

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект лекций

Для студентов всех специальностей

Москва
2009

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Лекция 4

ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Декартова прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Радиус-вектор точки, координаты точки; связь координат вектора с координатами его начала и конца. Простейшие задачи аналитической геометрии: вычисление длины отрезка, деление отрезка в данном отношении. Геометрический смысл уравнения $f(x, y) = 0$ на плоскости и $F(x, y, z) = 0$ в пространстве. Различные виды уравнения прямой на плоскости: общее уравнение, параметрические уравнения, каноническое уравнение, уравнение прямой с угловым коэффициентом, уравнение прямой „в отрезках“. Нормальный и направляющий векторы прямой. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Вычисление угла между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

В основе аналитической геометрии лежит возможность однозначного описания точек при помощи наборов чисел, называемых координатами. Описание множества с помощью соотношений между координатами входящих в него точек позволяет привлечь для его исследования алгебраические методы, что значительно расширяет возможности анализа. Наоборот, уравнения, неравенства и их системы можно интерпретировать как зависимости между координатами точек и ассоциировать с ними множество, составленное из точек, координаты которых удовлетворяют этим зависимостям, и, следовательно, получить наглядное представление чисто алгебраической задачи (например, в случае поиска решений уравнений и их систем). Таким образом, возникает своеобразный мостик, связывающий алгебру и геометрию. Его роль выполняет система координат.

4.1. Декартова система координат

Существуют различные способы задания точек набором координат. Аналитическая геометрия опирается на простейшую систему координат — прямоугольную, которая известна из школьного курса математики. Мы дадим определение прямоугольной системы координат, используя *векторную алгебру*. Фактически мы построим систему координат более общего вида, в которой оси координат могут находиться по отношению друг к другу под произвольным углом. Прямоугольная система координат будет частным случаем, когда углы между осями координат будут прямыми.

Назовем **декартовой (аффинной) системой координат** пару, состоящую из фиксированной точки O и некоторого базиса. Соответственно трем пространствам V_1, V_2, V_3 получаем три варианта декартовой системы координат: на прямой, на плоскости и в пространстве. **Декартовыми (аффинными) координатами** произвольной точки M являются координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в заданном базисе.

С декартовой системой координат связаны следующие понятия:

- **начало (системы) координат** — точка O в составе декартовой системы координат;
- **репер** — базис в составе декартовой системы координат, для векторов которого выбирается общая точка приложения в начале координат;
- **оси координат** (координатные оси) — прямые, на которых лежат векторы репера, задающие направление на этих прямых. Оси имеют специальные названия (в порядке нумерации): **ось абсцисс**, **ось ординат** и **ось аппликат**. Координаты точки именуются по осям: **абс-**

цисса, ордината и аппликата. На плоскости отсутствует ось аппликата, на прямой также нет оси ординат.

- **координатные плоскости** — плоскости, определяемые парами векторов репера. Понятие используется для декартовой системы координат в пространстве;
- **радиус-вектор** точки M — вектор $\overrightarrow{OM}$, соединяющий начало координат O с этой точкой.

Декартову систему координат общего вида часто называют **косоугольной системой координат**.

Если репер декартовой системы координат является **ортонормированным базисом**, то такую систему координат называют **декартовой прямоугольной системой координат**, или просто **прямоугольной системой координат**, а декартовы координаты точки — ее **прямоугольными координатами**.

Далее будем использовать в основном прямоугольные системы координат, т.е. будем предполагать, что репер представляет собой ортонормированный базис, причем обязательно **правый**. Отметим, что базис в V_2 (т.е. на плоскости) называют **правым (левым)**, если первый его вектор совмещается со вторым с помощью кратчайшего поворота против хода (по ходу) часовой стрелки.

Итак, под **системой координат** подразумевается прямоугольная система координат с правым базисом, а под **координатами точки** — ее прямоугольные координаты. Для обозначения декартовых систем координат, например в пространстве, будем использовать обозначения типа $Oijk$, где O — начало системы координат, а i, j, k — ортонормированный репер (базис), или $Oxyz$, где указаны обозначения для координатных осей.

4.2. Преобразование прямоугольных координат

Все **прямоугольные системы координат** в изучаемом пространстве, вообще говоря, равноправны, т.е. выбор одной из них ничуть не хуже (и не лучше) выбора другой. Те или иные предпочтения отдают исходя из особенностей конкретной задачи. Использование различных систем координат ставит задачу преобразования **координат точки**, т.е. задачу вычисления ее координат в одной системе координат по ее координатам в другой системе.

Пусть $Oijk$ — некоторая прямоугольная система координат в пространстве, которую мы условно назовем старой, а $O'i'j'k'$ — вторая прямоугольная система координат, которую будем называть новой (рис. 4.1). Считаем, что известны **координаты точки** $O'(b_1; b_2; b_3)$ и **векторов** $i' = \{\alpha_{11}; \alpha_{21}; \alpha_{31}\}$, $j' = \{\alpha_{12}; \alpha_{22}; \alpha_{32}\}$, $k' = \{\alpha_{13}; \alpha_{23}; \alpha_{33}\}$ в старой системе координат. Пусть для точки M известны ее координаты $(x; y; z)$ в старой и координаты $(x'; y'; z')$ в новой системах координат. Это значит, что выполняются два равенства $\overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ и

$$\overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad (4.1)$$

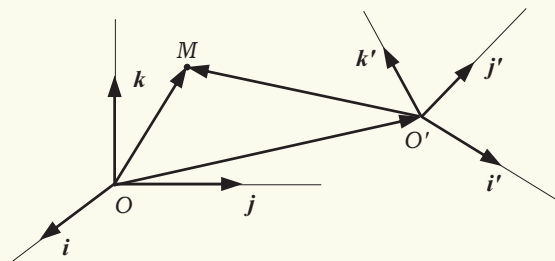


Рис. 4.1

Векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{O'M}$ связаны соотношением $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, причем координаты вектора $\overrightarrow{OO'}$ являются также координатами **начала координат** O' новой системы координат относи-

тельно старой, т.е. $\overrightarrow{OO'} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Поэтому

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} + x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' = \\ &= b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} + x'(\alpha_{11}\mathbf{i} + \alpha_{21}\mathbf{j} + \alpha_{31}\mathbf{k}) + y'(\alpha_{12}\mathbf{i} + \alpha_{22}\mathbf{j} + \alpha_{32}\mathbf{k}) + z'(\alpha_{13}\mathbf{i} + \alpha_{23}\mathbf{j} + \alpha_{33}\mathbf{k}) = \\ &= (\alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z' + b_1)\mathbf{i} + (\alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z' + b_2)\mathbf{j} + (\alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' + b_3)\mathbf{k}, \quad (4.2)\end{aligned}$$

т.е. получено *разложение вектора* $\overrightarrow{OM}$ в репере старой системы координат. Оно должно совпадать с (4.1) в силу единственности координат вектора в одном и том же *базисе*. Приравнявая соответствующие *коэффициенты разложений* в (4.1) и (4.2), получаем

$$\begin{aligned}x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z' + b_1, \\ y &= \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z' + b_2, \\ z &= \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' + b_3.\end{aligned} \quad (4.3)$$

Соотношения (4.3), выражающие старые координаты через новые, представляют собой *систему трех линейных уравнений* относительно неизвестных x', y', z' . Чтобы найти новые координаты x', y', z' по известным старым, необходимо решить эту систему относительно новых координат. Система (4.3) при любых x, y, z имеет единственное решение, поскольку ее определитель отличен от нуля. Это следует из того, что выполнены равенства

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \mathbf{i}'\mathbf{j}'\mathbf{k}' = 1,$$

так как векторы $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ образуют *правый ортонормированный базис* и объем построенного на них параллелепипеда равен 1.

Набор коэффициентов α_{ij} в системе (4.3) отражает положение репера новой системы координат, а свободные члены b_1, b_2, b_3 характеризуют изменение начала координат. Если репер системы координат не изменился, а поменялось лишь начало координат, то формулы преобразования выглядят более просто:

$$\begin{aligned}x &= x' + b_1, \\ y &= y' + b_2, \\ z &= z' + b_3.\end{aligned} \quad (4.4)$$

Преобразование (4.4) называют *параллельным переносом системы координат в пространстве* на вектор $\overrightarrow{OO'}$.

Все вышеизложенное относится к прямоугольной системе координат в пространстве. Прямоугольная система координат на плоскости отличается от пространственной лишь тем, что репер состоит из двух векторов, а точки имеют всего две координаты. Преобразование системы координат на плоскости описывается уравнениями

$$\begin{aligned}x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + b_1, \\ y &= \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + b_2,\end{aligned} \quad (4.5)$$

где $\{\alpha_{1i}; \alpha_{2i}\}$, $i = 1, 2$, — координаты векторов $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$ нового репера относительно старого $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, а $(b_1; b_2)$ — координаты точки O' начала новой системы координат в старой системе координат.

Преобразование *параллельного переноса системы координат на плоскости* выглядит так:

$$\begin{aligned}x &= x' + b_1, \\ y &= y' + b_2.\end{aligned}$$

Если начала новой и старой систем координат на плоскости совпадают, а изменяется лишь репер системы координат, то формулы преобразования координат имеют вид:

$$\begin{aligned}x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y', \\y &= \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y'.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Здесь возможны два случая. В первом из них новый репер может быть получен из старого поворотом последнего на некоторый угол φ вокруг общего начала систем координат, причем полагают, что $\varphi > 0$ ($\varphi < 0$) при повороте против хода (по ходу) часовой стрелки. В этом случае преобразование (4.6) называют **поворотом системы координат на плоскости** на угол φ . Нетрудно убедиться, что координаты векторов $\mathbf{i}'$ и $\mathbf{j}'$ нового репера относительно старого выражаются через угол поворота φ : $\mathbf{i}' = \{\cos \varphi; \sin \varphi\}$, $\mathbf{j}' = \{-\sin \varphi; \cos \varphi\}$ (рис. 4.2).

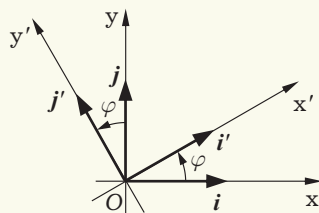


Рис. 4.2

Зная координаты векторов нового репера относительно старого, мы можем записать уравнения для поворота системы координат на плоскости:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Если преобразование состоит в последовательном выполнении поворота и параллельного переноса, то оно имеет вид:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi + b_1, \\y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi + b_2.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Система (4.8) легко решается относительно x' , y' , и обратное преобразование координат, отражающее переход от новой системы координат к старой, будет иметь вид:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi + b'_1, \\y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi + b'_2,\end{aligned}$$

где $b'_1 = b_1 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi$, $b'_2 = -b_1 \sin \varphi + b_2 \cos \varphi$. Как видим, старая система координат получается из новой с помощью поворота на тот же угол φ , но в противоположную сторону (на угол $-\varphi$ в положительном направлении), и параллельного переноса (на вектор $\overrightarrow{O'O}$).

Во втором случае с помощью поворота старого репера вокруг начала координат на некоторый угол φ можно совместить лишь векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{i}'$, но при этом векторы $\mathbf{j}$ и $\mathbf{j}'$ окажутся противоположными и для их совмещения потребуется выполнение преобразования зеркального отражения плоскости относительно первой оси координат.

В первом случае два репера имеют *одинаковую ориентацию*, а во втором — *противоположную*.

Аналогичную терминологию используют и для пространства. Если начало новой и старой прямоугольных систем координат в пространстве совпадают и изменяется лишь репер системы координат, то формулы преобразования координат имеют вид:

$$\begin{cases}x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z', \\y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z', \\z = \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z'.\end{cases}\quad (4.9)$$

Преобразование (4.9) называют **поворотом системы координат в пространстве**, если реперы новой и старой систем координат имеют одинаковую ориентацию, т.е. являются оба правыми или левыми. Как и в случае плоскости, это связано с тем, что реперы с одинаковой ориентацией можно совмещать с помощью поворотов. Например, можно сначала совместить векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{i}'$ с помощью поворота старого репера вокруг вектора $\mathbf{i} \times \mathbf{i}'$, а затем выполнить второй поворот вокруг вектора $\mathbf{i}'$ для совмещения повернутого вектора $\mathbf{j}$ с вектором $\mathbf{j}'$. При этом векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ автоматически совпадут для реперов одной ориентации и будут противоположными для реперов противоположной ориентации. В последнем варианте требуется, как и в случае плоскости, выполнение дополнительного преобразования зеркального отражения (относительно координатной плоскости, определяемой векторами $\mathbf{i}'$ и $\mathbf{j}'$).

4.3. Простейшие задачи аналитической геометрии

Рассмотрим некоторые задачи аналитической геометрии, связанные со взаимным расположением точек на плоскости или в пространстве.

Векторы и точки. Задача состоит в том, чтобы выразить *координаты вектора* через *координаты его начала и конца*.

Рассмотрим в пространстве *прямоугольную систему координат* с *началом системы координат* в точке O и вектор $\overrightarrow{AB}$, у которого известны координаты его *начала* $A(x_a; y_a; z_a)$ и *конца* $B(x_b; y_b; z_b)$. Определим координаты $\{l; m; n\}$ вектора $\overrightarrow{AB}$. Координаты точек A и B представляют собой координаты их *радиус-векторов* $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Следовательно, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \{x_b - x_a; y_b - y_a; z_b - z_a\}$ и из соотношения $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ заключаем, что $\{l; m; n\} = \{x_b - x_a; y_b - y_a; z_b - z_a\}$, т.е.

$$l = x_b - x_a, \quad m = y_b - y_a, \quad n = z_b - z_a. \quad (4.10)$$

В случае *прямоугольной системы координат* на плоскости координаты вектора $\overrightarrow{AB} = \{l; m\}$ на этой плоскости и координаты точек его начала $A(x_a; y_a)$ и конца $B(x_b; y_b)$ связаны аналогичными соотношениями

$$l = x_b - x_a, \quad m = y_b - y_a. \quad (4.11)$$

Из (4.10) и (4.11) вытекают правила:

- координаты вектора получают вычитанием из координат его конца координат его начала;
- координаты конца вектора получают сложением координат вектора с координатами его начала;
- координаты начала вектора получают вычитанием из координат его конца координат вектора.

Деление отрезка в заданном отношении. Задача состоит в том, чтобы на данном отрезке M_1M_2 найти точку M , делящую отрезок в заданном отношении: $|M_1M| : |MM_2| = p : q$.

Для точки M из отрезка M_1M_2 векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ коллинеарны и однонаправлены (рис. 4.3). Следовательно, один из них может быть получен из другого умножением на положительное число. Пусть, например, $\overrightarrow{MM_2} = \lambda \overrightarrow{M_1M}$. Число λ равно отношению длин отрезков MM_2 и M_1M , т.е. $\lambda = q/p$. Поэтому $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{M_1M} + \frac{q}{p} \overrightarrow{M_1M} = \frac{p+q}{p} \overrightarrow{M_1M}$, откуда $\overrightarrow{M_1M} = \frac{p}{p+q} \overrightarrow{M_1M_2}$.

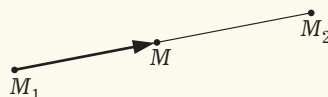


Рис. 4.3

Пусть концы M_1 и M_2 отрезка M_1M_2 заданы своими координатами в произвольной прямоугольной системе координат $Oijk$ в пространстве: $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Найдем координаты точки M в этой же системе координат.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM_1} + \frac{p}{p+q} \overrightarrow{M_1M_2} = \\ &= \{x_1; y_1; z_1\} + \frac{p}{p+q} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} = \left\{ \frac{px_2 + qx_1}{p+q}; \frac{py_2 + qy_1}{p+q}; \frac{pz_2 + qz_1}{p+q} \right\}.\end{aligned}$$

Итак, если обозначить координаты точки M через $(x; y; z)$, то

$$x = \frac{px_2 + qx_1}{p+q}, \quad y = \frac{py_2 + qy_1}{p+q}, \quad z = \frac{pz_2 + qz_1}{p+q}. \quad (4.12)$$

Если точка M — середина отрезка M_1M_2 , то $p = q = 1$, и поэтому из (4.12) следует, что координаты M равны полусумме соответствующих координат начала и конца отрезка, т.е.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (4.13)$$

В случае плоскости нет аппликат и координаты точки $M(x; y)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $|M_1M| : |MM_2| = p : q$, определяются через координаты точек $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ концов этого отрезка с помощью равенств $x = \frac{px_2 + qx_1}{p+q}$, $y = \frac{py_2 + qy_1}{p+q}$, которые для середины отрезка переходят в соотношения $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Пример 4.1. В вершинах $A(4; 4; 4)$, $B(-2; 6; 4)$, $C(-4; 4; 2)$ треугольника ABC расположены материальные точки равной массы. Найдем координаты центра масс этой системы точек.

Центр масс указанной системы точек совпадает с точкой M пересечения медиан треугольника ABC . Пусть точка N — середина стороны BC . Тогда ее координаты $(x; y; z)$ равны полусумме соответствующих координат точек B и C , следовательно, $x = -3$, $y = 5$, $z = 3$. Медиану AN точка M делит в отношении $|AM| : |MN| = 2 : 1$, поэтому координаты $(x_0; y_0; z_0)$ центра масс рассматриваемого треугольника в соответствии с (4.12) равны

$$x_0 = \frac{2 \cdot (-3) + 1 \cdot 4}{2+1} = -\frac{2}{3}, \quad y_0 = \frac{2 \cdot 5 + 1 \cdot 4}{2+1} = \frac{14}{3}, \quad z_0 = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{2+1} = \frac{10}{3}.$$

Длина отрезка. Задача вычисления длины отрезка (или расстояния между двумя точками) по координатам его концов в прямоугольной системе координат известна из школьного курса геометрии. Мы выведем эту формулу при помощи *векторной алгебры*.

Длина отрезка — это длина вектора, соединяющего его концы, а длину вектора можно определить, вычислив его *скалярный квадрат*. Пусть концы отрезка M_1 и M_2 заданы своими координатами в прямоугольной системе координат $Oijk$: $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Тогда $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. Скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, заданного своими координатами в *ортонормированном базисе* i, j, k , находится с помощью формулы (2.14) для вычисления *скалярного произведения*: $\overrightarrow{M_1M_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$. Итак, длина отрезка M_1M_2 вычисляется по формуле $|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

4.4. Вычисление площадей и объемов

Вычисление площадей многоугольников и объемов многогранников, заданных координатами своих вершин в *прямоугольной системе координат*, основывается на использовании *скалярного, векторного и смешанного произведений векторов*.

Если параллелограмм задан в пространстве координатами своих вершин, то для вычисления его площади нужно найти *координаты* двух *векторов*, соответствующих смежным сторонам параллелограмма, а затем *модуль* их векторного произведения. Аналогично вычисляется площадь треугольника, равная половине модуля векторного произведения векторов, на которых он построен как на смежных сторонах.

Пример 4.2. Пусть три вершины треугольника заданы своими координатами: $A(4; 4; 4)$, $B(1; 2; 3)$, $C(3; -1; 2)$.

Для определения площади $\triangle ABC$ с помощью (4.10) найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{1 - 4; 2 - 4; 3 - 4\} = \{-3; -2; -1\}, \quad \overrightarrow{AC} = \{3 - 4; -1 - 4; 2 - 4\} = \{-1; -5; -2\}.$$

Затем по (3.2) вычислим их векторное произведение:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -2 & -1 \\ -1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 13\mathbf{k}.$$

Модуль этого векторного произведения равен $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2 + 13^2} = \sqrt{195}$, и, следовательно, $S_{\triangle ABC} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{195}}{2}$. #

Для вычисления объема параллелепипеда, заданного координатами своих вершин, нужно найти координаты трех векторов, соответствующих смежным ребрам, а затем вычислить модуль смешанного произведения этих векторов. Через смешанное произведение вычисляется и объем произвольной треугольной пирамиды $SABC$ (см. пример 3.2), поскольку он равен $1/6$ объема параллелепипеда, построенного на ребрах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AS}$. Таким образом, объем этой пирамиды равен $V_{SABC} = |\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AS}|/6$.

Пример 4.3. Найдем объем V пирамиды $SABC$, заданной координатами своих вершин: $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$, $S(4; 1; 3)$.

Используя (4.10), вычисляем координаты векторов, направленных по ребрам пирамиды: $\overrightarrow{AB} = \{5 - 2; 5 - (-1); 4 - 1\} = \{3; 6; 3\}$, $\overrightarrow{AC} = \{3 - 2; 2 - (-1); -1 - 1\} = \{1; 3; -2\}$, $\overrightarrow{AS} = \{4 - 2; 1 - (-1); 3 - 1\} = \{2; 2; 2\}$, и определяем объем с помощью смешанного произведения найденных векторов:

$$\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AS} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -18, \quad V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AS}| = 3.$$

4.5. Кривые и поверхности

Множество точек на плоскости или в пространстве можно описать системой уравнений и (или) неравенств, связывающих *координаты точек* из этого множества. И одна из важнейших задач аналитической геометрии — построение уравнения или системы уравнений и неравенств, описывающих заданное множество.

Определение 4.1. Если уравнению $F(x, y, z) = 0$ удовлетворяют те и только те тройки чисел x, y, z , для которых точка $M(x; y; z)$ принадлежит множеству S в пространстве, то уравнение $F(x, y, z) = 0$ называют **уравнением множества S** , а само множество S — **геометрическим образом** этого уравнения.

Вышесказанное также относится и к описанию множеств на плоскости, но с единственным отличием — уравнению соответствует функция $F(x, y)$ двух переменных x и y , а не трех.

Определение 4.2. Если уравнению $F(x, y) = 0$ удовлетворяют те и только те пары чисел x и y , для которых точка $M(x; y)$ принадлежит множеству Γ на плоскости, то уравнение $F(x, y) = 0$ называют **уравнением множества** Γ , а само множество Γ — **геометрическим образом** этого уравнения.

Рассмотрим простейший вариант, когда множество точек в пространстве описывается одним уравнением вида $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ — функция трех переменных, а переменные x, y, z представляют собой координаты точки в пространстве относительно фиксированной *прямоугольной системы координат*. Если не налагать на функцию $F(x, y, z)$ никаких ограничений, то от подобного описания мало проку, так как тогда при помощи уравнения можно описать любое множество точек в пространстве. Действительно, вспомним общее толкование функции как закона, который любому набору, в данном случае из трех, аргументов ставит в соответствие единственное число. Такой закон можно задать различными способами. Например, выберем произвольное множество S в пространстве. Положим $F(x, y, z) = 0$, если точка с координатами $(x; y; z)$ принадлежит множеству S , и $F(x, y, z) = 1$ в противном случае. Тогда уравнение $F(x, y, z) = 0$ будет задавать в точности множество S .

В рамках аналитической геометрии рассматривают уравнения $F(x, y, z) = 0$ ($F(x, y) = 0$ на плоскости), для которых функция F является многочленом.

Определение 4.3. **Многочленом от n переменных** $x_1, \dots, x_n$ называют функцию вида

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = 0}^m a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n},$$

где $i_1, \dots, i_n$ — целые неотрицательные числа; $a_{i_1, \dots, i_n}$ — действительные числа, причем хотя бы один из коэффициентов $a_{i_1, \dots, i_n}$, для которых $i_1 + \dots + i_n = m$, не равен нулю. Число m называют **степенью многочлена от n переменных**.

Определение допускает нулевое значение степени многочлена. Независимо от числа переменных многочлены нулевой степени имеют вид $F = a_{0, \dots, 0}$ и являются постоянными функциями. Вид многочленов первой степени зависит от количества переменных. Например, $F = 2x - 4y + 5z - 1$ — многочлен первой степени от трех переменных, а $F = x - y + 3$ — многочлен первой степени от двух переменных. При $n < k$ любой многочлен степени m от n переменных можно рассматривать как многочлен той же степени от k переменных, т.е. от большего числа переменных.

Уравнение $F(x_1, \dots, x_n) = 0$, в левой части которого стоит многочлен от n переменных, называют **алгебраическим**.

Определение 4.4. **Алгебраической поверхностью** называют геометрический образ в пространстве, соответствующий уравнению $F(x, y, z) = 0$, где F — многочлен от трех переменных x, y, z .

Степень многочлена F в уравнении $F = 0$ называют **порядком уравнения**, или его **степенью**.

Определение 4.5. **Алгебраической кривой** (или **линией**) **на плоскости** называют геометрический образ на плоскости, соответствующий уравнению $F(x, y) = 0$, где F — многочлен от двух переменных x, y .

При преобразовании системы координат уравнение поверхности (кривой) изменяется. Пусть x, y, z — старые координаты, x', y', z' — новые координаты, связанные со старыми уравнениями (4.3), а поверхность в старой системе координат описывается уравнением $F(x, y, z) = 0$. Тогда, чтобы получить уравнение поверхности в новой системе координат, необходимо в исходное уравнение подставить вместо переменных x, y, z их выражения через новые переменные x', y', z' .

В случае алгебраической поверхности (алгебраической кривой) преобразование координат в уравнении приводит к многочлену той же степени, что и степень первоначального уравнения.

Действительно, при преобразовании координат степень многочлена не может возрасти, но тогда она не может и уменьшиться, так как при обратном преобразовании она должна была бы возрасти. Следовательно, степень многочлена в уравнении отражает характер самой поверхности (кривой) и не связана с выбором системы координат.

Степень многочлена в уравнении, описывающем данную алгебраическую поверхность (кривую на плоскости), определяется неоднозначно. Например, поверхность, которая задается уравнением $F(x, y, z) = 0$, где F — многочлен, может быть также описана и уравнением $(F(x, y, z))^2 = 0$, порядок которого вдвое больше. Но среди всех уравнений, описывающих данную алгебраическую поверхность (кривую на плоскости), есть уравнение наименьшего порядка.

Определение 4.6. Минимальный порядок уравнения, описывающего алгебраическую поверхность (алгебраическую кривую на плоскости) в прямоугольной системе координат, называют **порядком** этой **поверхности (кривой)**.

Отметим, что наиболее распространенные кривые на плоскости (прямые и окружности) и поверхности в пространстве (плоскость, сфера, конус), которые изучаются в курсе школьной геометрии, являются алгебраическими порядка 1 или 2.

Кривая в пространстве может рассматриваться как линия пересечения двух поверхностей. Описывая каждую из поверхностей при помощи уравнения в одной и той же системе координат, например $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$, задают и линию пересечения этих поверхностей системой двух уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Кривые на плоскости или в пространстве можно описывать и другими способами. Так, кривую можно рассматривать как траекторию движущейся точки и описывать, задавая координаты точки как функции времени. Мы приходим к системе трех уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \quad (4.14)$$

Кривая на плоскости может быть описана аналогичной системой двух уравнений. Такие системы называют параметрическими уравнениями кривой, а переменное t — параметром. Его содержательный смысл (время) не является существенным, да и происхождение параметра может быть различным — не только исходя из механической интерпретации кривой как траектории движения.

Если удастся исключить параметр из системы (4.14), то получается система двух уравнений, которая характеризует кривую в пространстве как пересечение двух поверхностей. Возможен и обратный переход, при котором в систему двух уравнений вводят дополнительный параметр так, чтобы новая система могла быть представлена в виде (4.14).

Пример 4.4. Кривую в пространстве, заданную системой двух уравнений

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad x - z + 1 = 0,$$

можно задать параметрически. Для этого исключаем из первого уравнения переменную z и получаем $x^2 + y^2 - (1 + x)^2 = 0$ или $y^2 = 2x + 1$. Решая последнее уравнение относительно x , приходим к системе двух уравнений, эквивалентной исходной:

$$x = \frac{y^2 - 1}{2}, \quad z = \frac{y^2 + 1}{2}.$$

Остается ввести параметр, положив $t = y$, и записать параметрические уравнения рассматриваемой кривой:

$$x = \frac{t^2 - 1}{2}, \quad y = t, \quad z = \frac{t^2 + 1}{2}. \quad \#$$

Поверхность в пространстве может быть также задана параметрическими уравнениями, но параметров в этом случае должно быть два.

Пример 4.5. Сфера радиуса R с центром в начале координат описывается параметрическими уравнениями

$$x = R \cos \vartheta \cos \varphi, \quad y = R \cos \vartheta \sin \varphi, \quad z = R \sin \vartheta,$$

в которых параметр ϑ соответствует географической широте на поверхности Земли, а φ — географической долготе. Параметры должны изменяться в пределах $|\vartheta| \leq \pi/2$, $-\pi < \varphi \leq \pi$.

4.6. Алгебраические кривые первого порядка

Остановимся на изучении *алгебраических кривых первого порядка* на плоскости, т.е. кривых, которые в некоторой *прямоугольной системе координат* описываются *алгебраическим уравнением первого порядка* $ax + by + c = 0$, где хотя бы один из коэффициентов a или b отличен от нуля¹. Это уравнение называют также **линейным уравнением**.

Теорема 4.1. Любая прямая на плоскости представляет собой алгебраическую кривую первого порядка и любая алгебраическая кривая первого порядка на плоскости есть прямая.

◀ Рассмотрим произвольную прямую L на плоскости. Пусть точка $M_0(x_0; y_0)$ лежит на L , а *ненулевой вектор* $\mathbf{n} = \{a; b\}$ перпендикулярен этой прямой. При таких исходных условиях произвольная точка $M(x; y)$ принадлежит прямой L тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ ортогонален вектору $\mathbf{n}$ (рис. 4.4).

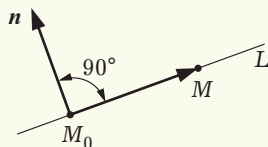


Рис. 4.4

Зная координаты векторов $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ и $\mathbf{n}$, запишем условие ортогональности этих векторов через их *скалярное произведение*: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ или $ax + by + c = 0$, где $c = -ax_0 - by_0$. Так как $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, то либо $a \neq 0$, либо $b \neq 0$. Первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго рассмотрим произвольное уравнение первого порядка с двумя неизвестными $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Это уравнение имеет хотя бы одно решение. Например, если $a \neq 0$, то решением уравнения является $x = -c/a$, $y = 0$. Это значит, что *геометрический образ* уравнения является непустым и содержит какие-то точки. Пусть точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит указанному образу, т.е. выполняется равенство $ax_0 + by_0 + c = 0$. Вычтем это равенство из рассматриваемого уравнения. В результате получим новое уравнение, эквивалентное исходному. Это новое уравнение после перегруппировки слагаемых примет вид

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \quad (4.15)$$

Нетрудно увидеть, что полученное уравнение представляет собой условие ортогональности векторов $\mathbf{n} = \{a; b\}$ и $\overrightarrow{M_0M}$, где M — это точка с координатами $(x; y)$. Следовательно, если точка

¹Условие, что коэффициенты a и b одновременно не обращаются в нуль, коротко можно записать так: $a^2 + b^2 \neq 0$.

$M(x; y)$ принадлежит геометрическому образу уравнения $ax + by + c = 0$, то вектор $\mathbf{n}$ ортогонален вектору $\overrightarrow{M_0M}$, т.е. точка M лежит на прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\mathbf{n}$. ►

Определение 4.7. Уравнение вида

$$ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0, \quad (4.16)$$

называют **общим уравнением прямой**.

Из доказательства теоремы 4.1 следует, что коэффициенты a и b в общем уравнении прямой имеют простой геометрический смысл. Это координаты вектора, перпендикулярного прямой. Такой вектор называют **нормальным вектором прямой**. Он, как и общее уравнение прямой, определяется с точностью до (ненулевого) числового множителя.

Пусть прямая L задана уравнением (4.16). Если точка $M_0(x_0; y_0)$ лежит на прямой L , то ее координаты удовлетворяют уравнению (4.16), т.е. $ax_0 + by_0 + c = 0$. В любой точке $M_1(x_1; y_1)$, не лежащей на прямой L , значение левой части уравнения (4.16) равно

$$ax_1 + by_1 + c = ax_1 + by_1 - ax_0 - by_0 = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = \mathbf{n} \overrightarrow{M_0M_1} \neq 0.$$

Знак скалярного произведения $\mathbf{n} \overrightarrow{M_0M_1}$ определяется углом между вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$ и нормальным вектором прямой $\mathbf{n}$. Если точки M_1 и M_2 расположены по одну сторону от прямой L (рис. 4.5, а), то, подставив их координаты в левую часть уравнения (4.16), мы получим значения с одним знаком. Если такая подстановка координат точек M_1 и M_2 приводит к значениям с разными знаками, то эти точки лежат по разные стороны от прямой L (рис. 4.5, б).

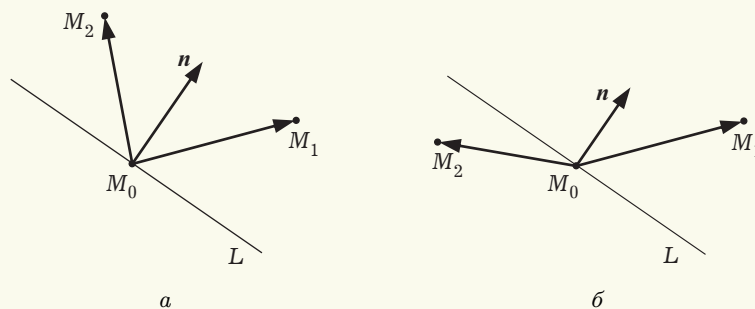


Рис. 4.5

Пример 4.6. Выясним, как по отношению к прямой $3x - 4y + 5 = 0$ расположены точки $A(4; 4)$ и $B(6; 6)$.

Подставив координаты точки A в левую часть общего уравнения прямой, получим положительное число 1, а подстановка координат точки B приводит к отрицательному числу -1 . Значит, точки A и B расположены по разные стороны от данной прямой. #

Уравнение (4.15) очень полезно при решении задач. Оно позволяет по координатам точки на прямой L и координатам нормального вектора прямой L записать уравнение прямой без промежуточных вычислений.

4.7. Специальные виды уравнения прямой

Кроме *общего уравнения прямой* на плоскости часто используют и другие уравнения прямой. Это связано с тем, что, в зависимости от геометрического описания прямой на плоскости, ее уравнение может быть получено в некотором специальном виде. Кроме того, каждому виду уравнения соответствует свой геометрический смысл его коэффициентов, что также важно. Фиксируем на плоскости *прямоугольную систему координат* Oxy .

Уравнение с угловым коэффициентом. Определим прямую L на плоскости, задав точку $M_0(x_0; y_0)$ на этой прямой и угол φ , на который надо повернуть против хода часовой стрелки ось абсцисс Ox до совмещения с прямой (рис. 4.6). Предположим, что $\varphi \neq \pi/2$.

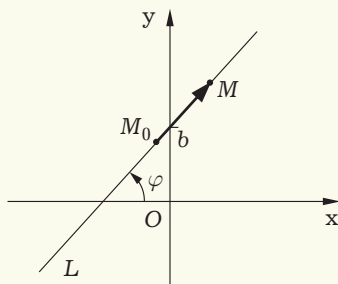


Рис. 4.6

Точка $M(x; y)$ принадлежит прямой L тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ составляет с осью Ox угол φ или $\pi - \varphi$, при этом отношение координат этого вектора равно $\operatorname{tg} \varphi$. Это условие можно записать в виде $\frac{y-y_0}{x-x_0} = \operatorname{tg} \varphi$. Находя y , приходим к уравнению

$$y = kx + b, \quad (4.17)$$

где $k = \operatorname{tg} \varphi$; $b = y_0 - x_0 \operatorname{tg} \varphi$.

Уравнение вида $y = kx + b$ называют **уравнением прямой с угловым коэффициентом**. Параметр k (**угловой коэффициент прямой**) равен тангенсу угла наклона прямой. Параметр b равен **ординате точки** пересечения прямой с осью Oy .

Векторное и параметрические уравнения прямой. Определим прямую L на плоскости точкой $M_0(x_0; y_0)$ на этой прямой и **ненулевым вектором** $s = \{l; m\}$, параллельным ей (рис. 4.7). Такой вектор s называют **направляющим вектором прямой** L .

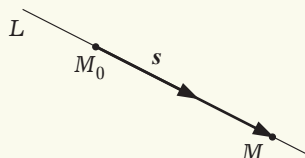


Рис. 4.7

Если точка $M(x; y)$ принадлежит прямой L , то это эквивалентно тому, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ **коллинеарен** вектору s , т.е. эти векторы принадлежат одному и тому же **пространству** V_1 . Так как вектор s не равен **нулевому**, он образует **базис** в этом пространстве V_1 . Следовательно, для некоторого числа t выполняется равенство $\overrightarrow{M_0M} = ts$. Воспользовавшись тем, что $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$, $s = \{l; m\}$, запишем это равенство в координатах:

$$x - x_0 = lt, \quad y - y_0 = mt,$$

или

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt. \quad (4.18)$$

Уравнения (4.18) называют **параметрическими уравнениями прямой**. Точка $M(x_0; y_0)$, лежащая на прямой, соответствует значению параметра $t = 0$.

Если равенство $\overrightarrow{M_0M} = ts$ записать через **радиус-векторы** r_0 и r точек M_0 и M соответственно, то в результате получим **векторное уравнение прямой**

$$r - r_0 = ts, \quad \text{или} \quad r = r_0 + ts. \quad (4.19)$$

Каноническое уравнение прямой. Модифицируем вывод параметрических уравнений прямой. Коллинеарность векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\mathbf{s}$, согласно следствию 2.1, эквивалентна равенству отношений их одноименных координат:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \quad (4.20)$$

Уравнение (4.20) называют **каноническим уравнением прямой**. Это уравнение можно также получить, исключив из параметрических уравнений (4.18) параметр t .

Уравнение прямой, проходящей через две точки. Зададим прямую L на плоскости двумя различными точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на ней.

Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ параллелен L и ее каноническое уравнение (4.20) как уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$, с направляющим вектором $\mathbf{s} = \overrightarrow{M_1M_2}$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (4.21)$$

Уравнение (4.21) называют **уравнением прямой, проходящей через две точки**.

Уравнение прямой в отрезках. Определим прямую L ее точками $A(a, 0)$ и $B(0, b)$ пересечения с осями координат, предполагая, что эти две точки не совпадают с началом системы координат, т.е. что $a \neq 0$ и $b \neq 0$ (рис. 4.8).

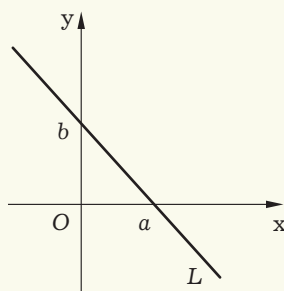


Рис. 4.8

Записывая уравнение прямой L в виде (4.21) по двум ее точкам A и B , получаем $\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}$, откуда $-x/a + 1 = y/b$, или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (4.22)$$

Уравнение прямой (4.22) называют **уравнением прямой в отрезках**.

Нормальное уравнение прямой. Определим прямую L при помощи перпендикулярного ей единичного вектора $\mathbf{n}$ и расстояния $p > 0$ до прямой от начала системы координат. Существуют два единичных вектора, перпендикулярных прямой L . Из этих двух выберем тот, который имеет начало в точке O и направлен „в сторону прямой“ L (рис. 4.9).

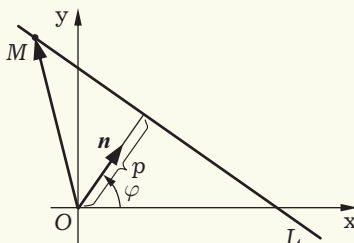


Рис. 4.9

Выбранный вектор $\mathbf{n}$ однозначно определяется своим углом φ с осью Ox , который отсчитывается против хода часовой стрелки. Координаты вектора $\mathbf{n}$ легко вычисляются через этот угол: $\mathbf{n} = \{\cos \varphi; \sin \varphi\}$.

Условие, что точка $M(x; y)$ принадлежит прямой L , эквивалентно тому, что *ортогональная проекция* радиус-вектора точки M на *направление нормального вектора прямой* равна расстоянию p от точки O до прямой: $\text{пр}_n \overrightarrow{OM} = p$ (см. рис. 4.9). Проекция $\text{пр}_n \overrightarrow{OM}$ совпадает со *скалярным произведением* векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\mathbf{n}$, так как длина нормального вектора $\mathbf{n}$ равна единице, и это приводит к равенству $\overrightarrow{OM} \mathbf{n} = p$. Записав скалярное произведение $\overrightarrow{OM} \mathbf{n}$ в координатах, получим уравнение прямой L в виде

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0. \quad (4.23)$$

Уравнение (4.23) называют **нормальным уравнением прямой**. Параметрами в этом уравнении являются угол φ между нормальным вектором прямой и осью Ox и расстояние от начала системы координат до прямой.

Общее уравнение прямой $ax + by + c = 0$ можно преобразовать в ее нормальное уравнение делением на нормирующий множитель $\pm \sqrt{a^2 + b^2}$, знак которого выбирается противоположным знаку c . По абсолютной величине нормирующий множитель представляет собой длину нормального вектора $\{a; b\}$ прямой, а выбор знака означает выбор нужного направления из двух возможных. Если $c = 0$, то прямая проходит через начало координат ($p = 0$). В этом случае знак нормирующего множителя можно выбирать любым.

Пример 4.7. Для получения нормального уравнения прямой из ее общего уравнения $3x - 4y + 10 = 0$ вычисляем нормирующий множитель $\pm \sqrt{3^2 + 4^2}$, который для данной прямой отрицателен и равен $-\sqrt{3^2 + 4^2} = -5$. Поэтому нормальное уравнение прямой имеет вид

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0.$$

В данном случае имеем $p = 2$, $\cos \varphi = -3/5$, $\sin \varphi = 4/5$, а $\varphi = \arccos(-3/5)$.

4.8. Взаимное расположение двух прямых

Фиксируем на плоскости *прямоугольную систему координат*. Две прямые на плоскости могут быть параллельными или пересекаться. Пересекающиеся прямые могут быть перпендикулярными. Какая из этих возможностей реализуется для прямых L_1 и L_2 , всегда можно выяснить с помощью их *общих уравнений*

$$L_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad L_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Действительно, для параллельности прямых L_1 и L_2 необходимо и достаточно, чтобы были *коллинеарными* их *нормальные векторы* $\mathbf{n}_1 = \{a_1; b_1\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{a_2; b_2\}$, а коллинеарность векторов равносильна пропорциональности их координат. Поэтому

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}. \quad (4.24)$$

Так как последнее равенство преобразуется в соотношение $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то полученное условие параллельности двух прямых можно записать при помощи *определителя второго порядка*:

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.25)$$

Прямые L_1 и L_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда ортогональны их нормальные векторы. Условие ортогональности нормальных векторов $\mathbf{n}_1 = \{a_1; b_1\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{a_2; b_2\}$ эквивалентно равенству нулю их *скалярного произведения* $\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 = 0$, т.е., согласно (2.17), условию

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0. \quad (4.26)$$

И условие параллельности, и условие перпендикулярности можно записать через *угловые коэффициенты прямых*. Для этого необходимо выразить угловые коэффициенты прямых через коэффициенты их общих уравнений: $k_1 = -a_1/b_1$, $k_2 = -a_2/b_2$. Эти выражения позволяют записать условия (4.24) и (4.26) следующим образом:

- условие параллельности: $k_1 = k_2$;
- условие перпендикулярности: $k_1 k_2 = -1$.

Две пересекающиеся прямые L_1 и L_2 образуют два смежных² угла. Один из этих углов совпадает с *углом между нормальными векторами*. А угол между двумя векторами можно вычислить при помощи скалярного произведения. Отметим, что косинусы двух смежных углов различаются знаками, так как $\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$. При этом положительное значение косинуса соответствует острому углу. Значение φ (меньшего из углов между прямыми L_1 и L_2) вычисляется согласно формуле

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Угол между прямыми можно также выразить через угловые коэффициенты прямых. Этот угол представляет собой разность углов наклона прямых. Если $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$ и $k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$ — угловые коэффициенты прямых L_1 и L_2 , то

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

Приведенная формула учитывает не только значение угла, но и направление поворота вокруг точки пересечения прямых, при котором прямая L_2 совмещается с прямой L_1 . Прямую L_2 можно поворачивать как по ходу часовой стрелки, так и в противоположном направлении. Два возможных угла поворота (без учета знака) в сумме равны 180° . Значение острого угла поворота с учетом его направления определяется по формуле

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

4.9. Расстояние от точки до прямой

Для вычисления расстояния от данной точки M до прямой L можно использовать разные способы. Например, если на прямой L взять произвольную точку M_0 , то можно определить *ортогональную проекцию вектора $\overrightarrow{M_0 M}$ на направление нормального вектора прямой*. Эта проекция с точностью до знака и есть нужное расстояние.

Другой способ вычисления расстояния от точки до прямой основан на использовании *нормального уравнения прямой*. Пусть прямая L задана нормальным уравнением (4.23). Если точка $M(x; y)$ не лежит на прямой L , то ортогональная проекция $\operatorname{pr}_n \overrightarrow{OM}$ радиус-вектора точки M на направление *единичного нормального вектора $\mathbf{n}$ прямой L* равна *скалярному произведению* векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\mathbf{n}$, т.е. $x \cos \varphi + y \sin \varphi$. Эта же проекция равна сумме расстояния p от начала координат до прямой и некоторой величины δ (рис. 4.10). Величина δ по абсолютной величине равна расстоянию от точки M до прямой. При этом $\delta > 0$, если точки M и O находятся по разные стороны от прямой, и $\delta < 0$, если эти точки расположены по одну сторону от прямой. Величину δ называют *отклонением точки M от прямой*.

Отклонение δ для точки $M(x; y)$ от прямой L вычисляется как разность проекции $\operatorname{pr}_n \overrightarrow{OM}$ и расстояния p от начала координат до прямой (см. рис. 4.10), т.е. $\delta = x \cos \varphi + y \sin \varphi - p$.

По этой формуле можно получить и расстояние $\rho(M, L)$ от точки $M(x; y)$ до прямой L , заданной нормальным уравнением: $\rho(M, L) = |\delta| = |x \cos \varphi + y \sin \varphi - p|$.

²Два смежных угла в сумме дают 180° .

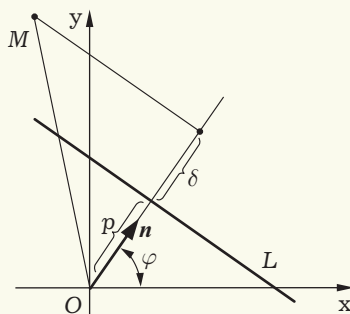


Рис. 4.10

Учитывая приведенную выше процедуру преобразования *общего уравнения прямой* в ее нормальное уравнение, получаем формулу для расстояния от точки $M(x; y)$ до прямой L , заданной своим общим уравнением:

$$\rho(M, L) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4.27)$$

Пример 4.8. Найдём общие уравнения высоты AH , медианы AM и биссектрисы AD треугольника ABC , выходящих из вершины A . Известны координаты вершин треугольника $A(-1; -3)$, $B(7; 3)$, $C(1; 7)$.

Прежде всего уточним условие примера: под указанными уравнениями подразумевают уравнения прямых L_{AH} , L_{AM} и L_{AD} , на которых расположены соответственно высота AH , медиана AM и биссектриса AD указанного треугольника (рис. 4.11).

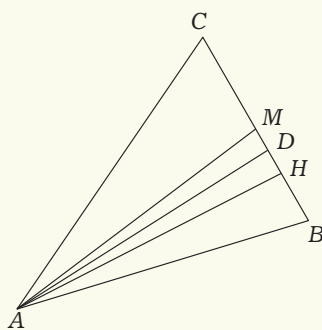


Рис. 4.11

Чтобы найти уравнение прямой L_{AM} , воспользуемся тем, что медиана делит противоположную сторону треугольника пополам. Найдя координаты $(x_1; y_1)$ середины стороны BC $x_1 = (7 + 1)/2 = 4$, $y_1 = (3 + 7)/2 = 5$, записываем уравнение для L_{AM} в виде *уравнения прямой, проходящей через две точки*, $\frac{x+1}{4+1} = \frac{y+3}{5+3}$. После преобразований получаем общее уравнение медианы $8x - 5y - 7 = 0$.

Чтобы найти уравнение высоты L_{AH} , воспользуемся тем, что высота перпендикулярна противоположной стороне треугольника. Следовательно, вектор $\vec{BC}$ перпендикулярен высоте AH и его можно выбрать в качестве нормального вектора прямой L_{AH} . Уравнение этой прямой получаем из (4.15), подставляя координаты точки A и нормального вектора прямой L_{AH} :

$$(-6)(x + 1) + 4(y + 3) = 0.$$

После преобразований получаем общее уравнение высоты $3x - 2y - 3 = 0$.

Чтобы найти уравнение биссектрисы L_{AD} , воспользуемся тем, что биссектриса AD принадлежит множеству тех точек $N(x; y)$, которые равноудалены от прямых L_{AB} и L_{AC} . Уравнение этого множества имеет вид

$$\rho(N, L_{AB}) = \rho(N, L_{AC}), \quad (4.28)$$

и оно задает две прямые, проходящие через точку A и делящие углы между прямыми L_{AB} и L_{AC} пополам. Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки, найдем общие уравнения прямых L_{AB} и L_{AC} :

$$L_{AB}: \frac{x+1}{7+1} = \frac{y+3}{3+3}, \quad L_{AC}: \frac{x+1}{1+1} = \frac{y+3}{7+3}.$$

После преобразований получаем $L_{AB}: 3x - 4y - 9 = 0$, $L_{AC}: 5x - y + 2 = 0$. Уравнение (4.28) с помощью формулы (4.27) для вычисления расстояния от точки до прямой запишем в виде

$$\frac{|3x - 4y - 9|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|5x - y + 2|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}}.$$

Преобразуем его, раскрыв модули:

$$3x - 4y - 9 = \pm 5 \frac{5x - y + 2}{\sqrt{26}}.$$

В итоге получим общие уравнения двух прямых

$$(3 \mp 25/\sqrt{26})x + (-4 \pm 5/\sqrt{26})y + (-9 \mp 10/\sqrt{26}) = 0.$$

Чтобы выбрать из них уравнение биссектрисы, учтем, что вершины B и C треугольника расположены по разные стороны от искомой прямой и поэтому подстановки их координат в левую часть общего уравнения прямой L_{AD} должны давать значения с разными знаками. Выбираем уравнение, соответствующее верхнему знаку, т.е.

$$(3 - 25/\sqrt{26})x + (-4 + 5/\sqrt{26})y + (-9 - 10/\sqrt{26}) = 0.$$

Подстановка координат точки B в левую часть этого уравнения дает отрицательное значение, поскольку

$$\begin{aligned} (3 - 25/\sqrt{26})7 + (-4 + 5/\sqrt{26})3 + (-9 - 10/\sqrt{26}) &= \\ &= 21 - 12 - 9 + (-175 + 15 - 10)/\sqrt{26} = -170/\sqrt{26}, \end{aligned}$$

и такой же знак получается для координат точки C , так как

$$\begin{aligned} (3 - 25/\sqrt{26})1 + (-4 + 5/\sqrt{26})7 + (-9 - 10/\sqrt{26}) &= \\ &= 3 - 28 - 9 + (-25 + 35 - 10)/\sqrt{26} = -34 < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, вершины B и C расположены по одну сторону прямой с выбранным уравнением, а потому уравнением биссектрисы является

$$(3 + 25/\sqrt{26})x + (-4 - 5/\sqrt{26})y + (-9 + 10/\sqrt{26}) = 0.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 4. Декартова система координат. Прямая на плоскости	28
4.1. Декартова система координат	28
4.2. Преобразование прямоугольных координат	29
4.3. Простейшие задачи аналитической геометрии	32
4.4. Вычисление площадей и объемов	33
4.5. Кривые и поверхности	34
4.6. Алгебраические кривые первого порядка	37
4.7. Специальные виды уравнения прямой	38
4.8. Взаимное расположение двух прямых	41
4.9. Расстояние от точки до прямой	42