

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект лекций

Для студентов всех специальностей

Москва
2009

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Лекция 3

ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Ориентация базиса, правые и левые тройки векторов. Векторное произведение двух векторов, его механический и геометрический смысл. Свойства векторного произведения. Вычисление векторного произведения в координатной форме в ортонормированном базисе. Смешанное произведение трех векторов и его геометрический смысл. Объем тетраэдра. Свойства смешанного произведения. Вычисление смешанного произведения в ортонормированном базисе. Условие компланарности трех векторов.

3.1. Векторное произведение

Векторное произведение вводится для двух *векторов* из V_3 . Оно опирается на следующее понятие.

Определение 3.1. Упорядоченную тройку некопланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называют **правой**, если направление вектора $\mathbf{a}$ совмещается с направлением вектора $\mathbf{b}$ при помощи кратчайшего поворота вектора $\mathbf{a}$ в плоскости этих векторов, который со стороны вектора $\mathbf{c}$ совершается против хода часовой стрелки (рис. 3.1). В противном случае (поворот по ходу часовой стрелки) эту тройку называют **левой**.

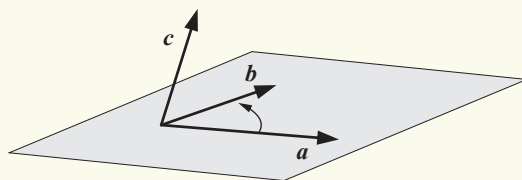


Рис. 3.1

Так как упорядоченная тройка некопланарных векторов образует *базис* в V_3 , то также говорят о **правых** и **левых базисах**. Каждый базис является либо правым, либо левым, т.е. все базисы в V_3 разделяются на два класса: класс правых базисов и класс левых базисов. Класс, к которому относится фиксированный базис, называют его **ориентацией**.

Определение 3.2. **Векторным произведением** неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называют такой вектор $\mathbf{c}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

- 1) вектор $\mathbf{c}$ *ортогонален* векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;
- 2) *длина вектора $\mathbf{c}$* равна $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi$, где φ — *угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$* ;
- 3) упорядоченная тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ является *правой* (рис. 3.2).

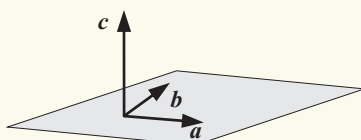


Рис. 3.2

Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi = 0$. Поэтому дополним определение 3.2, полагая, в соответствии с условием 2, что векторное произведение двух коллинеарных векторов есть нуль-вектор.

Векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ далее будем обозначать $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, хотя в литературе встречается и обозначение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Векторное произведение используют, например, в механике. Так, момент силы $\mathbf{F}$, приложенной к точке M , относительно некоторой точки O равен $\overrightarrow{OM} \times \mathbf{F}$ (рис. 3.3). Рассмотрим свойства векторного произведения.

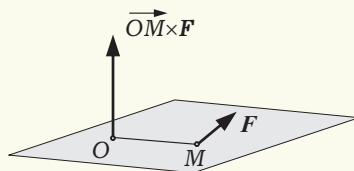


Рис. 3.3

1°. Для того чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось нуль-вектору.

◀ Необходимость. Если векторы коллинеарны, то их векторное произведение равно нуль-вектору согласно определению. Докажем достаточность. Если $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, то $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0$, т.е. $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi = 0$, где φ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Но тогда выполнено, по крайней мере, одно из трех равенств: $|\mathbf{a}| = 0$, $|\mathbf{b}| = 0$ или $\sin\varphi = 0$. Каждое из этих равенств влечет коллинеарность векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. ▶

Следующее свойство выражает геометрический смысл модуля векторного произведения.

2°. Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ неколлинеарны, то модуль $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ их векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на смежных сторонах (рис. 3.4).

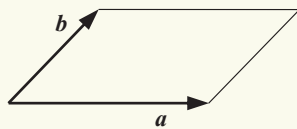


Рис. 3.4

◀ Свойство объясняется тем, что модуль векторного произведения и площадь параллелограмма по двум смежным сторонам и углу между ними вычисляются по одной и той же формуле как произведение длин векторов (сторон параллелограмма) на синус угла между ними. ▶

3°. Важнейшими свойствами векторного произведения являются следующие три:

- свойство антикоммутативности $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$;
- свойство ассоциативности совместно с умножением на число $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$;
- свойство дистрибутивности относительно сложения $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

◀ Доказывая свойство антикоммутативности, заметим, что если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то в обеих частях равенства $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ в соответствии со свойством 1° стоит нулевой вектор. Если же векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ неколлинеарны, то существует плоскость, которой они параллельны. В силу первого условия определения 3.2 векторного произведения векторы $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ и $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ перпендикулярны этой плоскости и, следовательно, коллинеарны. Ясно, что и длины векторов $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ и $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ равны, поскольку совпадают с площадью одного и того же параллелограмма (свойство 2°). Остается доказать, что векторы $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ и $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ имеют противоположное направление. Это следует из того, что если тройка векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ правая, то тройка $\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ — левая. Поэтому, заменив в последней тройке третий вектор на противоположный, получим правую тройку векторов $\mathbf{b}, \mathbf{a}, -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, причем вектор $-\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ коллинеарен вектору $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ и имеет ту же длину. Согласно

определению 3.2, это означает, что вектор $-\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ равен векторному произведению векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$, т.е. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

Свойство ассоциативности доказывается аналогично. В случае коллинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а также при $\lambda = 0$ векторы $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ и $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ равны нуль-вектору, поскольку каждый из них является или векторным произведением коллинеарных векторов, или произведением вектора на число, равное нулю. Следовательно, в рассматриваемых случаях равенство $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ выполнено.

Предположим теперь, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ неколлинеарны, а $\lambda \neq 0$. Покажем сначала, что в левой и правой частях доказываемого равенства стоят коллинеарные векторы, равные по длине. Действительно, если считать, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\lambda \mathbf{a}$ имеют общее начало, то пары $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\lambda \mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ неколлинеарных векторов порождают одну и ту же плоскость, которой перпендикулярны их векторные произведения $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ и $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$. Поэтому векторы $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ и $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ коллинеарны. Вычисляя их длины, убеждаемся, что эти длины равны, так как

$$|\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})| = |\lambda| |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\lambda| |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi,$$

где φ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а

$$|(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}| = |\lambda \mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \psi = |\lambda| |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \psi = |\lambda| |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi,$$

где ψ — угол между векторами $\lambda \mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и использовано равенство $\sin \psi = \sin \varphi$, выполненное при всех $\lambda \neq 0$.

Два коллинеарных вектора, равные по длине, либо совпадают, либо являются противоположными друг другу. Нам достаточно исключить последнюю возможность, доказав, что векторы $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ и $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ являются однонаправленными.

Если $\lambda > 0$, то векторы $\mathbf{a}$ и $\lambda \mathbf{a}$ однонаправлены. Следовательно, векторы $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ тоже являются однонаправленными. А поскольку векторы $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ тоже однонаправлены, то однонаправлены и векторы $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ и $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Если $\lambda < 0$, то векторы $\mathbf{a}$ и $\lambda \mathbf{a}$ являются противоположно направленными. Следовательно, векторы $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ тоже являются противоположно направленными. Умножение вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ на отрицательное число λ меняет его направление на противоположное. Поэтому векторы $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ и $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ имеют одинаковое направление.

Доказательство свойства дистрибутивности будет дано позже (см. 3.2).

Замечание 3.1. Доказанные свойства ассоциативности и дистрибутивности векторного произведения объединяют, аналогично случаю скалярного произведения, в свойство **линейности векторного произведения** относительно первого сомножителя. В силу свойства антикоммутативности векторного произведения векторное произведение линейно и относительно второго сомножителя:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) &= -(\lambda \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = -\lambda(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= -(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Пример 3.1. Найдём площадь S треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{c} - 2\mathbf{d}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{c} + \mathbf{d}$ при условии, что $|\mathbf{c}| = 1$, $|\mathbf{d}| = 4$, а угол φ между векторами $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ равен 30° .

Для решения задачи воспользуемся формулой

$$S = 0,5 |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$

Используя алгебраические свойства векторного произведения, находим, что

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (3\mathbf{c} - 2\mathbf{d}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = 3\mathbf{c} \times \mathbf{c} + 3\mathbf{c} \times \mathbf{d} - 2\mathbf{d} \times \mathbf{c} - 2\mathbf{d} \times \mathbf{d} = 3\mathbf{c} \times \mathbf{d} + 2\mathbf{c} \times \mathbf{d} = 5\mathbf{c} \times \mathbf{d}.$$

Поэтому

$$S = 0,5 |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0,5 |5\mathbf{c} \times \mathbf{d}| = 2,5 |\mathbf{c}| |\mathbf{d}| \sin \varphi = 5. \quad \#$$

Алгебраические свойства позволяют вычислить векторное произведение через *координаты векторов* и векторные произведения векторов, образующих базис. Наиболее просто соответствующие формулы выглядят в *ортонормированном базисе*.

Рассмотрим правый ортонормированный базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Векторные произведения всевозможных пар векторов базиса (всего 9 пар) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k}, & \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i}, & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j}, & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Векторные произведения базисных векторов на себя не приведены, так как все они равны нуль-вектору.

Таблицу произведений (3.1) удобно трактовать как правило циклической перестановки: произведение двух базисных векторов равно третьему, причем знак плюс выбирается, если тройка векторов (первый сомножитель, второй сомножитель, произведение) получается из исходного базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ циклической перестановкой. На рис. 3.5 этот порядок соответствует движению против хода часовой стрелки. При движении на рис. 3.5 от первого сомножителя ко второму по ходу часовой стрелки в правых частях соответствующих равенств (3.1) появляется знак минус.

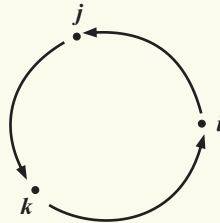


Рис. 3.5

Рассмотрим два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, заданных своими координатами в правом ортонормированном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$: $\mathbf{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$, $\mathbf{b} = \{x_b; y_b; z_b\}$. Тогда имеют место *разложения* этих векторов

$$\mathbf{a} = x_a \mathbf{i} + y_a \mathbf{j} + z_a \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = x_b \mathbf{i} + y_b \mathbf{j} + z_b \mathbf{k}.$$

Исходя из этих представлений и алгебраических свойств векторного умножения, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (x_a \mathbf{i} + y_a \mathbf{j} + z_a \mathbf{k}) \times (x_b \mathbf{i} + y_b \mathbf{j} + z_b \mathbf{k}) = \\ &= x_a x_b \mathbf{i} \times \mathbf{i} + x_a y_b \mathbf{i} \times \mathbf{j} + x_a z_b \mathbf{i} \times \mathbf{k} + \\ &+ y_a x_b \mathbf{j} \times \mathbf{i} + y_a y_b \mathbf{j} \times \mathbf{j} + y_a z_b \mathbf{j} \times \mathbf{k} + \\ &+ z_a x_b \mathbf{k} \times \mathbf{i} + z_a y_b \mathbf{k} \times \mathbf{j} + z_a z_b \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \\ &= (y_a z_b - y_b z_a) \mathbf{i} + (z_a x_b - z_b x_a) \mathbf{j} + (x_a y_b - x_b y_a) \mathbf{k} = \\ &= \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Чтобы упростить полученную формулу, заметим, что она похожа на формулу *разложения определителя третьего порядка* по 1-й строке, только вместо числовых коэффициентов стоят векторы. Поэтому можно записать эту формулу как определитель, который вычисляется по обычным правилам. Две строки этого определителя будут состоять из чисел, а одна — из векторов. При вычислении определителя, умножение векторов на числа и сложение векторов выполняются по обычным правилам, введенным для этих линейных операций в гл. 1. Итак, формулу вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ можно записать в виде

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}. \quad (3.2)$$

Пример 3.2. Найдем все векторы, ортогональные векторам

$$\mathbf{n}_1 = \{3; 1; -2\} \quad \text{и} \quad \mathbf{n}_2 = \{1; -1; 1\}.$$

Отметим, что векторы $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ неколлинеарны, так как их координаты непропорциональны, например:

$$\frac{3}{1} \neq \frac{1}{-1}.$$

Совместим начала этих векторов в некоторой точке. Тогда существует единственная плоскость, содержащая эти векторы. Искомое множество векторов, ортогональных данным, совпадает с множеством векторов, перпендикулярных указанной плоскости, а это множество совпадает с множеством векторов, коллинеарных векторному произведению

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

Ответ: $\lambda(-\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k})$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.2. Смешанное произведение

Определение 3.3. *Смешанным произведением* трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называют число, равное $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$ — *скалярному произведению векторного произведения* первых двух векторов и третьего вектора.

Обозначают смешанное произведение трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ так: abc .

Смешанное произведение имеет простой геометрический смысл.

Теорема 3.1. Смешанное произведение трех *некомпланарных* векторов abc равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на ребрах, выходящих из одной вершины, взятого со знаком плюс, если тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — правая, и со знаком минус, если эта тройка — левая.

◀ Вектор $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ перпендикулярен грани указанного параллелепипеда, построенной на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, и в силу свойства 2° векторного произведения имеет длину, равную площади S этой грани (рис. 3.6). Обозначив через $\mathbf{e}$ единичный вектор, ортогональный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и однонаправленный с векторным произведением $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, получим

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = S\mathbf{e}.$$

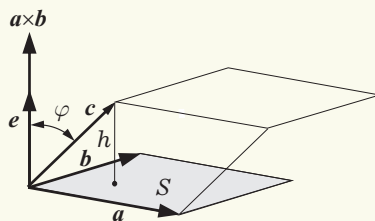


Рис. 3.6

Смешанное произведение abc равно скалярному произведению вектора $S\mathbf{e}$ на вектор $\mathbf{c}$ и равно $S|\mathbf{c}|\cos\varphi$, где φ — *угол между векторами* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Отметим, что число $|\mathbf{c}|\cos\varphi$ равно проекции вектора $\mathbf{c}$ на направление вектора $\mathbf{e}$, а его модуль, т.е. $||\mathbf{c}|\cos\varphi|$, равен высоте h параллелепипеда. Знак проекции определяется углом φ между $\mathbf{c}$ и $\mathbf{e}$. Если $\varphi < 90^\circ$, то векторы $\mathbf{c}$ и $\mathbf{e}$ находятся по одну сторону от плоскости векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Значит, тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{e}$

и $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ имеют одну и ту же ориентацию — правую. В этом случае смешанное произведение положительно и равно объему параллелепипеда со знаком плюс. Если же $\varphi > 90^\circ$, то ориентация указанных троек различная, т.е. тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ является левой, и смешанное произведение будет равно объему параллелепипеда со знаком минус. Отметим, что равенство $\varphi = 90^\circ$ невозможно, так как оно означает, что вектор $\mathbf{c}$ находится в плоскости векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а это противоречит условию некомпланарности этих векторов. ►

Замечание 3.2. Если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны, то параллелепипед, построенный на них, вырождается (лежит в плоскости). Поэтому ему следует приписать нулевой объем. Непосредственно из определения заключаем, что для компланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ векторы $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ ортогональны, т.е. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = 0$. Значит, теорема верна и в случае, когда векторы компланарны. #

Свойства смешанного произведения.

1°. Для смешанного произведения действует правило циклической перестановки:

$$abc = bca = cab = -bac = -cba = -acb.$$

◀ Действительно, все шесть указанных произведений по абсолютной величине дают объем одного и того же параллелепипеда, а знак произведений определяется ориентацией тройки сомножителей. При циклической перестановке векторов в тройке ориентация не меняется, при перестановке местами двух векторов в тройке ориентация меняется на противоположную. ►

Замечание 3.3. Из доказанного свойства получаем, что

$$abc = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}),$$

т.е. порядок двух операций, дающих смешанное произведение, не является существенным. Это объясняет, почему в обозначении смешанного произведения знаки образующих операций опускаются.

2°. Три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

◀ Это вытекает из теоремы 3.1 и замечания 3.2. ►

3°. Для смешанного произведения выполняется свойство ассоциативности относительно умножения векторов на число: $(\lambda\mathbf{a})\mathbf{bc} = \lambda(\mathbf{abc})$.

◀ Обозначив $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{e}$ и используя свойство 2° ассоциативности скалярного произведения относительно умножения на число, получим

$$(\lambda\mathbf{a})\mathbf{bc} = (\lambda\mathbf{a})(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\lambda\mathbf{a})\mathbf{e} = \lambda(\mathbf{ae}) = \lambda(\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})) = \lambda(\mathbf{abc}). \quad \blacktriangleright$$

4°. Для смешанного произведения выполняется свойство дистрибутивности $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\mathbf{bc} = \mathbf{a}_1\mathbf{bc} + \mathbf{a}_2\mathbf{bc}$.

◀ Обозначив $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{e}$ и используя свойство 3° дистрибутивности скалярного произведения, получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\mathbf{bc} &= (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\mathbf{e} = \mathbf{a}_1\mathbf{e} + \mathbf{a}_2\mathbf{e} = \\ &= \mathbf{a}_1(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{a}_2(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a}_1\mathbf{bc} + \mathbf{a}_2\mathbf{bc}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Замечание 3.4. Свойства 3° и 4° смешанного произведения сформулированы для первого сомножителя. Однако при помощи циклической перестановки можно доказать аналогичные утверждения и для второго и для третьего сомножителей, т.е. верны равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b})\mathbf{c} &= \lambda(\mathbf{abc}), \quad \mathbf{ab}(\lambda\mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{abc}), \\ \mathbf{a}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)\mathbf{c} &= \mathbf{ab}_1\mathbf{c} + \mathbf{ab}_2\mathbf{c}, \quad \mathbf{ab}(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) = \mathbf{abc}_1 + \mathbf{abc}_2, \end{aligned}$$

и в итоге имеем свойство **линейности смешанного произведения** по каждому сомножителю.

Замечание 3.5. Отметим, что при доказательстве свойств смешанного произведения мы не использовали свойства векторного произведения. Наоборот, обоснование свойств векторного произведения можно строить на основе свойств смешанного произведения. Покажем это на примере свойства дистрибутивности векторного произведения, доказательство которого мы обещали привести.

Сначала обратим внимание на следующее. Если векторы $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ таковы, что для любого вектора $\mathbf{y}$ выполняется равенство

$$\mathbf{x}_1 \mathbf{y} = \mathbf{x}_2 \mathbf{y}, \quad (3.3)$$

то $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. Действительно, равенство (3.3) означает, что $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \mathbf{y} = 0$. Так как вектор $\mathbf{y}$ любой, мы можем положить $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. Тогда получим $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 = 0$, но это возможно только при $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, т.е. при $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Согласно доказанному, равенство

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}$$

будет выполняться, если для любого вектора $\mathbf{c}$

$$((\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b}) \mathbf{c} = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}) \mathbf{c} + (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}) \mathbf{c},$$

или

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \mathbf{bc} = \mathbf{a}_1 \mathbf{bc} + \mathbf{a}_2 \mathbf{bc}.$$

Но последнее равенство верно, так как выражает доказанное свойство 4° дистрибутивности для смешанного произведения. #

Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ заданы своими *координатами* в *правом ортонормированном базисе*: $\mathbf{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$, $\mathbf{b} = \{x_b; y_b; z_b\}$, $\mathbf{c} = \{x_c; y_c; z_c\}$. Чтобы найти их смешанное произведение, воспользуемся формулами для вычисления скалярного и векторного произведений:

$$\begin{aligned} \mathbf{abc} &= \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \left(\begin{vmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_b & z_b \\ x_c & z_c \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) = \\ &= x_a \begin{vmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{vmatrix} - y_a \begin{vmatrix} x_b & z_b \\ x_c & z_c \end{vmatrix} + z_a \begin{vmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Согласно полученной формуле, свойство 2° смешанного произведения можно сформулировать так: необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе, является равенство нулю *определителя третьего порядка*, строками которого являются координаты этих векторов.

Пример 3.3. Найдём объём треугольной пирамиды, построенной на векторах

$$\mathbf{a} = \{-2; 1; -2\}, \quad \mathbf{b} = \{1; 0; -1\}, \quad \mathbf{c} = \{1; 1; 1\}$$

как на смежных ребрах.

Трем векторам с общим началом можно сопоставить как треугольную пирамиду, так и параллелепипед, причем объём пирамиды будет в 6 раз меньше объёма параллелепипеда, равного модулю смешанного произведения $\mathbf{abc}$ данных векторов. Итак, объём пирамиды равен $V = |\mathbf{abc}|/6 = 1$, поскольку

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6.$$

3.3. Приложения произведений векторов

Рассмотрим различные приложения произведений *векторов* на следующих примерах.

Пример 3.4. Работа A постоянной силы $\mathbf{F}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения M_1 в положение M_2 равна $A = |\mathbf{F}| |M_1 M_2| \cos \varphi$ (рис. 3.7, а). Поэтому с помощью *скалярного произведения* эта работа вычисляется по формуле

$$A = \mathbf{F} \mathbf{s}, \quad \mathbf{s} = \overrightarrow{M_1 M_2}.$$

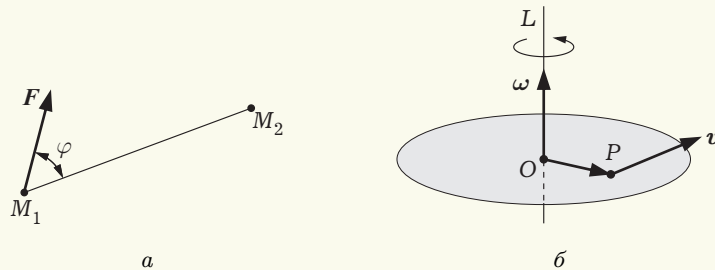


Рис. 3.7

Если к материальной точке приложено n постоянных сил $\mathbf{f}_i$, $i = \overline{1, n}$, то при том же ее перемещении сумма A их работ A_i равна работе равнодействующей силы

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i,$$

поскольку

$$A = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \mathbf{s} = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \right) \mathbf{s} = \mathbf{F} \mathbf{s}.$$

Из этого равенства следует, что система сил не совершает работу, если их равнодействующая *ортогональна вектору* перемещения $\mathbf{s}$. Ясно, что равенство $A = \mathbf{F} \mathbf{s} = 0$ справедливо и в случае, когда равнодействующая равна нулю или отсутствует перемещение, или верно и то и другое.

Пример 3.5. Круговой диск вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг перпендикулярной ему оси вращения L , проходящей через его центр O (рис. 3.7, б). Пусть $\mathbf{v}$ — скорость точки P . Тогда $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости.

Пример 3.6. На движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$ частицу с электрическим зарядом q магнитное поле с магнитной индукцией $\mathbf{B}$ действует с силой Лоренца $\mathbf{f} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Если векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ *коллинеарны*, то $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ и при постоянном магнитном поле частица будет совершать прямолинейное равномерное движение. Если же векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ *неколлинеарны*, то $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$, но мощность, развиваемая этой силой, равна нулю: $W = \mathbf{f} \mathbf{v} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \mathbf{v} = q\mathbf{v} \mathbf{B} \mathbf{v} = 0$, поскольку *смешанное произведение компланарных векторов* равно нулю. Следовательно, заряженная частица массой m в постоянном магнитном поле сохраняет свою кинетическую энергию $mv^2/2$.

Рассмотрим случай, когда векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ ортогональны, т.е. $\mathbf{v} \mathbf{B} = 0$. Поскольку и сила Лоренца $\mathbf{f}$ ортогональна $\mathbf{B}$, то частица остается в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{B}$, и движется по окружности радиуса R , который определяется из условия равновесия возникающей при этом центробежной силы и действующей силы Лоренца,

$$mv^2/R = q|\mathbf{v} \times \mathbf{B}| = q|\mathbf{v}||\mathbf{B}| \sin 90^\circ.$$

Отсюда

$$R = \frac{m|\mathbf{v}|}{q|\mathbf{B}|}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 3. Векторное и смешанное произведения векторов	20
3.1. Векторное произведение	20
3.2. Смешанное произведение	24
3.3. Приложения произведений векторов	27