненулевым. Если этого сделать нельзя, то последний ненулевой минор является базисным (что утверждает следующая ниже теорема). Этот процесс рано или поздно закончится из-за ограниченных размеров матрицы.

Теорема 12.8. Если для некоторого минора матрицы все окаймляющие его миноры равны нулю, то он является базисным. #

Пример 12.2. Найдем ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

На первом шаге выбираем любой ненулевой элемент матрицы, например левый верхний элемент, т.е. 2. Это ненулевой минор первого порядка.

На втором шаге строим окаймляющий минор второго порядка. Добавляем 2-ю строку и 2-й столбец и вычисляем получающийся окаймляющий минор

$$M_{1,2}^{1,2} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Это окаймление не подходит.

Меняем 2-й столбец на 3-й. Получаем минор второго порядка

$$M_{1,2}^{1,3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Это окаймление подходит.

Третий шаг: добавляем к этому минору 3-ю строку и можно снова попытаться использовать 2-й столбец. Оказывается, что

$$M_{1,2,3}^{1,2,3} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 3 - 4 - 2 = 1 \neq 0,$$

значит, выбранный минор третьего порядка подходит.

Четвертый шаг: добавляем 4-ю строку (других нет) и 4-й столбец и вычисляем определитель четвертого порядка

$$M_{1,2,3,4}^{1,2,3,4} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

Выбранный окаймляющий минор не подходит. Меняем 4-й столбец на 5-й:

$$M_{1,2,3,4}^{1,2,3,5} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, ненулевой минор третьего порядка $M_{1,2,3}^{1,2,3}$ имеет два окаймляющих минора четвертого порядка и оба они равны нулю. Других окаймляющих миноров четвертого порядка нет. Поэтому делаем вывод, что $M_{1,2,3}^{1,2,3}$ — базисный минор, а ранг матрицы равен трем.

Метод элементарных преобразований. При элементарных преобразованиях строк (столбцов) матрицы ее ранг, согласно теореме 12.2, не меняется. С помощью этих преобразований можно так упростить матрицу, чтобы ранг новой матрицы легко вычислялся.

Например, согласно теореме 10.1, с помощью элементарных преобразований строк любую матрицу можно привести к ступенчатому виду. Ранг же *ступенчатой матрицы* равен количеству ненулевых строк. Базисным в ней является минор, расположенный на пересечении ненулевых строк со столбцами, соответствующими первым слева ненулевым элементам в каждой из строк. Действительно, этот минор ненулевой, так как соответствующая матрица является *верхней треугольной*, а любое его окаймление содержит нулевую строку. Поэтому приведение матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк позволяет вычислить ранг матрицы.

Пример 12.3. Найдем ранг матрицы методом элементарных преобразований. Для этого достаточно привести матрицу к ступенчатому виду, воспользовавшись, например, алгоритмом из доказательства теоремы 10.1. Отметим, что вычисления удобно проводить, если текущий элемент равен единице. Поэтому операцию 2^* алгоритма (перестановка строк) будем выполнять не только для замены нулевого текущего элемента (так было заложено в алгоритме), но также и для того, чтобы в качестве текущего элемента получить единицу или другое небольшое целое число. Отметим также, что можно в любое время умножать ту или иную строку матрицы на ненулевое число, в частности сокращать элементы строки на общий множитель, хотя это и не предусматривается алгоритмом. Эта дополнительная операция позволяет упростить вычисления:

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} &\sim \boxed{(1) \leftrightarrow (2)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \boxed{\begin{matrix} (2) \rightarrow (2) - 2(1) \\ (4) \rightarrow (4) - 4(1) \end{matrix}} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix} \sim \boxed{(2) \leftrightarrow (3)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix} \sim \boxed{(4) \rightarrow (4) - (2)} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \sim \boxed{(4) \rightarrow (4) - (3)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Полученная матрица ступенчатого вида имеет три ненулевые строки, поэтому ранг этой матрицы и, следовательно, матрицы A равен трем. Базисным минором в последней матрице является $M_{1,2,3}^{1,2,4}$.

Замечание 12.1. Приведенные два метода существенно отличаются друг от друга. При нахождении ранга конкретной матрицы методом окаймляющих миноров может потребоваться

большое количество вычислений. Это связано с тем, что метод требует вычисления определителей, порядок которых может возрасти до минимального из размеров матрицы. Однако в результате будет найден не только ранг матрицы, но и один из ее базисных миноров.

При нахождении ранга матрицы методом элементарных преобразований требуется гораздо меньше вычислений. Причем разница в объемах вычислений возрастает с ростом размеров матрицы и усложнением ее вида. Но этот метод позволяет найти базисный минор лишь для матрицы ступенчатого вида, полученной в результате элементарных преобразований. Чтобы найти базисный минор исходной матрицы, нужны дополнительные вычисления с учетом уже известного ранга матрицы. В примере 12.3, вычислив наудачу минор третьего порядка, стоящий в тех же строках и столбцах, что и в преобразованной матрице ступенчатого вида, получим

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, он является одним из базисных миноров матрицы A .

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 12. Ранг матрицы	110
12.1. Линейная зависимость строк и столбцов	111
12.2. Теорема о базисном миноре	112
12.3. Вычисление ранга матрицы	114