

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект лекций

Для студентов всех специальностей

Москва
2009

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Лекция 5

ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Различные виды уравнения плоскости в пространстве: общее уравнение плоскости; уравнение плоскости, проходящей через три точки; уравнение плоскости „в отрезках“. *Связка плоскостей. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.

5.1. Алгебраические поверхности первого порядка

Уравнение первого порядка с тремя неизвестными имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, причем хотя бы один из коэффициентов A, B, C должен быть отличен от нуля. Оно задает в пространстве в *прямоугольной системе координат* *Охуз* алгебраическую поверхность первого порядка.

Свойства алгебраической поверхности первого порядка во многом аналогичны свойствам прямой на плоскости — *геометрическому образу уравнения первого порядка с двумя неизвестными*.

Теорема 5.1. Любая плоскость в пространстве является поверхностью первого порядка и любая поверхность первого порядка в пространстве есть плоскость.

◀ Как утверждение теоремы, так и ее доказательство аналогичны теореме 4.1. Действительно, пусть плоскость π задана своей точкой M_0 и *ненулевым вектором* $\mathbf{n}$, который ей перпендикулярен. Тогда множество всех точек в пространстве разбивается на три подмножества. Первое состоит из точек, принадлежащих плоскости, а два других — из точек, расположенных по одну и по другую стороны плоскости. Какому из этих множеств принадлежит произвольная точка M пространства, зависит от знака *скалярного произведения* $\mathbf{n} \overrightarrow{M_0M}$. Если точка M принадлежит плоскости (рис. 5.1, а), то *угол между векторами* $\mathbf{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ прямой, и поэтому, согласно теореме 2.7, их скалярное произведение равно нулю:

$$\mathbf{n} \overrightarrow{M_0M} = 0. \quad (5.1)$$

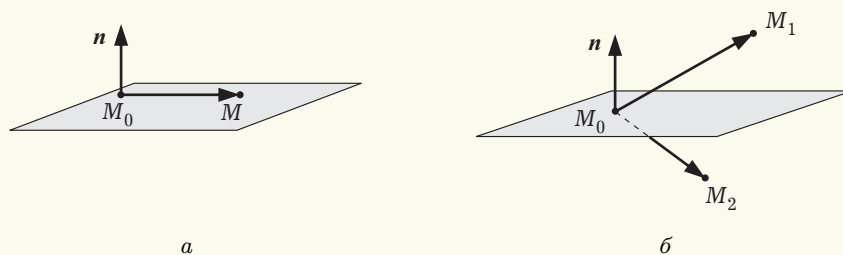


Рис. 5.1

Если же точка M не принадлежит плоскости, то угол между векторами $\mathbf{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ острый или тупой, и поэтому $\mathbf{n} \overrightarrow{M_0M} > 0$ или $\mathbf{n} \overrightarrow{M_0M} < 0$ соответственно (см. доказательство теоремы 2.7), причем знак этого скалярного произведения один и тот же для всех точек, расположенных по одну сторону от плоскости (рис. 5.1, б).

Обозначим координаты точек M_0 , M и вектора $\mathbf{n}$ через $(x_0; y_0; z_0)$, $(x; y; z)$ и $\{A; B; C\}$ соответственно. Так как $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$, то, записывая скалярное произведение из (5.1) в координатной форме (2.14) как сумму попарных произведений одноименных координат векторов $\mathbf{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$, получаем условие принадлежности точки M рассматриваемой плоскости в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (5.2)$$

Раскрытие скобок дает уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (5.3)$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ и хотя бы один из коэффициентов A , B , или C отличен от нуля, так как вектор $\mathbf{n} = \{A; B; C\}$ ненулевой. Это означает, что плоскость является геометрическим образом уравнения (5.3), т.е. алгебраической поверхностью первого порядка.

Проведя изложенное доказательство первого утверждения теоремы в обратном порядке, мы докажем, что геометрическим образом уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, является плоскость. Выберем три числа $(x = x_0, y = y_0, z = z_0)$, удовлетворяющих этому уравнению. Такие числа существуют. Например, при $A \neq 0$ можно положить $y_0 = 0, z_0 = 0$ и тогда $x_0 = -D/A$. Выбранным числам соответствует точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащая геометрическому образу заданного уравнения. Из равенства $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ следует, что $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Подставляя это выражение в рассматриваемое уравнение, получаем $Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$, что равносильно (5.2). Равенство (5.2) можно рассматривать как критерий ортогональности векторов $\mathbf{n} = \{A; B; C\}$ и $\overrightarrow{M_0M}$, где точка M имеет координаты $(x; y; z)$. Этот критерий выполнен для точек плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\mathbf{n} = \{A; B; C\}$, и не выполнен для остальных точек пространства. Значит, уравнение (5.2) есть уравнение указанной плоскости. ►

Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ называют **общим уравнением плоскости**. Коэффициенты A, B, C при неизвестных в этом уравнении имеют наглядный геометрический смысл: вектор $\mathbf{n} = \{A; B; C\}$ перпендикулярен плоскости. Его называют **нормальным вектором плоскости**. Он, как и общее уравнение плоскости, определяется с точностью до (ненулевого) числового множителя.

По известным координатам точки, принадлежащей некоторой плоскости, и ненулевого вектора, перпендикулярного ей, с помощью (5.2) уравнение плоскости записывается без каких-либо вычислений.

Пример 5.1. Найдем общее уравнение плоскости, перпендикулярной радиус-вектору точки $A(2; 5; 7)$ и проходящей через точку $M_0(3; -4; 1)$.

Поскольку ненулевой вектор $\overrightarrow{OA} = \{2; 5; 7\}$ перпендикулярен искомой плоскости, то ее уравнение типа (5.2) имеет вид $2(x - 3) + 5(y + 4) + 7(z - 1) = 0$. Раскрывая скобки, получаем искомое общее уравнение плоскости $2x + 5y + 7z + 7 = 0$.

5.2. Специальные виды уравнения плоскости

Векторное и параметрические уравнения плоскости. Пусть $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$ — радиус-векторы точек M_0 и M соответственно. Тогда $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, и условие (5.1) принадлежности точки M плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно ненулевому вектору $\mathbf{n}$ (рис. 5.2, а), можно записать с помощью скалярного произведения в виде соотношения

$$\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \quad (5.4)$$

которое называют **векторным уравнением плоскости**.

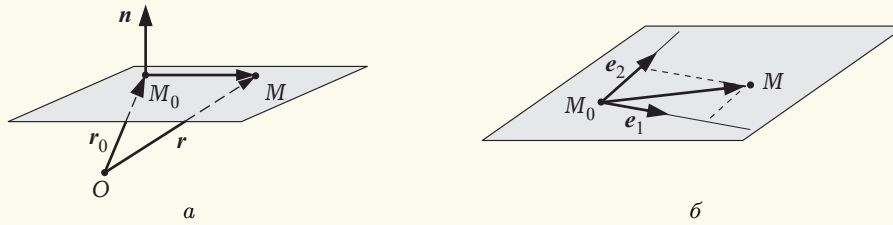


Рис. 5.2

Фиксированной плоскости в пространстве соответствует множество параллельных ей векторов, т.е. *пространство* V_2 . Выберем в этом пространстве *базис* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, т.е. пару неколлинеарных векторов, параллельных рассматриваемой плоскости, и точку M_0 на плоскости. Если точка M принадлежит плоскости, то это эквивалентно тому, что ей параллелен вектор $\overrightarrow{M_0M}$ (рис. 5.2, б), т.е. он принадлежит указанному пространству V_2 . Это означает, что существует *разложение вектора* $\overrightarrow{M_0M}$ *в базисе* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, т.е. существуют такие числа t_1 и t_2 , для которых $\overrightarrow{M_0M} = t_1\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2$. Записав левую часть этого уравнения через радиус-векторы $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$ точек M_0 и M соответственно, получаем **векторное параметрическое уравнение плоскости**

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t_1\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

Чтобы перейти от равенства векторов в (5.5) к равенству их *координат*, обозначим через $(x_0; y_0; z_0)$, $(x; y; z)$ *координаты точек* M_0, M и через $\{e_{1x}; e_{1y}; e_{1z}\}$, $\{e_{2x}; e_{2y}; e_{2z}\}$ координаты векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Приравнявая одноименные координаты векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0 + t_1\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2$, получаем **параметрические уравнения плоскости**

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1e_{1x} + t_2e_{2x}, \\ y = y_0 + t_1e_{1y} + t_2e_{2y}, \\ z = z_0 + t_1e_{1z} + t_2e_{2z}. \end{cases} \quad (5.6)$$

Плоскость, проходящая через три точки. Предположим, что три точки M_1, M_2 и M_3 не лежат на одной прямой. Тогда существует единственная плоскость π , которой эти точки принадлежат. Найдем уравнение этой плоскости, сформулировав критерий принадлежности произвольной точки M данной плоскости π . Затем запишем этот критерий через координаты точек. Указанным критерием является описание плоскости π как множества тех точек M , для которых векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ и $\overrightarrow{M_1M}$ *компланарны*. Критерием компланарности трех векторов является равенство нулю их *смешанного произведения* (см. 3.2). Смешанное произведение вычисляется с помощью *определителя третьего порядка*, строками которого являются координаты векторов в *ортонормированном базисе*. Поэтому, если $(x_i; y_i; z_i)$ — координаты точек M_i , $i = 1, 2, 3$, а $(x; y; z)$ — координаты точки M , то $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$ и условие равенства нулю смешанного произведения этих векторов имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.7)$$

Вычислив определитель, получим *линейное относительно x, y, z уравнение*, являющееся *общим уравнением* искомой плоскости. Например, если *разложить определитель по 1-й строке*, то получим

$$\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} (x - x_1) - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} (y - y_1) + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} (z - z_1) = 0.$$

Это равенство после вычисления определителей и раскрытия скобок преобразуется к общему уравнению плоскости.

Отметим, что коэффициенты при переменных в последнем уравнении совпадают с координатами *векторного произведения* $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$. Это векторное произведение, будучи произведением двух неколлинеарных векторов, параллельных плоскости π , дает ненулевой вектор, перпендикулярный π , т.е. ее *нормальный вектор*. Так что появление координат векторного произведения в качестве коэффициентов общего уравнения плоскости вполне закономерно.

Рассмотрим следующий частный случай плоскости, проходящей через три точки. Точки $M_1(a; 0; 0)$, $M_2(0; b; 0)$, $M_3(0; 0; c)$, $abc \neq 0$, не лежат на одной прямой и задают плоскость, которая отсекает на осях координат отрезки ненулевой длины (рис. 5.3). Здесь под „длинами отрезков“ понимают значение ненулевых координат радиус-векторов точек M_i , $i = 1, 2, 3$.

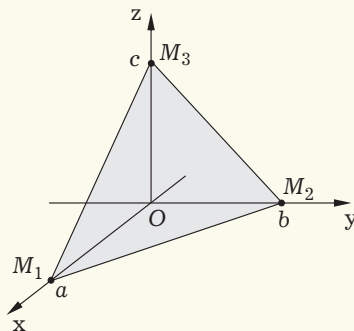


Рис. 5.3

Поскольку $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-a; b; 0\}$, $\overrightarrow{M_1M_3} = \{-a; 0; c\}$, $\overrightarrow{M_1M} = (x-a; y; z)$, то уравнение (5.7) принимает вид

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель, найдем $bc(x-a) + acy + abz = 0$, разделим полученное уравнение на abc и перенесем свободный член в правую часть,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Это уравнение называют **уравнением плоскости в отрезках**.

Пример 5.2. Найдем общее уравнение плоскости, которая проходит через точку с координатами $(1; 1; 2)$ и отсекает от осей координат отрезки одинаковой длины.

Уравнение плоскости в отрезках при условии, что она отсекает от осей координат отрезки равной длины, скажем $a \neq 0$, имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$. Этому уравнению должны удовлетворять координаты $(1; 1; 2)$ известной точки на плоскости, т.е. выполняется равенство $4/a = 1$. Поэтому $a = 4$ и искомым уравнением является $x + y + z - 4 = 0$.

Нормальное уравнение плоскости. Рассмотрим некоторую плоскость π в пространстве. Фиксируем для нее *единичный нормальный вектор* $\mathbf{n}$, направленный из *начала координат* „в сторону плоскости“, и обозначим через p расстояние от начала O системы координат до плоскости π (рис. 5.4). Если плоскость проходит через начало системы координат, то $p = 0$, а в качестве направления для нормального вектора $\mathbf{n}$ можно выбрать любое из двух возможных.

Если точка M принадлежит плоскости π , то это эквивалентно тому, что *ортогональная проекция вектора* $\overrightarrow{OM}$ *на направление вектора* $\mathbf{n}$ *равна* p , т.е. выполнено условие $\mathbf{n} \overrightarrow{OM} = \text{пр}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{OM} = p$, так как *длина вектора* $\mathbf{n}$ *равна единице*.

Обозначим координаты точки M через $(x; y; z)$ и пусть $\mathbf{n} = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$ (напомним, что для единичного вектора $\mathbf{n}$ его *направляющие косинусы* $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ одновременно являются и его координатами). Записывая скалярное произведение в равенстве $\mathbf{n} \overrightarrow{OM} = p$ в координатной форме, получаем **нормальное уравнение плоскости**

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

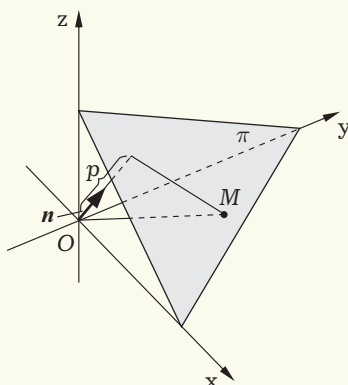


Рис. 5.4

Аналогично случаю прямой на плоскости, общее уравнение плоскости в пространстве можно преобразовать в ее нормальное уравнение делением на нормирующий множитель.

Для уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ нормирующим множителем является число $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, знак которого выбирается противоположным знаком D . По абсолютной величине нормирующий множитель представляет собой длину нормального вектора $\{A; B; C\}$ плоскости, а знак соответствует нужному направлению единичного нормального вектора плоскости. Если плоскость проходит через начало системы координат, т.е. $D = 0$, то знак нормирующего множителя можно выбрать любым.

5.3. Расстояние от точки до плоскости

Рассмотрим в пространстве некоторую плоскость π и произвольную точку M_0 . Выберем для плоскости *единичный нормальный вектор* $\mathbf{n}$ с началом в некоторой точке $M_1 \in \pi$, и пусть $\rho(M_0, \pi)$ — расстояние от точки M_0 до плоскости π . Тогда (рис. 5.5)

$$\rho(M_0, \pi) = |\text{пр}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{M_1 M_0}| = |\mathbf{n} \overrightarrow{M_1 M_0}|, \quad (5.8)$$

так как $|\mathbf{n}| = 1$.

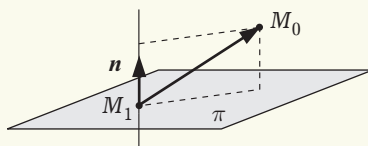


Рис. 5.5

Если плоскость π задана в *прямоугольной системе координат* своим *общим уравнением* $Ax + By + Cz + D = 0$, то ее нормальным вектором является вектор с координатами $\{A; B; C\}$ и в качестве единичного нормального вектора можно выбрать

$$\mathbf{n} = \frac{\{A; B; C\}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пусть $(x_0; y_0; z_0)$ и $(x_1; y_1; z_1)$ — *координаты точек* M_0 и M_1 . Тогда выполнено равенство $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, так как точка M_1 принадлежит плоскости, и можно найти координаты вектора $\overrightarrow{M_1 M_0}$: $\overrightarrow{M_1 M_0} = \{x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1\}$. Записывая *скалярное произведение* $\mathbf{n} \overrightarrow{M_1 M_0}$ в координатной форме и преобразуя (5.8), получаем

$$\begin{aligned} \rho(M, \pi) &= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned}$$

поскольку $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$. Итак, чтобы вычислить расстояние от точки до плоскости нужно подставить координаты точки в общее уравнение плоскости, а затем абсолютную величину результата разделить на нормирующий множитель, равный длине соответствующего нормального вектора.

5.4. Взаимное расположение плоскостей

Пусть даны две плоскости, заданные в *прямоугольной системе координат* своими общими уравнениями, π_1 : $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, π_2 : $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Один из двух углов между этими плоскостями (обозначим его через φ) равен *углу между их нормальными векторами* $\mathbf{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ (рис. 5.6), а другой угол равен $\pi - \varphi$.

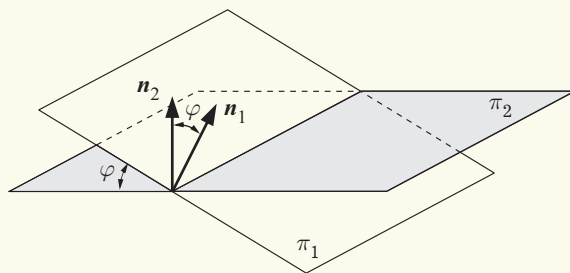


Рис. 5.6

Поэтому, согласно определению 2.3 *скалярного произведения*,

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Если две данные плоскости перпендикулярны, то это эквивалентно тому, что их нормальные векторы *ортогональны*. Критерием ортогональности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения (см. теорему 2.7). Поскольку скалярное произведение двух векторов, заданных в координатах, вычисляется как сумма произведений их одноименных координат, критерием перпендикулярности плоскостей π_1 и π_2 является выполнение равенства

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Аналогично две плоскости параллельны, если их нормальные векторы *коллинеарны*. Критерием же коллинеарности двух векторов является равенство отношений их координат (см. следствие 2.1). Поэтому условие параллельности двух плоскостей записывается в виде двойного равенства

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Замечание 5.1. Это двойное равенство имеет смысл и в том случае, когда в знаменателе одной из дробей стоит нуль. Это значит, что и в числителе той же дроби стоит нуль. #

Параллельные плоскости могут совпадать или быть различными. Левые части общих уравнений совпадающих плоскостей отличаются на ненулевой числовой множитель, и это можно записать как равенство отношений соответствующих коэффициентов их уравнений:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Случай же

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

соответствует тому, что плоскости параллельны, но не совпадают.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 5. Плоскость в пространстве	45
5.1. Алгебраические поверхности первого порядка	45
5.2. Специальные виды уравнения плоскости	46
5.3. Расстояние от точки до плоскости	49
5.4. Взаимное расположение плоскостей	50