

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект лекций

Для студентов всех специальностей

Москва
2009

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Лекция 10

МАТРИЦЫ И ОПЕРАЦИИ С НИМИ

Матрицы. Виды матриц. Равенство матриц. Линейные операции с матрицами и их свойства. Транспонирование матриц. Операция умножения и ее свойства. Элементарные преобразования матриц, приведение матрицы к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк. Блочные матрицы и операции с ними. *Прямая сумма матриц и ее свойства.

10.1. Виды матриц

Определение 10.1. *Матрицей типа* (или *размера*) $m \times n$ называют прямоугольную числовую таблицу, состоящую из mn чисел, которые расположены в m строках и n столбцах. Составляющие матрицу числа называют *элементами* этой *матрицы*. Как правило, их обозначают строчной буквой с двумя индексами, например a_{ij} , где i — номер строки ($i = \overline{1, m}$), j — номер столбца ($j = \overline{1, n}$), в которых расположен этот элемент.

Матрицы обозначают

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

Используют и другие сокращенные обозначения: $(a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ или просто (a_{ij}) , если по тексту ясно, в каких пределах изменяются индексы i и j . Матрицу как единый объект обозначают прописной буквой: A, B и т.д. Элемент матрицы A , стоящий в i -й строке и j -м столбце, мы будем также записывать в виде $[A]_{ij}$, что удобно при проведении доказательств.

Элементами матриц могут быть не только действительные числа, но и *комплексные*, и даже другие математические объекты. Например, мы будем встречаться с матрицами, элементами которых будут многочлены или матрицы.

Множество всех числовых матриц типа $m \times n$, элементами которых являются действительные числа, будем обозначать $M_{mn}(\mathbb{R})$.

Если матрица имеет тип $1 \times n$, т.е. если у матрицы всего одна строка, $A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, то матрицу называют *матрицей-строкой*. В обозначениях элементов матрицы индекс строки можно опустить: $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Число элементов в матрице-строке называют ее *длиной*.

Если матрица имеет тип $m \times 1$, т.е. у матрицы один столбец:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

то ее называют **матрицей-столбцом**. Число элементов в матрице-столбце называют ее **высотой**. Индекс столбца можно опустить:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

При $m = n$, т.е. когда матрица имеет столько же столбцов, сколько и строк, ее называют **квадратной порядка n** :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а при $m \neq n$ — **прямоугольной**. Множество всех квадратных матриц порядка n , элементами которых являются действительные числа, обозначают $M_n(\mathbb{R})$. У квадратных матриц выделяют последовательности элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ — **главную диагональ**, и $a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1n}$ — **побочную диагональ**. Элементы главной диагонали называют **диагональными**. Понятия диагонального элемента и главной диагонали распространяют и на прямоугольные матрицы.

Если в квадратной матрице порядка n все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, т.е. если матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то ее называют **диагональной** и обозначают $\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$. Если в диагональной матрице порядка n на диагонали стоят единицы, то ее называют **единичной** и обозначают обычно E или I :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу типа $m \times n$, все элементы которой равны нулю, называют **нулевой матрицей** соответствующего типа и обозначают буквой Θ или цифрой 0.

Часто используют матрицы и других видов, например **верхние треугольные матрицы**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

у которых элементы, расположенные под главной диагональю, равны нулю, и **нижние треугольные матрицы**, у которых, наоборот, элементы над главной диагональю равны нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что диагональные матрицы являются частным случаем как верхних, так и нижних треугольных матриц. Более того, множество диагональных матриц совпадает с *пересечением* множества верхних треугольных матриц и множества нижних треугольных матриц.

К **трехдиагональным матрицам** относят такие квадратные матрицы, у которых ненулевыми элементами могут быть лишь диагональные элементы и соседние с ними в строке или столбце:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Прямоугольные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

у которых элементы, расположенные под главной диагональю, равны нулю, называют **верхними трапецевидными**.

Важную роль в дальнейшем изложении играют **ступенчатые матрицы** (матрицы ступенчатого вида). Так называют матрицу типа $m \times n$, если для любой ее строки выполнено следующее условие: под первым слева ненулевым элементом строки и предшествующими ему нулевыми элементами строки все элементы матрицы равны нулю. Следующие матрицы имеют ступенчатый вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

10.2. Линейные операции над матрицами

Прежде чем обсуждать какие бы то ни было операции над *матрицами*, договоримся, какие матрицы мы будем считать равными.

Определение 10.2. Две матрицы называют **равными**, если они имеют один и тот же *тип* и если у них совпадают соответствующие *элементы*.

Определение 10.3. **Суммой матриц** $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ типа $m \times n$ называют матрицу $C = (c_{ij})$ того же типа с элементами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Для суммы матриц используют обозначение: $C = A + B$. В подробной записи

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} = C. \end{aligned}$$

Замечание 10.1. Сумма определена только для матриц одного типа.

Пример 10.1. Найдем сумму двух матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определение 10.4. *Произведением матрицы* $A = (a_{ij})$ *типа* $m \times n$ *на число* $\alpha \in \mathbb{R}$ *называют матрицу* $C = (c_{ij})$ *типа* $m \times n$ *с элементами* $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Подробно это произведение выглядит так:

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Замечание 10.2. Операции сложения и умножения на число для матриц аналогичны одноименным операциям над *векторами*. Эти операции также называют *линейными*.

Для любых матриц $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ и $C = (c_{ij})$ из $M_{mn}(\mathbb{R})$ верны следующие свойства линейных операций.

1°. Сложение матриц коммутативно: $A + B = B + A$.

◀ Доказательства равенств матриц часто проводят, основываясь на определении 10.2, т.е. доказывают, что матрицы, стоящие в левой и правой частях равенства, имеют на одинаковых местах равные элементы. Так, свойство коммутативности суммы матриц следует из равенств

$$[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = [B + A]_{ij},$$

среди которых первое и третье следуют из определения 10.3 суммы двух матриц, а второе верно в силу коммутативности сложения действительных чисел. ►

2°. Сложение матриц ассоциативно: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

◀ Как и в случае коммутативности, свойство ассоциативности вытекает из равенств

$$\begin{aligned} [(A + B) + C]_{ij} &= [A + B]_{ij} + [C]_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = \\ &= a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = [A]_{ij} + [B + C]_{ij} = [A + (B + C)]_{ij}, \end{aligned}$$

которые имеют место в силу определения 10.3 суммы двух матриц и ассоциативности сложения действительных чисел. ►

Свойства 1° и 2° позволяют не заботиться о порядке операций сложения матриц и порядке слагаемых в матричных выражениях.

3°. Существует такая матрица $O \in M_{mn}(\mathbb{R})$, что для любой матрицы $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ выполнено равенство $A + O = A$.

◀ Матрица O — это *нулевая матрица* Θ типа $m \times n$. Действительно, $[A + \Theta]_{ij} = [A]_{ij} + [\Theta]_{ij} = a_{ij} + 0 = a_{ij} = [A]_{ij}$. ►

4°. Для любой матрицы $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ существует такая единственная матрица $B \in M_{mn}(\mathbb{R})$, для которой выполнено равенство $A + B = \Theta$, где Θ — нулевая матрица.

◀ Если $A + B = \Theta$, то $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = [\Theta]_{ij} = 0$ и, следовательно, $a_{ij} + b_{ij} = 0$. Значит, элементами b_{ij} матрицы B являются $b_{ij} = -a_{ij}$, и это доказывает как единственность, так и существование матрицы B . ►

Матрицу B , о которой говорится в свойстве 4°, называют *противоположной* A и обозначают через $-A$. Эта матрица получается из матрицы A умножением на число -1 .

Свойства 3° и 4° позволяют ввести операцию вычитания матриц. **Разностью** $P - Q$ **матриц** P и Q одного типа называют матрицу $P + (-Q)$.

5°. Умножение матрицы на число ассоциативно: $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.

$$\blacktriangleleft [(\lambda\mu)A]_{ij} = (\lambda\mu)a_{ij} = \lambda(\mu a_{ij}) = \lambda[\mu A]_{ij}. \blacktriangleright$$

6°. Умножение матрицы на число дистрибутивно относительно суммы действительных чисел: $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

$$\blacktriangleleft [(\lambda + \mu)A]_{ij} = (\lambda + \mu)a_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu a_{ij} = [\lambda A]_{ij} + [\mu A]_{ij} = [\lambda A + \mu A]_{ij}. \blacktriangleright$$

7°. Умножение матрицы на число дистрибутивно относительно суммы матриц: $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

$$\blacktriangleleft [\lambda(A + B)]_{ij} = \lambda[A + B]_{ij} = \lambda(a_{ij} + b_{ij}) = \lambda a_{ij} + \lambda b_{ij} = [\lambda A]_{ij} + [\lambda B]_{ij} = [\lambda A + \lambda B]_{ij}. \blacktriangleright$$

8°. Умножение матрицы на 1 не меняет ее: $1 \cdot A = A$.

$$\blacktriangleleft [1 \cdot A]_{ij} = 1 \cdot [A]_{ij} = [A]_{ij}. \blacktriangleright$$

10.3. Транспонирование матриц

Определение 10.5. Для матрицы $A = (a_{ij})$ типа $m \times n$ ее **транспонированной матрицей** называют матрицу $A^T = (c_{ij})$ типа $n \times m$ с элементами $c_{ij} = a_{ji}$.

При транспонировании матрицы ее *строки* становятся *столбцами* новой матрицы с сохранением их порядка. Точно так же столбцы исходной матрицы превращаются в строки транспонированной. Поэтому транспонирование можно рассматривать как преобразование симметрии матрицы относительно ее *главной диагонали*. Подробнее:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 10.2. Транспонируем следующие три матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad (a_1, a_2, \dots, a_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}^T = (b_1, b_2, \dots, b_m). \quad \#$$

Обсудим свойства операции транспонирования.

$$1^\circ. (A^T)^T = A.$$

$\blacktriangleleft$ Отметим, что матрицы $(A^T)^T$ и A имеют одинаковые *размеры*. Кроме того, $[(A^T)^T]_{ij} = [(A^T)]_{ji} = [A]_{ij}$. $\blacktriangleright$

$$2^\circ. (A + B)^T = A^T + B^T.$$

$$\blacktriangleleft [(A + B)^T]_{ij} = [(A + B)]_{ji} = [A]_{ji} + [B]_{ji} = [A^T]_{ij} + [B^T]_{ij} = [A^T + B^T]_{ij}. \blacktriangleright$$

$$3^\circ. (\lambda A)^T = \lambda A^T, \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\blacktriangleleft [(\lambda A)^T]_{ij} = [\lambda A]_{ji} = \lambda [A]_{ji} = \lambda [A^T]_{ij} = [\lambda A^T]_{ij}. \blacktriangleright$$

Если $A^T = A$, то матрицу A называют **симметрической**, а если $A^T = -A$ — **кососимметрической**. И в том и в другом случае матрица должна быть *квадратной*. Элементы симметрической матрицы, расположенные на местах, симметричных относительно главной диагонали, равны между собой. Действительно, $[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$ и из равенства $A^T = A$ следует, что $[A]_{ji} = [A]_{ij}$. Элементы же кососимметрической матрицы, расположенные на местах, симметричных относительно главной диагонали, отличаются знаком, а *диагональные* — равны нулю. Действительно, $[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$ и из равенства $A^T = -A$ следует, что $[A]_{ji} = -[A]_{ij}$. В частности, при $i = j$ выполняются равенства $[A]_{jj} = -[A]_{jj} = 0$.

Пример 10.3. Матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ симметрические, а матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ кососимметрические.

10.4. Умножение матриц

Определение 10.6. Пусть даны матрица $A = (a_{ij})$ типа $m \times n$ и матрица $B = (b_{ij})$ типа $n \times r$. **Произведением матриц** A и B называют матрицу $C = (c_{ij})$ типа $m \times r$ с элементами

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

которую обозначают $C = AB$.

Произведение определено лишь в том случае, когда количество *столбцов* первого сомножителя равно количеству *строк* второго. В формировании элемента c_{ij} произведения AB участвуют элементы i -й строки матрицы A и j -го столбца матрицы B . Поэтому правило умножения матриц называют также правилом умножения „строка на столбец“:

$$i \left(\text{—} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} j \\ \text{I} \end{array} \right) = i \left(\begin{array}{c} j \\ \vdots \\ \cdots \blacksquare \cdots \\ \vdots \end{array} \right).$$

Пример 10.4. Найдем произведение двух матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Пример 10.5. Произведением *прямоугольной матрицы* и *матрицы-столбца* является матрица-столбец:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Пример 10.6. Найдем произведение трех *квадратных матриц второго порядка*, перемножив сначала первые две матрицы, а затем результат их произведения и третью матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4 & 0-6 \\ -3+8 & 0-12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -24 & -8 \end{pmatrix}. \quad \#$$

Умножение матрицы-строки X типа $1 \times n$ на матрицу-столбец Y типа $n \times 1$ дает матрицу типа 1×1 , которую отождествляют с числом:

$$XY = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Таким образом, произведение любой матрицы-строки и любой матрицы-столбца, имеющих одинаковое количество элементов, есть число, равное сумме произведений их элементов с одинаковыми индексами. Если матрица-строка и матрица-столбец имеют разное количество элементов, то их перемножить нельзя.

Замечание 10.3. Для числовых матриц типа 1×1 матричные операции суммы, разности, умножения и умножения матриц на действительные числа совпадают с соответствующими арифметическими операциями суммы, разности и умножения, выполняемыми с действительными числами. Вот почему матрицы типа 1×1 отождествляют с числами.

Существование произведения AB двух матриц не означает существования их произведения BA . Например, матрицы из примера 10.4 нельзя умножить в другом порядке.

Чтобы матрицу A типа $m \times n$ можно было умножить на матрицу B и слева, и справа (т.е. чтобы были определены оба произведения BA и AB), матрица B должна иметь тип $n \times m$. Квадратные матрицы A и B можно перемножить, если они имеют одинаковый порядок, причем в этом случае определены оба произведения (AB и BA), хотя равенство $AB = BA$ обычно нарушается.

Пример 10.7. Найдём произведения двух пар матриц A, B и C, D в одном и другом порядке:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$CD = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad DC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание, что $CD = C$, $DC = \Theta$, хотя ни одна из этих двух матриц не является нулевой. #

Если определены оба произведения AB и BA и выполнено равенство $AB = BA$, то матрицы A и B называют **коммутирующими** или **перестановочными**. Коммутирующие матрицы всегда квадратные и одного порядка.

Пример 10.8. Произведение *диагональных матриц* одного порядка есть диагональная матрица, элементами которой являются произведения соответствующих элементов перемножаемых матриц. Диагональные матрицы одного порядка являются перестановочными. Действительно,

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}. \quad \#$$

Операция умножения матриц имеет следующие свойства.

1°. Умножение матриц ассоциативно, т.е. $(AB)C = A(BC)$.

◀ Если матрицы A, B, C имеют типы $m \times n, n \times k, k \times l$ соответственно, то

$$\begin{aligned} [(AB)C]_{ij} &= \sum_{r=1}^k [AB]_{ir} [C]_{rj} = \sum_{r=1}^k \left(\sum_{s=1}^n [A]_{is} [B]_{sr} \right) [C]_{rj} = \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^n [A]_{is} [B]_{sr} [C]_{rj} = \\ &= \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^n [A]_{is} ([B]_{sr} [C]_{rj}) = \sum_{s=1}^n [A]_{is} \sum_{r=1}^k [B]_{sr} [C]_{rj} = \sum_{s=1}^n [A]_{is} [BC]_{sj} = [A(BC)]_{ij}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

2°. Умножение матриц дистрибутивно относительно сложения матриц, т.е. $(A + B)C = AC + BC$.

◀ Если матрицы A, B имеют тип $m \times n$, а матрица C — тип $n \times k$, то

$$\begin{aligned} [(A + B)C]_{ij} &= \sum_{r=1}^n [A + B]_{ir} [C]_{rj} = \sum_{r=1}^n ([A]_{ir} + [B]_{ir}) [C]_{rj} = \sum_{r=1}^n ([A]_{ir} [C]_{rj} + [B]_{ir} [C]_{rj}) = \\ &= \sum_{r=1}^n [A]_{ir} [C]_{rj} + \sum_{r=1}^n [B]_{ir} [C]_{rj} = [AC]_{ij} + [BC]_{ij} = [AC + BC]_{ij}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

3°. Существует такая матрица $E \in M_n(\mathbb{R})$, что для любой матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$ выполнены равенства $AE = EA = A$.

◀ В качестве матрицы E можно взять единичную порядка n . ▶

4°. Для любой матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$ и нулевой матрицы $\Theta \in M_n(\mathbb{R})$ выполнено равенство $A\Theta = \Theta$.

◀ Вычислим элементы произведения $A\Theta$: $[A\Theta]_{ij} = \sum_{r=1}^n [A]_{ir} [\Theta]_{rj} = \sum_{r=1}^n [A]_{ir} 0 = 0$. Видим, что все элементы матрицы $A\Theta$ равны нулю. ▶

5°. Для любых матриц A и B типов $m \times n$ и $n \times k$ выполнено равенство $(AB)^T = B^T A^T$, т.е. транспонированное произведение двух матриц равно произведению в обратном порядке транспонированных матриц.

$$\blacktriangleleft [(AB)^T]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{r=1}^n [A]_{jr} [B]_{ri} = \sum_{r=1}^n [A^T]_{rj} [B^T]_{ir} = \sum_{r=1}^n [B^T]_{ir} [A^T]_{rj} = [B^T A^T]_{ij}. \quad \blacktriangleright$$

Операция умножения матриц позволяет ввести операцию возведения квадратной матрицы в натуральную степень. Положим $A^1 = A$, $A^{n+1} = AA^n$, $n = 1, 2, \dots$. Отметим, что две степени A^n и A^m одной и той же матрицы являются матрицами одного порядка и перестановочны: $A^n A^m = A^m A^n = A^{n+m}$. Введем также нулевую степень квадратной матрицы, полагая $A^0 = E$, где E — единичная матрица того же порядка.

Введенная степень матрицы позволяет для квадратной матрицы вычислять выражения вида

$$a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_0 A^0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{0, n},$$

т.е. *многочлены* от одного матричного аргумента.

Пример 10.9. Вычислим значение *квадратного трехчлена* $p(x) = 3x^2 - 4x + 5$ для квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Поскольку $p(x) = 3x^2 - 4x + 5x^0$, то $p(A) = 3A^2 - 4A + 5A^0$, где $A^0 = E$ — единичная матрица второго порядка. Вычислив $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, находим

$$p(A) = 3 \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

10.5. Элементарные преобразования матриц

Следующие три операции называют **элементарными преобразованиями строк матрицы**:

- 1) Умножение i -й строки матрицы на число $\lambda \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которое будем записывать в виде $(i) \rightarrow \lambda(i)$.

- 2) Перестановка двух строк в матрице, например i -й и k -й строк:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которую будем записывать в виде $(i) \leftrightarrow (k)$.

- 3) Добавление к i -й строке матрицы ее k -й строки с коэффициентом λ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + \lambda a_{k1} & a_{i2} + \lambda a_{k2} & \dots & a_{in} + \lambda a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

что будем записывать в виде $(i) \rightarrow (i) + \lambda(k)$.

Аналогичные операции над столбцами матрицы называют **элементарными преобразованиями столбцов**.

Каждое элементарное преобразование строк или столбцов матрицы имеет **обратное элементарное преобразование**, которое преобразованную матрицу превращает в исходную. Например, обратным преобразованием для перестановки двух строк является перестановка тех же строк.

Каждое элементарное преобразование строк (столбцов) матрицы A можно трактовать как умножение A слева (справа) на матрицу специального вида. Эта матрица получается, если то же преобразование выполнить над *единичной матрицей*. Рассмотрим подробнее элементарные преобразования строк.

Пусть матрица B получается в результате умножения i -й строки матрицы A типа $m \times n$ на число $\lambda \neq 0$. Тогда $B = E_i(\lambda)A$, где матрица $E_i(\lambda)$ получается из единичной матрицы E порядка m умножением ее i -й строки на число λ .

Пусть матрица B получается в результате перестановки i -й и k -й строк матрицы A типа $m \times n$. Тогда $B = F_{ik}A$, где матрица F_{ik} получается из единичной матрицы E порядка m перестановкой ее i -й и k -й строк.

Пусть матрица B получается в результате добавления к i -й строке матрицы A типа $m \times n$ ее k -й строки с коэффициентом λ . Тогда $B = G_{ik}(\lambda)A$, где матрица $G_{ik}(\lambda)$ получается из единичной

матрицы E порядка m в результате добавления к i -й строке k -й строки с коэффициентом λ , т.е. на пересечении i -й строки и k -го столбца матрицы E нулевой элемент заменен на число λ .

Точно так же реализуются элементарные преобразования столбцов матрицы A , но при этом она умножается на матрицы специального вида не слева, а справа.

С помощью алгоритмов, которые основаны на элементарных преобразованиях строк и столбцов, матрицы можно преобразовывать к различному виду. Один из важнейших таких алгоритмов составляет основу доказательства следующей теоремы.

Теорема 10.1. С помощью элементарных преобразований строк любую матрицу можно привести к ступенчатому виду.

◀ Доказательство теоремы состоит в построении конкретного алгоритма приведения матрицы к ступенчатому виду. Этот алгоритм состоит в многократном повторении в определенном порядке трех операций, связанных с некоторым текущим элементом матрицы, который выбирается исходя из расположения в матрице. На первом шаге алгоритма в качестве текущего элемента матрицы выбираем верхний левый, т.е. $[A]_{11}$.

1*. Если текущий элемент равен нулю, переходим к операции 2*. Если же он не равен нулю, то строку, в которой расположен текущий элемент (текущую строку), добавляем с соответствующими коэффициентами к строкам, расположенным ниже, так, чтобы все элементы матрицы, стоящие в столбце под текущим элементом, обратились в нуль. Например, если текущий элемент есть $[A]_{ij}$, то в качестве коэффициента для k -й строки, $k = i + 1, \dots$, нам следует взять число $-[A]_{kj}/[A]_{ij}$. Выбираем новый текущий элемент, смещаясь в матрице на один столбец вправо и на одну строку вниз, и переходим к следующему шагу, повторяя операцию 1*. Если такое смещение невозможно, т.е. достигнут последний столбец или строка, преобразования прекращаем.

2*. Если текущий элемент в некоторой строке матрицы равен нулю, то просматриваем элементы матрицы, расположенные в столбце под текущим элементом. Если среди них нет ненулевых, переходим к операции 3*. Пусть в k -й строке под текущим элементом находится ненулевой элемент. Меняем местами текущую и k -ю строки и возвращаемся к операции 1*.

3*. Если текущий элемент и все элементы под ним (в том же столбце) равны нулю, меняем текущий элемент, смещаясь в матрице на один столбец вправо. Если такое смещение возможно, т.е. текущий элемент находится не в самом правом столбце матрицы, то повторяем операцию 1*. Если же мы уже достигли правого края матрицы и смена текущего элемента невозможна, то матрица имеет ступенчатый вид, и мы можем прекратить преобразования.

Так как матрица имеет конечные *размеры*, а за один шаг алгоритма положение текущего элемента смещается вправо хотя бы на один столбец, процесс преобразований закончится, причем не более чем за n шагов (n — количество столбцов в матрице). Значит, наступит момент, когда матрица будет иметь ступенчатый вид. ►

Пример 10.10. Преобразуем матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк.

Используя алгоритм из доказательства теоремы 10.1 и записывая матрицы после окончания выполнения его операций, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \boxed{\begin{matrix} (2) \rightarrow (2) - 2(1) \\ (3) \rightarrow (3) - 4(1) \end{matrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \boxed{(3) \rightarrow (3) - 3(2)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

10.6. Блочные матрицы

Если разделить некоторую матрицу A на части вертикальными и горизонтальными прямыми, то получаются прямоугольные ячейки, являющиеся сами по себе матрицами. Эти ячейки называют **блоками матрицы**. Сама матрица A может рассматриваться как таблица, элементами которой являются более мелкие матрицы $M_{\alpha\beta}$: $A = (M_{\alpha\beta})$. При таком построении матрица A составляется из блоков, и поэтому ее называют **блочной**. Например, матрицу A разобьем на блоки

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{array} \right)$$

и обозначим их

$$M_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}, \quad M_{21} = \begin{pmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{pmatrix}, \quad M_{22} = \begin{pmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицу A можно записать в виде блочной матрицы, элементами которой будут эти матрицы $M_{\alpha\beta}$: $A = (M_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$.

Для составления блочной матрицы из серии матриц $M_{\alpha\beta}$ необходимо, чтобы подмножества матриц из серии с одинаковым значением индекса α имели одинаковое количество строк, а подмножества матриц с одинаковым значением индекса β — одинаковое количество столбцов. Эти подмножества образуют соответственно „блочные“ строки и „блочные“ столбцы (соответствующие нескольким строкам или столбцам обычной записи матрицы).

Пример 10.11. Указанным требованиям удовлетворяют следующие четыре матрицы:

$$M_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad M_{21} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \quad M_{22} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{pmatrix}.$$

Поэтому из них можно составить блочную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_{21} & b_{22} \\ \hline c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_{11} & d_{12} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & d_{21} & d_{22} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & d_{31} & d_{32} \end{array} \right). \quad \#$$

Основное свойство блочных матриц состоит в том, что операции над блочными матрицами совершаются по тем же правилам, что и операции над обычными матрицами. В самом деле, это в достаточной степени очевидно для *суммы матриц* и *произведения матрицы на число*. Однако относительно суммы это можно утверждать лишь в том случае, когда размеры слагаемых блочных матриц, равно как и размеры отдельных блоков с равными индексами у слагаемых, совпадают.

Подробнее рассмотрим ситуацию с *умножением блочных матриц*. Пусть блочные матрицы $A = (A_{\alpha\beta})$ и $B = (B_{\beta\gamma})$ удовлетворяют двум условиям.

1. Число „блочных“ столбцов матрицы A совпадает с числом „блочных“ строк матрицы B (т.е. индекс β для A и B изменяется в одинаковых пределах).

2. Для любых индексов α, β, γ число столбцов у матрицы $A_{\alpha\beta}$ совпадает с числом строк у матрицы $B_{\beta\gamma}$.

Тогда $AB = (C_{\alpha\gamma})$, $C_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma}$. Для доказательства этого равенства достаточно расписать обе его части через элементы матриц.

Указанные два условия довольно сложны, но все упрощается, если блоки матриц — это *квадратные матрицы* одного *порядка*. В этом случае условия близки к обычным: число „блочных“ столбцов множителя должно совпадать с числом „блочных“ строк множителя.

Представление матриц в блочном виде часто оказывается удобным при нахождении суммы и произведения, если матрицы имеют достаточно большие размеры, а их согласованные разбиения на блоки содержат *нулевые, единичные, диагональные, треугольные матрицы*.

Пример 10.12. Найдем произведения следующих блочных матриц предполагая, что все операции определены:

$$\begin{pmatrix} \Theta & E \\ E & \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A & 3E \\ -E & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC + 3D \\ -C + BD \end{pmatrix}. \quad \#$$

При *транспонировании* блочной матрицы транспонированию подлежат и ее элементы. Например, $\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} M_{11}^T & M_{21}^T \\ M_{12}^T & M_{22}^T \end{pmatrix}$.

Пример 10.13. Транспонируем блочную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array} \right)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ \hline a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} \end{array} \right).$$

10.7. Прямая сумма матриц

Определение 10.7. Пусть даны *квадратные матрицы* A порядка m и B порядка n . **Прямой суммой матриц** A и B называют квадратную *блочную матрицу* $C = A \oplus B$ порядка $m + n$, равную $C = \begin{pmatrix} A & \Theta \\ \Theta & B \end{pmatrix}$, где Θ обозначает нулевой блок (*нулевую матрицу* типа $m \times n$ вверху справа и $n \times m$ внизу слева).

Укажем основные свойства прямой суммы матриц.

1°. Прямая сумма ассоциативна: $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

◀ В результате выполнения операций в левой и правой частях равенства получается одна и та же **блочно-диагональная матрица** $\begin{pmatrix} A & \Theta & \Theta \\ \Theta & B & \Theta \\ \Theta & \Theta & C \end{pmatrix}$, где нулевые матрицы имеют соответствующий *тип*. ▶

2°. Пусть квадратные матрицы A_1 и A_2 имеют порядок m , а квадратные матрицы B_1 и B_2 — порядок n . Тогда $(A_1 \oplus B_1) + (A_2 \oplus B_2) = (A_1 + A_2) \oplus (B_1 + B_2)$, $(A_1 \oplus B_1)(A_2 \oplus B_2) = A_1 A_2 \oplus B_1 B_2$.

◀ Действительно, эти записи означают следующее:

$$\begin{pmatrix} A_1 & \Theta \\ \Theta & B_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_2 & \Theta \\ \Theta & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 + A_2 & \Theta \\ \Theta & B_1 + B_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1 & \Theta \\ \Theta & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & \Theta \\ \Theta & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 A_2 & \Theta \\ \Theta & B_1 B_2 \end{pmatrix},$$

что соответствует операциям над блочными матрицами. ▶

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 10. Матрицы и операции с ними	93
10.1. Виды матриц	93
10.2. Линейные операции над матрицами	95
10.3. Транспонирование матриц	97
10.4. Умножение матриц	98
10.5. Элементарные преобразования матриц	101
10.6. Блочные матрицы	103
10.7. Прямая сумма матриц	104