Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект лекций

Для студентов всех специальностей

Москва
2009

Лекция 9

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поверхности второго порядка. Цилиндрические поверхности. Поверхности вращения. Эллипсоид. Конус. Гиперболоиды. Параболоиды. Их канонические уравнения. Исследование поверхностей второго порядка методом сечений.

9.1. Поверхность вращения и преобразование сжатия

Поверхность вращения. Простейшие поверхности в пространстве — это плоскости. Они являются *геометрическими образами уравнений первой степени* от трех переменных. Другой достаточно простой тип поверхностей составляют поверхности вращения.

Определение 9.1. Поверхность Ω называют ***поверхностью вращения***, если она образована окружностями с центрами на некоторой прямой L (оси вращения), которые расположены в плоскостях, перпендикулярных L (рис. 9.1).

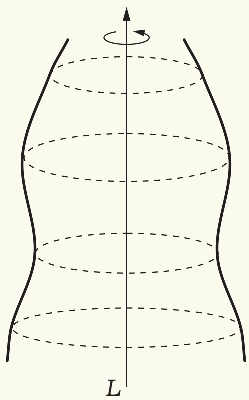


Рис. 9.1

Уравнение поверхности вращения Ω имеет наиболее простой вид, когда *начало O прямоугольной системы координат* лежит на оси вращения, а *ось Oz* совпадает с ней. Пересечение поверхности Ω с *координатной плоскостью* xOz — это некоторое множество S (рис. 9.2), вращение которого образует Ω.

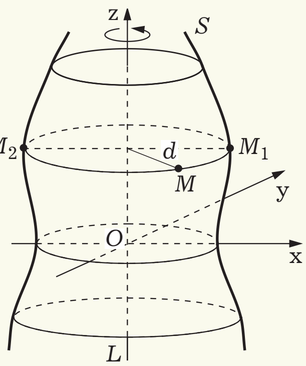


Рис. 9.2

Предположим, что множество S в плоскости xOz описывается уравнением $\varphi(x,z)=0$. Рассмотрим произвольную точку $M(x;y;z)$. Она удалена от оси Oz на расстояние $d=\sqrt{x^2+y^2}$. Если точка M лежит на поверхности вращения Ω, то точки $M_1(x_1;0;z)$, $M_2(x_2;0;z)$ с той же аппликатой z, что и M, и абсциссами $x_1=d$, $x_2=-d$ принадлежат множеству S. Поэтому

$$0=\varphi(x_1,z)=\varphi(d,z)=\varphi(\sqrt{x^2+y^2},z),\quad 0=\varphi(x_2,z)=\varphi(-d,z)=\varphi(-\sqrt{x^2+y^2},z)$$

и условие $M\in\Omega$ сводится к тому, что *координаты* точки M удовлетворяют равенству

$$\varphi(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0. \tag{9.1}$$

Уравнение (9.1) и есть уравнение поверхности Ω, которая образована вращением подмножества $S=\{(x;z)\colon \varphi(x,z)=0\}$, расположенного в координатной плоскости xOz. Из уравнения множества S уравнение (9.1) соответствующей поверхности вращения получается заменой x на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

Преобразование сжатия. Под ***преобразованием сжатия*** к координатной плоскости xOz мы понимаем такое преобразование, при котором точка $M(x;y;z)$ смещается в точку $M'(x;y/k;z)$, $k>0$. Параметр k называют ***коэффициентом сжатия***. При $k>1$ точки пространства, расположенные на одной прямой, перпендикулярной плоскости xOz, в результате такого преобразования сближаются, т.е. преобразование — действительно сжатие. При $0<k<1$ преобразование фактически является растяжением.

Пусть в пространстве в прямоугольной системе координат Oxyz некоторое множество Q задано своим уравнением $F(x,y,z)=0$. При преобразовании сжатия к координатной плоскости xOz с коэффициентом k это множество превратится в новое множество Q' с уравнением $F(x,ky,z)=0$. Это следует из того, что точка $(x;y;z)$ тогда и только тогда принадлежит множеству Q', когда точка $(x;ky;z)$ принадлежит множеству Q.

9.2. Эллипсоиды

Поверхность, которая получается при вращении *эллипса* вокруг одной из его *осей симметрии*, называют ***эллипсоидом вращения*** (рис. 9.3).

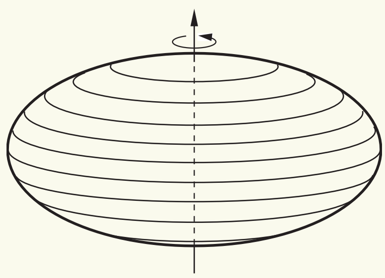


Рис. 9.3

Уравнение эллипсоида вращения выведем, расположив *начало прямоугольной системы координат* в *центре эллипса* и совместив *ось аппликат* Oz с осью вращения, а *координатную плоскость* xOz — с плоскостью эллипса (рис. 9.4). Тогда уравнение эллипса будет иметь вид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$. Если в этом уравнении заменить x на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ (см. **9.1**), то получится уравнение $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ соответствующей *поверхности вращения*. Итак, эллипсоид вращения с осью вращения Oz описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1. \tag{9.2}$$

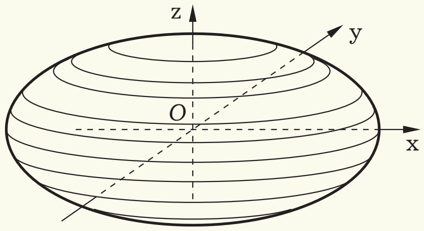


Рис. 9.4

Применив к эллипсоиду вращения *преобразование сжатия* к координатной плоскости xOz, получим ***эллипсоид*** общего вида. Если k — *коэффициент сжатия*, то уравнение эллипсоида будет иметь вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, или, после переобозначения параметров,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{9.3}$$

Уравнение (9.3) задает поверхность *второго порядка*. Его называют ***каноническим уравнением эллипсоида***. Три параметра a, b и c, входящие в него — это ***полуоси эллипсоида*** (рис. 9.5). Если все три полуоси эллипсоида попарно различны, то эллипсоид называют ***трехосным***.

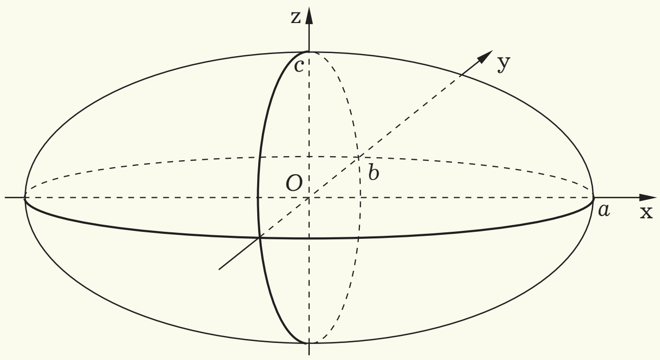


Рис. 9.5

При совпадении каких-либо двух полуосей (как, например, в уравнении (9.2)) эллипсоид является поверхностью вращения (эллипсоидом вращения). Если равны все три полуоси ($a = b = c = r$), то эллипсоид превращается в сферу радиуса r, которая описывается уравнением $x^2+y^2+z^2=r^2$.

9.3. Гиперболоиды

При вращении *гиперболы* вокруг одной из ее *осей симметрии* получается поверхность, называемая ***гиперболоидом вращения***. Выбор оси вращения влияет на тип гиперболоида. Если осью вращения является *действительная ось симметрии гиперболы*, то поверхность вращения будет состоять из двух частей (полостей). Это ***двуполостный гиперболоид вращения*** (рис. 9.6). При вращении гиперболы вокруг ее *мнимой оси симметрии* поверхность будет состоять из одной полости (рис. 9.7). Такую поверхность называют ***однополостным гиперболоидом вращения***.

Для вывода уравнений гиперболоидов вращения расположим *прямоугольную систему координат* так, чтобы ось вращения, являющаяся осью симметрии гиперболы, совпадала с *осью аппликат* Oz, а сама гипербола располагалась в *координатной плоскости* xOz с *центром* в *начале системы координат*.

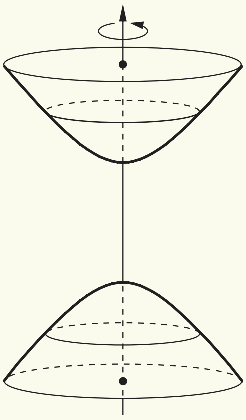


Рис. 9.6

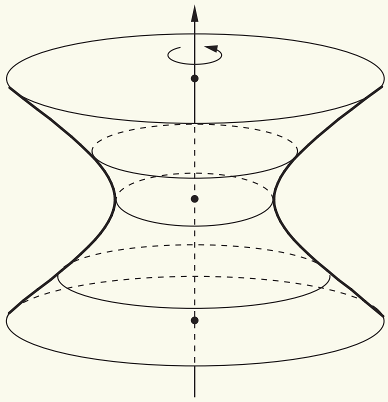


Рис. 9.7

Для случая двуполостного гиперболоида вращения уравнение гиперболы будет иметь вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1$. Заменив в нем x на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ (см. **9.1**), получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1. \tag{9.4}$$

В случае однополостного гиперболоида вращения гипербола будет описываться уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$. Опять меняем x на радикал $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad — \tag{9.5}$$

уравнение однополостного гиперболоида вращения.

Гиперболоиды вращения *преобразованием сжатия* к координатной плоскости xOz превращаются в ***двуполостный*** и ***однополостный гиперболоиды*** общего вида. При *коэффициенте сжатия* k их уравнениями будут соответственно

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1 \qquad \text{и} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

После переобозначений параметров эти уравнения преобразуются в ***каноническое уравнение двуполостного*** (рис. 9.8)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{9.6}$$

и ***однополостного*** (рис. 9.9) ***гиперболоидов***

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{9.7}$$

Как видно из уравнений (9.6), (9.7), оба гиперболоида являются *поверхностями второго порядка.*

9.4. Эллиптические параболоиды

При вращении *параболы* вокруг ее *оси* получаем ***параболоид вращения*** (рис. 9.10). Чтобы найти его уравнение, выберем *прямоугольную систему координат*, направив *ось* Oz по оси вращения и совместив *координатную плоскость* xOz с плоскостью параболы. Пусть при этом парабола описывается уравнением $x^2 = 2pz$, $p > 0$. Тогда для получения уравнения *поверхности вращения* нужно заменить в этом уравнении x на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ (см. **9.1**): $2pz = x^2 + y^2$.

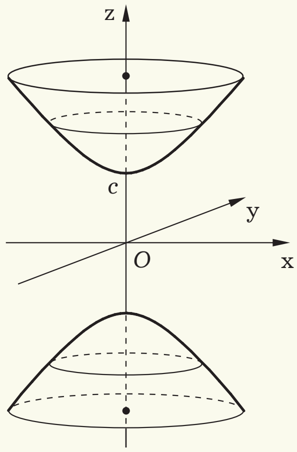


Рис. 9.8

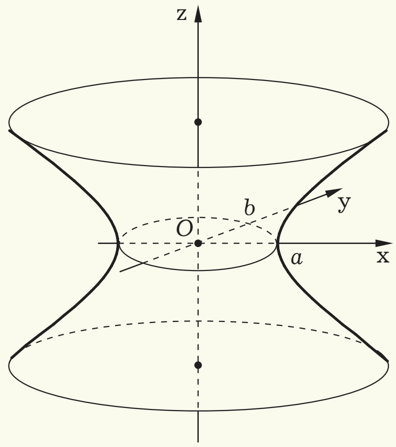


Рис. 9.9

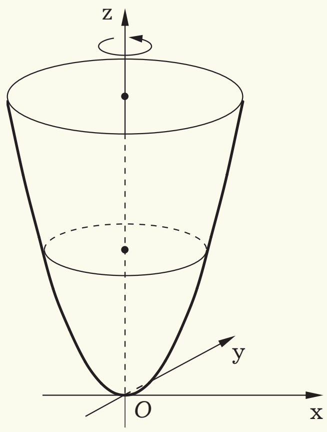


Рис. 9.10

Преобразование сжатия параболоида вращения к координатной плоскости xOz с *коэффициентом* k дает поверхность более общего вида — ***эллиптический параболоид***, уравнением которого будет $2pz = x^2 + k^2y^2$. После переобозначения параметров получаем ***каноническое уравнение эллиптического параболоида***

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{9.8}$$

Видим, что эллиптический параболоид является *поверхностью второго порядка*. При $a = b$ он превращается в параболоид вращения.

9.5. Конусы

При вращении прямой L, пересекающейся с осью вращения, образуется ***прямой круговой конус*** (рис. 9.11). Точка пересечения вращающейся прямой с осью вращения остается неподвижной, ее называют ***вершиной конуса***.

Как и ранее, уравнение будем выводить в *прямоугольной системе координат*, *ось* Oz которой совпадает с осью вращения, а *начало системы координат* — с вершиной конуса. Ось Ox расположим так, чтобы прямая L находилась в *координатной плоскости* xOz и описывалась уравнением $z = k_1x$. В этой системе координат уравнение *поверхности вращения* получается из уравнения прямой заменой x на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ (см. **9.1**). В результате такой замены получаем $z = \pm k_1\sqrt{x^2+y^2}$. Возведя уравнение в квадрат, придем к соотношению $z^2 = k_1^2(x^2+y^2)$, а разделив его на $c^2 = k_1^2a^2$, получим ***каноническое уравнение прямого кругового конуса*** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$.

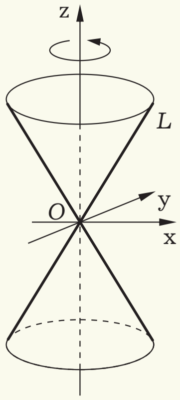


Рис. 9.11

Преобразование сжатия прямого кругового конуса к координатной плоскости xOz с *коэффициентом* k дает ***эллиптический конус***. Его уравнение имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{k^2y^2}{a^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, или, после переобозначения параметров,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}. \tag{9.9}$$

Уравнение (9.9) называют ***каноническим уравнением эллиптического конуса***. Эллиптический конус при $a = b$ совпадает с прямым круговым конусом, и оба они являются *поверхностями второго порядка.*

9.6. Цилиндрические поверхности

При вращении прямой вокруг некоторой оси, параллельной этой прямой, образуется поверхность, которую называют ***круговым цилиндром*** (рис. 9.12). Эта поверхность является частным случаем ***цилиндрической поверхности***, получающейся при движении прямой в пространстве, которая остается параллельной своему исходному положению (рис. 9.13). Если на движущейся прямой фиксировать точку, то она опишет кривую, которую называют ***направляющей цилиндрической поверхности*** (см. рис. 9.13). Можно также сказать, что цилиндрическая поверхность представляет собой множество точек прямых, параллельных фиксированной прямой. Эти параллельные прямые называют ***образующими цилиндрической поверхности***.

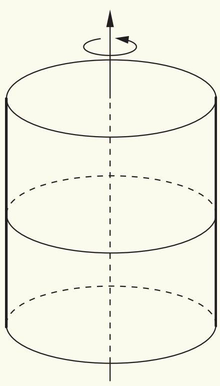


Рис. 9.12

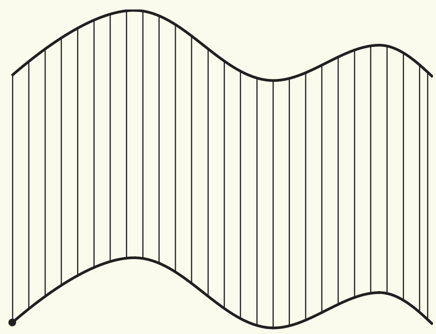


Рис. 9.13

В качестве направляющей цилиндра можно взять любую кривую, образованную пересечением цилиндрической поверхности с плоскостью, не параллельной образующим. Выберем *прямоугольную систему координат* так, чтобы образующие цилиндрической поверхности были параллельны *оси* Oz. В качестве направляющей выберем кривую, являющуюся пересечением цилиндрической поверхности с *координатной плоскостью* xOy (рис. 9.14).

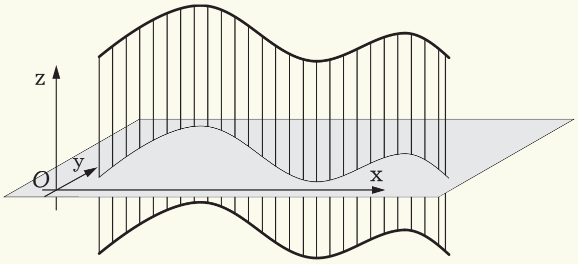


Рис. 9.14

Направляющая в плоскости xOy описывается некоторым уравнением $\varphi(x, y) = 0$ двух переменных. Точка $M(x; y; z)$ лежит на цилиндрической поверхности тогда и только тогда, когда ее *абсцисса* и *ордината* (фактически *координаты точки* $N(x; y; 0)$ на плоскости xOy) подчиняются уравнению направляющей. Поэтому в выбранной системе координат цилиндрическая поверхность описывается уравнением $\varphi(x, y) = 0$ — уравнением своей направляющей, которое трактуется как уравнение трех переменных x, y и z. Верно и обратное утверждение: если в некоторой прямоугольной системе координат в пространстве поверхность описывается уравнением, не содержащим одного из переменных, то эта поверхность является цилиндрической. Итак, критерием для цилиндрической поверхности является отсутствие в ее уравнении в подходящей системе координат одного из переменных.

Цилиндр второго порядка — это цилиндрическая поверхность, направляющая которой в плоскости, перпендикулярной образующим, представляет собой *кривую второго порядка*. В выбранной выше прямоугольной системе координат цилиндр второго порядка описывается *уравнением второй степени* $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

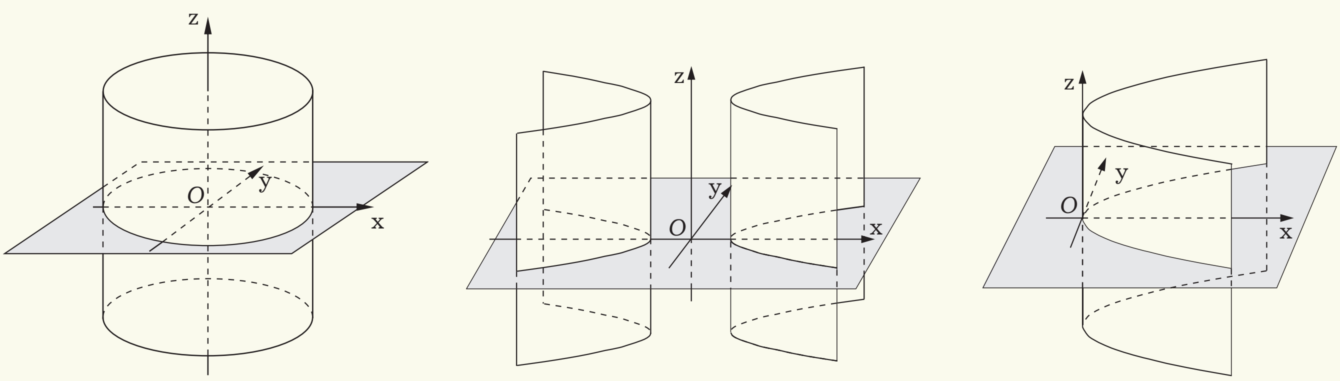
Это уравнение можно упростить подходящим выбором системы координат. Фактически речь идет о приведении к каноническому виду уравнений второго порядка от двух переменных (см. **8.3**). *Канонические уравнения* кривых второго порядка приводят к трем видам цилиндров второго порядка:

– ***эллиптическому*** (рис. 9.15, *а*) с каноническим уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

– ***гиперболическому*** (рис. 9.15, *б*) с каноническим уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

– ***параболическому*** с каноническим уравнением $y^2 = 2px$ (рис. 9.15, *в*).

Отметим, что если направляющей является пара пересекающихся (параллельных, совпадающих) прямых, то соответствующая им цилиндрическая поверхность представляют собой пару пересекающихся (параллельных, совпадающих) плоскостей.



а *б* *в*

Рис. 9.15

9.7. Метод сечений

Для выяснения формы поверхности в пространстве по ее уравнению

$$\Psi(x,y,z)=0 \tag{9.10}$$

часто используют так называемый ***метод сечений***. Он состоит в анализе пересечений поверхности с плоскостями, параллельными *координатным плоскостям*, например с плоскостями вида $z=c$, где параметр c пробегает все действительные значения. Для каждого значения c система уравнений

$$\begin{cases}\Psi(x,y,z)=0,\\ z=c\end{cases} \tag{9.11}$$

задает соответствующее пересечение. Критерием принадлежности точки $M(x;y;z)$ этому пересечению являются следующие условия: а) $z=c$; б) координаты x и y ее проекции на координатную плоскость xOy, т.е. координаты точки $N(x;y;0)$, удовлетворяют уравнению

$$\Psi(x,y,c)=0. \tag{9.12}$$

Зная эти пересечения, т.е. кривые (9.12), можно представить форму поверхности. Отметим, что указанный „рентген“ поверхности можно проводить другими плоскостями, но они должны быть параллельными между собой.

Обычно при исследовании формы поверхности методом сечений используют две точки зрения на уравнение (9.12). Первая состоит в том, что его интерпретируют как уравнение проекции на координатную плоскость xOy сечения (9.11). Согласно второй точке зрения предполагают, что в секущей плоскости имеется *прямоугольная система координат* с *началом* в точке O' пересечения секущей плоскости с *осью* Oz и осями, O'x и O'y, которые проектируются на соответствующие оси Ox и Oy системы координат Oxyz. Это позволяет говорить о (9.12) как об уравнении сечения (9.11) в секущей плоскости.

Пример 9.1. В качестве примера рассмотрим уравнение *эллиптического параболоида* (9.8) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ и исследуем его форму методом сечений.

Пересечение этой поверхности с плоскостью $z=c$ описывается уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2c$. При $c<0$ пересечение пусто, при $c=0$ оно совпадает с *началом системы координат* Oxyz, а при $c>0$ представляет собой *эллипс* $\dfrac{x^2}{(a\sqrt{2c})^2}+\dfrac{y^2}{(b\sqrt{2c})^2}=1$. *Оси* этого эллипса с ростом параметра c увеличиваются, и можно представить форму поверхности (рис. 9.16, *а*). Кстати,

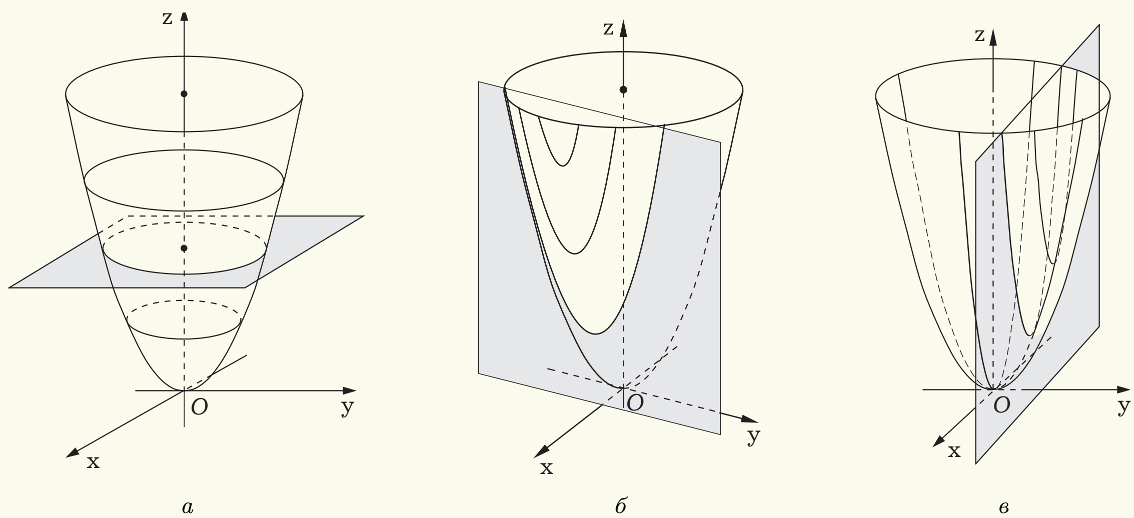
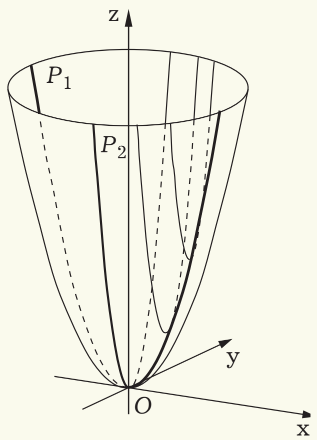


Рис. 9.16

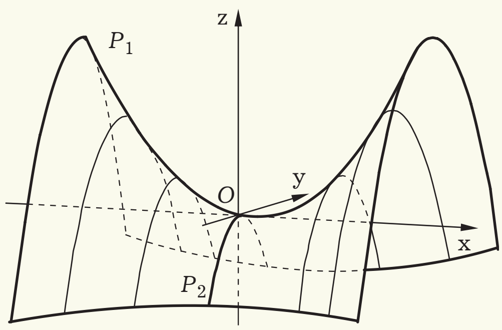
слово „эллиптический“ в названии поверхности и указывает на то, что среди ее сечений имеются эллипсы.

Пересечения этой же поверхности как с плоскостью $x = c$ (рис. 9.16, *б*), так и с плоскостью $y = c$ (рис. 9.16, *в*) представляют собой *параболы* $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ и $\frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} = 2z$ соответственно. Параболы в каждом из этих семейств сечений имеют равные параметры (они не зависят от значения c). Эти сечения позволяют дать еще одно геометрическое построение эллиптического параболоида. Рассмотрим параболу P_1, находящуюся в плоскости $y = 0$, и аналогичную параболу P_2 в плоскости $x = 0$ (рис. 9.17, *а*). Пусть вторая парабола P_2 перемещается в пространстве так, что:

– вершина параболы P_2 все время находится на параболе P_1;
– ось параболы P_2 параллельна оси параболы P_1;
– плоскость параболы P_2 перпендикулярна плоскости параболы P_1.



а



б

Рис. 9.17

Тогда в результате такого перемещения и образуется эллиптический параболоид. При этом роли парабол P_1 и P_2 можно поменять, т.е. перемещать параболу P_1, используя параболу P_2 как направляющую. #

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \tag{9.13}$$

отличается от уравнения (9.8) эллиптического параболоида лишь знаком одного слагаемого и тоже задает поверхность второго порядка. Ее называют ***гиперболическим параболоидом***, а само уравнение (9.13) — ***каноническим уравнением гиперболического параболоида***.

Исследуем вид гиперболического параболоида методом сечений. Его пересечения с плоскостями $y = c$ при любом значении c являются параболами:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{c^2}{b^2} = 2z.$$

Пересечения с плоскостями $x = c$ тоже при всех значениях c являются параболами:

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Обозначим через P_1 параболу, находящуюся в сечении $y = 0$, а через P_2 — аналогичную параболу в сечении $x = 0$. Перемещая, как и выше, параболу P_2 по параболе P_1 (см. рис. 9.17, *б*), получаем седлообразную поверхность гиперболического параболоида.

Пересечения гиперболического параболоида с плоскостями $z = c$ при $c \neq 0$ являются гиперболами

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2c,$$

а при $c = 0$ — парой пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Выбор названия поверхности объясняется характером сечений: горизонтальные сечения гиперболического параболоида — это гиперболы, а два других семейства рассмотренных сечений — параболы.

9.8. Неполные уравнения поверхности второго порядка

Поверхность второго порядка в пространстве в заданной *прямоугольной системе координат* описывается уравнением с десятью коэффициентами:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

причем среди первых шести коэффициентов, от A до F, должен быть хотя бы один ненулевой.

Мы, как и в случае кривых второго порядка, не будем проводить полную классификацию поверхностей второго порядка, отложив ее до изучения курса линейной алгебры.

В этом разделе мы рассмотрим случай неполного уравнения поверхности второго порядка, т.е. когда в уравнении отсутствуют попарные произведения переменных:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Kz + L = 0. \tag{9.14}$$

Такое уравнение второго порядка при помощи *параллельного переноса системы координат* и, возможно, *переобозначения переменных* можно преобразовать в одно из канонических уравнений поверхности второго порядка или в уравнение вырожденной поверхности второго порядка, хотя в некоторых особых случаях для упрощения уравнения параллельного переноса недостаточно.

Для преобразования уравнения (9.14) используют выделение полного квадрата по каждому из переменных, входящих в уравнение во второй и первой степени (см. **8.3**). При этом возможны три варианта.

1. В первом варианте уравнение (9.14) содержит квадраты всех трех переменных. Выделение полного квадрата по x (при $G \neq 0$), по y (при $H \neq 0$) и по z (при $K \neq 0$) преобразует уравнение (9.14) к виду

$$A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 + C(z - z_0)^2 = L', \tag{9.15}$$

где

$$x_0 = -\frac{G}{2A}, \quad y_0 = -\frac{H}{2B}, \quad z_0 = -\frac{K}{2C}, \quad L' = -L + \frac{G^2}{4A} + \frac{H^2}{4B} + \frac{K^2}{4C}.$$

Пусть в полученном уравнении (9.15) $L' \neq 0$. Тогда, введя обозначения $a^2 = |L'| \,/\, |A|$, $b^2 = |L'| \,/\, |B|$, $c^2 = |L'| \,/\, |C|$, придем к ***смещенному уравнению поверхности второго порядка***. В зависимости от знаков коэффициентов уравнения (9.15) это могут быть уравнения *эллипсоида*

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1, \tag{9.16}$$

однополостного гиперболоида

$$\begin{gathered}\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1,\quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1,\\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1,\end{gathered}\tag{9.17}$$

двуполостного гиперболоида

$$\begin{gathered}\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1,\quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1,\\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1\end{gathered}\tag{9.18}$$

или ***мнимого эллипсоида***

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1,$$

называемого так потому, что уравнение напоминает уравнение эллипсоида, но в отличие от последнего описывает пустое множество.

Если $L'=0$, то, вводя обозначения $a^2=1/|A|$, $b^2=1/|B|$, $c^2=1/|C|$, также приходим к смещенному уравнению поверхности второго порядка. В зависимости от знаков коэффициентов уравнения (9.15) это могут быть уравнения *конуса*

$$\begin{gathered}\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0,\quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0,\\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0\end{gathered}\tag{9.19}$$

или точки $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0.$

Замечание 9.1. После параллельного переноса системы координат

$$x'=x-x_0,\quad y'=y-y_0,\quad z'=z-z_0$$

в точку $O'(x_0;y_0;z_0)$ уравнение (9.16) и первые в тройках уравнений (9.17)–(9.19) в новых переменных примут канонический вид, в то время как остальные уравнения в (9.17)–(9.19) преобразуются к каноническому виду дополнительным переобозначением переменных в соответствующей *координатной плоскости.* Это переобозначение переменных важно с теоретической точки зрения, так как позволяет определить тип поверхности, хотя положение этой поверхности в системе координат $O'\mathrm{x}'\mathrm{y}'\mathrm{z}'$ принципиально иное, нежели в канонической системе координат (на рис. 9.18 приведены три варианта положения однополостного гиперболоида). На практике дополнительное изменение системы координат не реализуют и изображают поверхность в системе координат $O'\mathrm{x}'\mathrm{y}'\mathrm{z}'$, получающейся параллельным переносом. Переобозначение переменных рассматривают как чисто алгебраическую операцию, позволяющую выяснить положение поверхности относительно системы координат.

2. Во втором варианте уравнение (9.14) содержит квадраты двух переменных. Здесь выделяются три подварианта:

а) $A\ne 0$, $B\ne 0$, $C=0$;

б) $A\ne 0$, $B=0$, $C\ne 0$;

в) $A=0$, $B\ne 0$, $C\ne 0$.

Эти подварианты сводятся друг к другу переобозначением переменных. Поэтому они дают одни и те же результаты, и нам достаточно рассмотреть лишь один из них, например первый.

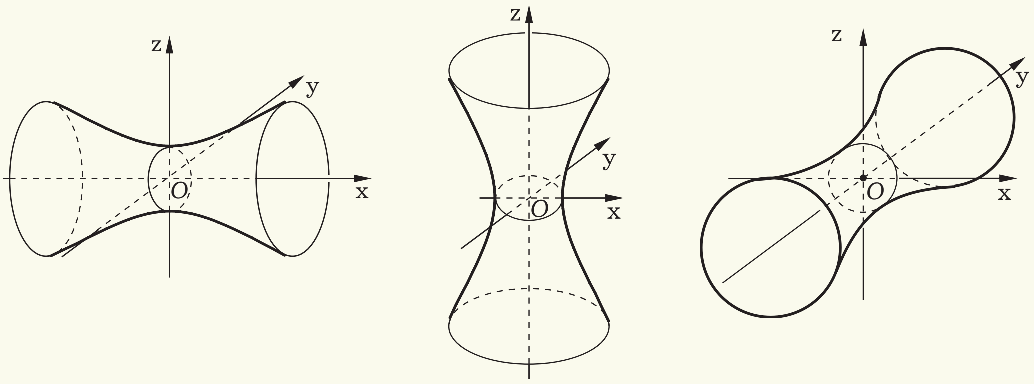


Рис. 9.18

Если $A \neq 0$, $B \neq 0$, а $C = 0$, то в случае $K = 0$ третье переменное z вообще не входит в уравнение (9.14), которое в этом случае является уравнением *цилиндра второго порядка*. Все возникающие ситуации и тип поверхности полностью характеризуются *направляющей цилиндра* в плоскости xOy (см. **8.3**).

В случае $K \neq 0$ выделение полного квадрата по x (при $G \neq 0$) и по y (при $H \neq 0$) преобразует уравнение (9.14) к виду

$$A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 = -K(z - z_0), \qquad (9.20)$$

где

$$x_0 = -\frac{G}{2A}, \quad y_0 = -\frac{H}{2B}, \quad z_0 = \frac{L'}{K}, \quad L' = -L + \frac{G^2}{4A} + \frac{H^2}{4B}.$$

Введя обозначения $a^2 = 1/|A|$, $b^2 = 1/|B|$, $p = |K|/2$, придем к смещенным уравнениям поверхности второго порядка. В зависимости от знаков коэффициентов в (9.20), это могут быть уравнения или *эллиптического параболоида*

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 2p(z - z_0), \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = -2p(z - z_0), \qquad (9.21)$$

или *гиперболического параболоида*

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 2p(z - z_0), \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = -2p(z - z_0). \qquad (9.22)$$

3. В третьем варианте уравнение (9.14) содержит квадрат только одного переменного. Здесь также возникают три симметричных подварианта (квадрат x, квадрат y, квадрат z). Остановимся на случае $A \neq 0$. Если уравнение не содержит или слагаемого с y в первой степени, или такого же слагаемого с z, то реализуется случай цилиндра второго порядка, который сводится к исследованию направляющей цилиндра. Если же в уравнении присутствуют оба указанных слагаемых первой степени, как, например, в уравнении $x^2 + y + 2z = 0$, то приведение уравнения к каноническому виду требует поворота системы координат в пространстве.

Пример 9.2. Упростим уравнение $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 36y + 72z + 40 = 0$ поверхности второго порядка с помощью параллельного переноса прямоугольной системы координат.

Уравнение содержит каждое из трех переменных в первой и во второй степени. Поэтому по каждому переменному выделяем полный квадрат:

$$4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) + 36(z^2 + 2z + 1 - 1) + 40 = 0,$$

$$4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 + 36(z + 1)^2 = 36, \quad \frac{(x - 1)^2}{3^2} + \frac{(y - 2)^2}{2^2} + (z + 1)^2 = 1.$$

Приходим к смещенному уравнению эллипсоида с центром в точке $O'(1;2;-1)$ и полуосями $a=3$, $b=2$, $c=1$. Соответствующее каноническое уравнение получается после параллельного переноса системы координат $x'=x-1$, $y'=y-2$, $z'=z+1$ и имеет вид

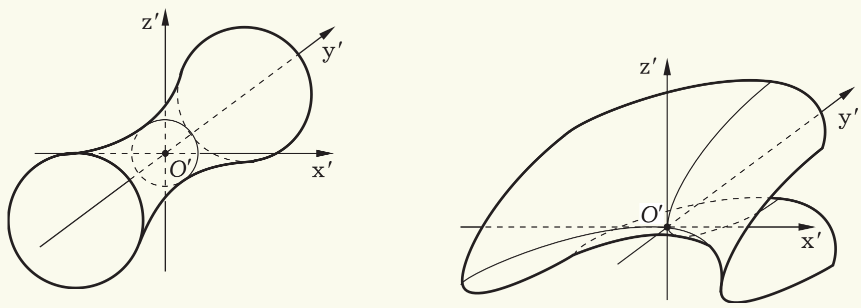
$$\frac{(x')^2}{3^2}+\frac{(y')^2}{2^2}+(z')^2=1.$$

Пример 9.3. Выясним, какая поверхность является *геометрическим образом* уравнения $x^2-y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$.

Как и в примере 9.2, по каждому переменному выделяем полный квадрат:

$$(x^2-2x+1-1)-(y^2-4y+4-4)+(z^2-2z+1-1)-3=0,$$

Приходим к смещенному уравнению однополостного гиперболоида вращения с центром в точке $O'(1;2;1)$. После параллельного переноса системы координат в эту точку $x'=x-1$, $y'=y-2$, $z'=z-1$ уравнение принимает вид $(x')^2-(y')^2+(z')^2=1$. Это уравнение не является каноническим из-за несоответствия знаков. Осью вращения гиперболоида является ось $O'y'$ новой системы координат (рис. 9.19, *а*).



а *б*

Рис. 9.19

Пример 9.4. Выясним, какую поверхность определяет уравнение второго порядка x^2-4z^2+ $+8y+8z-12=0$. В уравнении нет слагаемого x первой степени и слагаемого y второй степени. Полный квадрат выделяем только по переменному z:

$$x^2-4(z^2-2z+1-1)+8y-12=0,\quad x^2-4(z-1)^2+8y-8=0,$$
$$x^2-4(z-1)^2=-8(y-1),\quad \frac{x^2}{2^2}-(z-1)^2=-2(y-1).$$

Приходим к смещенному уравнению гиперболического параболоида. Выполнив параллельный перенос системы координат $x'=x$, $y'=y-1$, $z'=z-1$ в точку $O'(0;1;1)$, получим уравнение

$$\frac{(x')^2}{2^2}-(z')^2=-2y',$$

которое может быть преобразовано в каноническое дополнительным переобозначением переменных (рис. 9.19, *б*).

Замечание 9.2. Для определения вида поверхности и построения ее в новой системе координат (после параллельного переноса) можно использовать *метод сечений*. Конечно, если, как в примере 9.2, уравнение поверхности имеет канонический вид, то можно воспользоваться приведенным выше выводом канонических уравнений поверхностей второго порядка. Однако в примерах 9.3, 9.4 (см. рис. 9.19, *а*, *б*) ситуация сложнее, и использование метода сечений представляется целесообразным для исключения ошибок.

ОГЛАВЛЕНИЕ