

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект лекций

Для студентов всех специальностей

Москва
2009

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Лекция 11

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Обратная матрица. Теорема о ее единственности. Критерий существования обратной матрицы. Присоединенная матрица. Вычисление обратной матрицы с помощью присоединенной матрицы и с помощью элементарных преобразований. Матрица, обратная произведению двух обратимых матриц. Решение матричных уравнений вида $AX = B$ и $XA = B$ с невырожденной матрицей A . Формулы Крамера.

11.1. Обратная матрица и ее свойства

Определение 11.1. Пусть A — квадратная матрица порядка n . Квадратную матрицу B того же порядка называют **обратной** к A , если $AB = BA = E$, где E — единичная матрица порядка n .

Обратную матрицу обозначают A^{-1} . Она позволяет определить целую отрицательную степень матрицы A . А именно, для $n > 0$ полагают $A^{-n} = (A^{-1})^n$.

Теорема 11.1. Если квадратная матрица A имеет обратную матрицу, то обратная матрица единственная.

◀ Предположим, что матрица A имеет две обратные матрицы B и B' . Тогда, согласно определению 11.1 обратной матрицы, выполнены, в частности, равенства $AB' = E$ и $BA = E$. Используя ассоциативность умножения матриц, получаем $B = BE = B(AB') = (BA)B' = EB' = B'$, т.е. матрицы B и B' совпадают. ▶

Квадратная матрица не всегда имеет обратную. Установить, имеет ли данная матрица обратную, позволяет следующий критерий.

Теорема 11.2. Для того чтобы квадратная матрица A порядка n имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы $\det A \neq 0$.

◀ **Необходимость.** Пусть A^{-1} — матрица, обратная к A . Тогда $\det(AA^{-1}) = \det E = 1$, но, согласно свойству определителей, $\det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}$. Поэтому $\det A \det A^{-1} = 1$ и, следовательно, $\det A \neq 0$.

Достаточность. Пусть $\det A \neq 0$. Обозначим через A_{ij} алгебраическое дополнение матрицы A , соответствующее элементу a_{ij} , т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} — минор этого же элемента.

Раскрывая определитель матрицы A по i -й строке, получаем равенства

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \det A, \quad i = \overline{1, n}.$$

По свойствам определителей, для любых индексов $k \neq i$ выполнено равенство

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0.$$

Рассмотрим теперь квадратную матрицу B порядка n с элементами $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$. Матрица $C = AB$ имеет элементы

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{A_{kj}}{\det A} = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i, \end{cases}$$

т.е. C — единичная матрица.

Аналогично матрица $C' = BA$ имеет элементы

$$c'_{kj} = \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{A_{ik}}{\det A} = \frac{1}{\det A} \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$$

следовательно, матрица C' также является единичной.

Согласно определению 11.1, матрица B является обратной для A : $B = A^{-1}$. ►

Следствие 11.1. Если квадратная матрица A имеет обратную, то $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

◄ Действительно, $\det A^{-1} \det A = \det(A^{-1}A) = \det E = 1$. ►

Квадратную матрицу с ненулевым определителем называют **невырожденной** или **неособой**. В противном случае, когда определитель матрицы равен нулю, ее называют **вырожденной**. Итак, для существования обратной матрицы A^{-1} необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной.

Теорема 11.3. Если квадратные матрицы A и B порядка n имеют обратные матрицы, то и их произведение имеет обратную матрицу, причем $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

◄ В соответствии с определением 11.1 обратной матрицы достаточно доказать два равенства: $(AB)B^{-1}A^{-1} = E$, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = E$. Используя ассоциативность умножения матриц (см. 10.4), получаем

$$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E, \\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E. \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

Теорема 11.4. Если матрица A порядка n имеет обратную, то и транспонированная матрица A^T имеет обратную, причем $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

◄ Нужно убедиться, что $A^T(A^{-1})^T = E$ и $(A^{-1})^T A^T = E$. Используя свойство произведения матриц относительно операции транспонирования, имеем

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E, \quad (A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = E^T = E. \quad \blacktriangleright$$

11.2. Вычисление обратной матрицы

Применяют два основных метода вычисления *обратной матрицы*. Первый вытекает из теоремы 11.2 и состоит в следующем. Пусть дана квадратная матрица A порядка n . Матрицу A^* , транспонированную к матрице (A_{ij}) алгебраических дополнений, называют **присоединенной**. Как следует из доказательства теоремы 11.2, если A — невырожденная матрица, то обратная к ней имеет вид $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$.

Таким образом, чтобы для квадратной матрицы порядка n найти обратную матрицу, надо вычислить один определитель порядка n и составить присоединенную матрицу, т.е. вычислить n^2 определителей порядка $n - 1$. Метод присоединенной матрицы эффективен при $n = 2$ или $n = 3$, но при росте n становится слишком трудоемким.

Пример 11.1. Выясним, имеет ли матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ обратную и если имеет найдем ее.

Поскольку $\det A = -2$, матрица A является невырожденной и, согласно теореме 11.2, имеет обратную. Для ее вычисления последовательно находим

$$A^{*\top} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что для квадратной матрицы A второго порядка присоединенная матрица A^* получается перестановкой в A *диагональных элементов* и изменением знака двух других.

Проверка ответа выполняется в соответствии с определением 11.1 обратной матрицы:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \#$$

Второй метод вычисления обратной матрицы состоит в преобразовании исходной матрицы к более простому виду с помощью *элементарных преобразований строк*. Чтобы найти матрицу A^{-1} , обратную к A , фактически надо решить *матричное уравнение* $AX = E$. Отметим, что если над матрицей A выполняется какое-либо элементарное преобразование строк, то это же преобразование осуществляется и над матрицей AX , поскольку любое элементарное преобразование строк матрицы эквивалентно умножению ее слева на соответствующую матрицу специального вида (см. 10.5). Таким образом, если в уравнении $AX = E$ над матрицами A и E одновременно выполнить какое-либо элементарное преобразование строк, т.е. домножить это равенство слева на некоторую матрицу специального вида, то в результате получится новое матричное уравнение $A_1X = B_1$. Оба эти матричных уравнения имеют одно и то же решение, так как любое элементарное преобразование строк имеет *обратное элементарное преобразование строк*. Последовательность элементарных преобразований строк надо подобрать так, чтобы на s -м шаге матрица A превратилась в *единичную матрицу*. В результате этих s шагов получается уравнение $A_sX = B_s$, где $A_s = E$, т.е. $X = B_s$. Итак, поскольку A^{-1} является решением уравнения $AX = E$, которое эквивалентно $X = B_s$, то $A^{-1} = B_s$.

Чтобы синхронно выполнять преобразования над матрицами в левой и правой частях матричного уравнения $AX = E$, записывают *блочную матрицу* $(A|E)$ и выполняют такие элементарные преобразования строк этой матрицы, чтобы вместо A получить единичную матрицу E .

Пример 11.2. Продемонстрируем изложенный метод нахождения обратной матрицы для матрицы из примера 11.1. Для этого записываем матрицу $(A|E)$ и выполняем элементарные преобразования ее строк в следующем порядке:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \boxed{(2) \rightarrow (2) - 3(1)} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim \boxed{(1) \rightarrow (1) + (2)} \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim \boxed{(2) \rightarrow -0,5(2)} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1,5 & -0,5 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$.

11.3. Решение матричных уравнений

Мы рассмотрим два вида *матричных уравнений* относительно неизвестной матрицы X : $AX = B$ и $XA = B$, где A и B — известные матрицы, причем матрица A *квадратная* и *невырожденная*. Некоторую матрицу называют *решением матричного уравнения* относительно неизвестной матрицы X , если при ее подстановке вместо X матричное уравнение превращается в тождество.

Начнем с уравнения $AX = B$ и изложим два метода его решения.

Первый метод предполагает вычисление *обратной матрицы* A^{-1} (например, при помощи *присоединенной матрицы*) и дает запись решения матричного уравнения в виде $X = A^{-1}B$. Действительно, подставляя $X = A^{-1}B$ в уравнение $AX = B$, получаем $A(A^{-1}B) = B$, т.е. $B = B$, и $X = A^{-1}B$ является решением матричного уравнения $AX = B$. Более того, это решение единственно, так как для любого другого решения X' выполнено тождество $AX' = B$, после умножения которого слева на A^{-1} оказывается, что $A^{-1}(AX') = A^{-1}B$, т.е. $(A^{-1}A)X' = X$ и, следовательно, $X' = X$.

Второй метод основан на *элементарных преобразованиях строк* блочной матрицы $(A|B)$ и имеет своей целью преобразование ее к виду $(E|B_1)$, в котором вместо матрицы A стоит *единичная матрица* E . Тогда матрица B_1 и будет решением уравнения. Если матрица B совпадает с единичной, то в этом частном случае получается метод элементарных преобразований вычисления обратной матрицы.

Пример 11.3. Найдем решение матричного уравнения $AX = B$, имеющего вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся методом элементарных преобразований. Для этого запишем матрицу $(A|B)$ и выполним те же элементарные преобразования ее строк, что и в примере 11.2 (так как матрицы A и цели преобразований совпадают):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{array} \right).$$

Итак, $X = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$

Проверка ответа выполняется подстановкой найденного решения в исходное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}. \quad \#$$

Матричное уравнение $XA = B$ также можно решить двумя способами. Если известна матрица A^{-1} , то умножаем справа на A^{-1} матричное уравнение $XA = B$ и после очевидных преобразований $(XA)A^{-1} = BA^{-1}$, $X(AA^{-1}) = BA^{-1}$, $XE = BA^{-1}$ получаем ответ в виде произведения двух матриц $X = BA^{-1}$.

Пример 11.4. Найдем решение матричного уравнения $XA = B$, имеющего вид

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Поскольку обратная матрица A^{-1} известна (см. пример 11.2), то

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}. \quad \#$$

Другой метод решения матричного уравнения $XA = B$ состоит в транспонировании его левой и правой частей $(XA)^T = B^T$, $A^T X^T = B^T$. После введения новой неизвестной матрицы $Y = X^T$ получаем уравнение вида $A^T Y = B^T$, которое решается методом элементарных преобразований.

Пример 11.5. Чтобы решить матричное уравнение из примера 11.4, транспонируем его $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X^T = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$. После элементарных преобразований строк блочной матрицы получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \sim \boxed{(2) \rightarrow (2) - 2(1)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \boxed{(2) \rightarrow -0,5(2)} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \boxed{(1) \rightarrow (1) - 3(2)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Итак, $X^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, что, конечно же, совпадает с решением этого уравнения, найденным в примере 11.4.

11.4. Формулы Крамера

Рассмотрим СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей A в матричной записи $Ax = b$. В такой форме СЛАУ представляет собой частный случай матричного уравнения $AX = B$ при $B = b$ и $X = x$ (см. 11.3). Поэтому она имеет единственное решение $x = A^{-1}b$, где A^{-1} — матрица, обратная к A .

Чтобы выразить это единственное решение через коэффициенты СЛАУ, запишем A^{-1} в виде: $A^{-1} = (\alpha_{ij})$, где $\alpha_{ij} = A_{ji} / \det A$, а A_{ji} — алгебраическое дополнение элемента a_{ji} матрицы A . Перейдем от матричного равенства $x = A^{-1}b$ к его координатной записи. Тогда для первых элементов в столбцах левой и правой частей последнего равенства имеем

$$x_1 = \alpha_{11}b_1 + \alpha_{12}b_2 + \dots + \alpha_{1n}b_n = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\det A}.$$

Числитель представляет собой разложение по 1-му столбцу определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

получающегося, если в матрице A заменить 1-й столбец на столбец свободных членов. Аналогично находим, что

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\det A}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (11.1)$$

где Δ_j — определитель матрицы, получающейся из матрицы A заменой j -го столбца на столбец свободных членов. Таким образом, установлено следующее **правило Крамера**.

Теорема 11.5. СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей имеет решение, и притом единственное, которое определяется по **формулам Крамера** (11.1).

Следствие 11.2. Однородная СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей имеет единственное решение — нулевое.

Если матрица СЛАУ не является квадратной невырожденной, то формулы Крамера не работают и приходится использовать другие методы нахождения решений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 11. Обратная матрица	105
11.1. Обратная матрица и ее свойства	105
11.2. Вычисление обратной матрицы	106
11.3. Решение матричных уравнений	107
11.4. Формулы Крамера	109