

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект лекций

Для студентов всех специальностей

Москва
2009

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Лекция 2

БАЗИС. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость векторов. Критерий линейной зависимости двух и трех векторов, линейная зависимость четырех векторов. Векторные пространства V_1, V_2, V_3 и базисы в них. Разложение вектора по базису. Координаты вектора. Линейные операции над векторами, заданными своими координатами. Ортонормированный базис. Скалярное произведение векторов, его механический смысл. Вычисление скалярного произведения векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе. Вычисление длины вектора, косинуса угла между векторами и проекции вектора на направление. Координаты вектора в ортонормированном базисе как проекции этого вектора на направление базисных векторов. Направляющие косинусы вектора.

2.1. Линейная зависимость и независимость векторов

Введенные нами *линейные операции* над *векторами* дают возможность составлять различные выражения для *векторных величин* и преобразовывать их при помощи установленных для этих операций свойств.

Исходя из заданного набора векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, можно составить выражение вида

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n, \quad (2.1)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — произвольные действительные числа. Это выражение называют *линейной комбинацией векторов* $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Числа $\alpha_i, i = \overline{1, n}$, представляют собой *коэффициенты линейной комбинации*. Набор векторов называют еще *системой векторов*.

В связи с введенным понятием линейной комбинации векторов возникает задача описания множества векторов, которые могут быть записаны в виде линейной комбинации данной системы векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Кроме того, закономерны вопросы об условиях, при которых существует представление вектора в виде линейной комбинации, и о единственности такого представления.

Определение 2.1. Векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ называют *линейно зависимыми*, если существует такой набор коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, что

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

и при этом хотя бы один из этих коэффициентов ненулевой. Если указанного набора коэффициентов не существует, то векторы называют *линейно независимыми*.

Если $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, то, очевидно, $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$. Имея это в виду, можем сказать так: векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ линейно независимы, если из равенства (2.2) вытекает, что все коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ равны нулю.

Следующая теорема поясняет, почему новое понятие названо термином „зависимость“ (или „независимость“), и дает простой критерий линейной зависимости.

Теорема 2.1. Для того чтобы векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, n > 1$, были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы один из них являлся линейной комбинацией остальных.

◀ **Необходимость.** Предположим, что векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ линейно зависимы. Согласно определению 2.1 линейной зависимости, в равенстве (2.2) слева есть хотя бы один ненулевой

коэффициент, например α_1 . Оставив первое слагаемое в левой части равенства, перенесем остальные в правую часть, меняя, как обычно, у них знаки. Разделив полученное равенство на α_1 , получим

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\mathbf{a}_n,$$

т.е. представление вектора $\mathbf{a}_1$ в виде линейной комбинации остальных векторов $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$.

Достаточность. Пусть, например, первый вектор $\mathbf{a}_1$ можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов: $\mathbf{a}_1 = \beta_2\mathbf{a}_2 + \dots + \beta_n\mathbf{a}_n$. Перенеся все слагаемые из правой части в левую, получим $\mathbf{a}_1 - \beta_2\mathbf{a}_2 - \dots - \beta_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, т.е. линейную комбинацию векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ с коэффициентами $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -\beta_2, \dots, \alpha_n = -\beta_n$, равную нулевому вектору. В этой линейной комбинации не все коэффициенты равны нулю. Согласно определению 2.1, векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ линейно зависимы. ►

Определение и критерий линейной зависимости сформулированы так, что подразумевают наличие двух или более векторов. Однако можно также говорить о линейной зависимости одного вектора. Чтобы реализовать такую возможность, нужно вместо „векторы линейно зависимы“ говорить „система векторов линейно зависима“. Нетрудно убедиться, что выражение „система из одного вектора линейно зависима“ означает, что этот единственный вектор является нулевым (в линейной комбинации имеется только один коэффициент, и он не должен равняться нулю).

Понятие линейной зависимости имеет простую геометрическую интерпретацию. Эту интерпретацию проясняют следующие три утверждения.

Теорема 2.2. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они *коллинеарны*.

◄ Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы, то один из них, например $\mathbf{a}$, выражается через другой, т.е. $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ для некоторого действительного числа λ . Согласно определению 1.7 *произведения вектора на число*, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ являются коллинеарными.

Пусть теперь векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Если они оба нулевые, то очевидно, что они линейно зависимы, так как любая их линейная комбинация равна нулевому вектору. Пусть один из этих векторов не равен $\mathbf{0}$, например вектор $\mathbf{b}$. Обозначим через λ отношение длин векторов: $\lambda = |\mathbf{a}|/|\mathbf{b}|$. Коллинеарные векторы могут быть *однонаправленными* или *противоположно направленными*. В последнем случае у λ изменим знак. Тогда, проверяя определение 1.7, убеждаемся, что $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$. Согласно теореме 2.1, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы. ►

Замечание 2.1. В случае двух векторов, учитывая критерий линейной зависимости, доказанную теорему можно переформулировать так: два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда один из них представляется как произведение другого на число. Это является удобным критерием коллинеарности двух векторов.

Теорема 2.3. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они *компланарны*.

◄ Если три вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ линейно зависимы, то, согласно теореме 2.1, один из них, например $\mathbf{a}$, является линейной комбинацией остальных: $\mathbf{a} = \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$. Совместим начала векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ в точке A . Тогда векторы $\beta\mathbf{b}, \gamma\mathbf{c}$ будут иметь общее начало в точке A и по *правилу параллелограмма* их *сумма*, т.е. вектор $\mathbf{a}$, будет представлять собой вектор с началом A и концом, являющимся вершиной параллелограмма, построенного на векторах-слагаемых. Таким образом, все векторы лежат в одной плоскости, т.е. компланарны.

Пусть векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ компланарны. Если один из этих векторов является нулевым, то очевидно, что он будет линейной комбинацией остальных. Достаточно все коэффициенты линейной комбинации взять равными нулю. Поэтому можно считать, что все три вектора не являются нулевыми. Совместим *начала* этих векторов в общей точке O . Пусть их концами будут соответственно точки A, B, C (рис. 2.1). Через точку C проведем прямые, параллельные прямым, проходящим через пары точек O, A и O, B . Обозначив точки пересечения через A' и B' , получим параллелограмм $OA'CB'$, следовательно, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$. Вектор $\overrightarrow{OA'}$ и ненулевой вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ коллинеарны, а потому первый из них может быть получен умножением второго на

действительное число α : $\overrightarrow{OA'} = \alpha \overrightarrow{OA}$. Аналогично $\overrightarrow{OB'} = \beta \overrightarrow{OB}$, $\beta \in \mathbb{R}$. В результате получаем, что $\overrightarrow{OC} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$, т.е. вектор $\mathbf{c}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Согласно теореме 2.1, векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ являются линейно зависимыми. ►

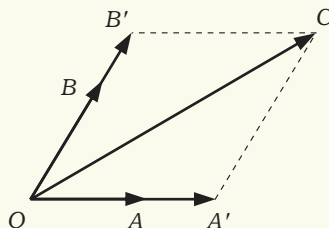


Рис. 2.1

Теорема 2.4. Любые четыре вектора линейно зависимы.

◄ Доказательство проводим по той же схеме, что и в теореме 2.3. Рассмотрим произвольные четыре вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$. Если один из четырех векторов является нулевым, либо среди них есть два коллинеарных вектора, либо три из четырех векторов компланарны, то эти четыре вектора линейно зависимы. Например, если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то мы можем составить их линейную комбинацию $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0}$ с ненулевыми коэффициентами, а затем в эту комбинацию добавить оставшиеся два вектора, взяв в качестве коэффициентов нули. Получим равную $\mathbf{0}$ линейную комбинацию четырех векторов, в которой есть ненулевые коэффициенты.

Таким образом, мы можем считать, что среди выбранных четырех векторов нет нулевых, никакие два не коллинеарны и никакие три не являются компланарными. Выберем в качестве их общего начала точку O . Тогда концами векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ будут некоторые точки A , B , C , D (рис. 2.2). Через точку D проведем три плоскости, параллельные плоскостям OBC , OCA , OAB , и пусть A' , B' , C' — точки пересечения этих плоскостей с прямыми OA , OB , OC соответственно. Мы получаем параллелепипед $OA'C''B'C'B''DA''$, и векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ лежат на его ребрах, выходящих из вершины O . Так как четырехугольник $OC''DC'$ является параллелограммом, то $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC''} + \overrightarrow{OC'}$. В свою очередь, отрезок OC'' является диагональю параллелограмма $OA'C''B'$, так что $\overrightarrow{OC''} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$, а $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$.

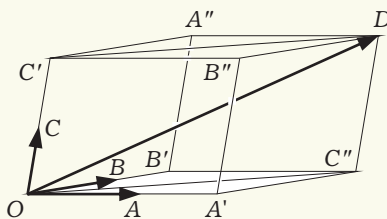


Рис. 2.2

Остается заметить, что пары векторов $\overrightarrow{OA} \neq \mathbf{0}$ и $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB} \neq \mathbf{0}$ и $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC} \neq \mathbf{0}$ и $\overrightarrow{OC'}$ коллинеарны, и, следовательно, можно подобрать коэффициенты α , β , γ так, что $\overrightarrow{OA'} = \alpha \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = \beta \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC'} = \gamma \overrightarrow{OC}$. Окончательно получаем $\overrightarrow{OD} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC}$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{OD}$ выражается через остальные три вектора, а все четыре вектора, согласно теореме 2.1, линейно зависимы. ►

2.2. Базис

Аналогично трем моделям геометрии (геометрии на прямой, на плоскости и в пространстве) мы рассмотрим три множества *свободных векторов*, или, как говорят, три пространства векторов: **пространство** V_1 всех *коллинеарных* между собой *векторов*, т.е. параллельных

некоторой прямой, **пространство** V_2 всех *компланарных* между собой *векторов*, т.е. параллельных некоторой плоскости, и **пространство** V_3 всех свободных векторов.

Рассмотрим пространство V_1 . Любой *ненулевой вектор* пространства V_1 называют **базисом в V_1** . Любые два вектора этого пространства, будучи коллинеарными, *линейно зависимы*, т.е. один из них может быть получен из другого умножением на число. Выберем и зафиксируем в V_1 базис, т.е. вектор $e \neq 0$. Тогда любой вектор $x \in V_1$ представляется в виде $x = \lambda e$. Это равенство называют **разложением вектора x в базисе e** , а число λ — **координатой вектора x** в этом базисе. Отметим, что коэффициент λ при этом определен однозначно. Действительно, этот коэффициент равен $\lambda = \pm |x|/|e|$, причем выбирают знак плюс, если векторы x и e *однонаправлены*, и знак минус в противоположном случае.

Рассмотрим пространство V_2 . Любую упорядоченную пару неколлинеарных векторов в пространстве V_2 называют **базисом в V_2** . Выберем в этом пространстве базис, т.е. два неколлинеарных вектора e_1, e_2 . Согласно теореме 2.3, эти два вектора и любой третий вектор x , будучи компланарными, линейно зависимы. Поэтому один из них является *линейной комбинацией* двух других. При этом можно утверждать, что вектор x выражается через e_1 и e_2 . Действительно, запишем линейную комбинацию этих векторов

$$\alpha x + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 = 0, \quad (2.3)$$

в которой хотя бы один из *коэффициентов* не равен нулю. Сразу делаем вывод, что $\alpha \neq 0$, так как в противном случае в равенстве (2.3) слева можно опустить первое слагаемое, и мы получим, что векторы e_1, e_2 линейно зависимы. Но этого быть не может, так как они не коллинеарны (см. теорему 2.2). Так как $\alpha \neq 0$, мы можем разделить равенство (2.3) на α . В результате, перенося последние два слагаемых в правую часть, получаем представление вида

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, \quad (2.4)$$

которое называют **разложением вектора x в базисе e_1, e_2** , а коэффициенты λ_1, λ_2 этого представления — **координатами вектора x** в базисе e_1, e_2 .

Отметим, что в представлении (2.4) коэффициенты λ_1 и λ_2 определены однозначно. Это можно обосновать, анализируя доказательство теоремы 2.3 (используемый в доказательстве параллелограмм однозначно определен диагональю и прямыми, на которых лежат смежные стороны). Однако то же можно установить, используя лишь факт линейной независимости векторов e_1 и e_2 .

В самом деле, если есть два представления $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$, то, перенеся в последнем равенстве все слагаемые влево и используя свойство 8° (см. с. 5) дистрибутивности умножения вектора на число относительно чисел, получим $(\lambda_1 - \mu_1)e_1 + (\lambda_2 - \mu_2)e_2 = 0$. Коэффициенты в этом равенстве слева равны нулю, так как векторы e_1, e_2 линейно независимы (они неколлинеарны, см. теорему 2.2). Таким образом, $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2$, и два взятых нами представления вектора x совпадают.

Рассмотрим пространство V_3 . Любую упорядоченную тройку некомпланарных векторов называют **базисом в V_3** . Выберем в V_3 базис, т.е. любые три некомпланарных вектора e_1, e_2, e_3 . Эти три вектора с добавленным к ним произвольным четвертым вектором x линейно зависимы (см. теорему 2.4). Можно доказать так же, как мы это делали в случае пространства V_2 , что вектор x является линейной комбинацией векторов e_1, e_2, e_3 :

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3. \quad (2.5)$$

При этом коэффициенты в представлении (2.5) определены однозначно, так как векторы e_1, e_2, e_3 линейно независимы. Представление вектора x в виде (2.5) называют **разложением этого вектора в базисе e_1, e_2, e_3** , а коэффициенты λ_1, λ_2 и λ_3 разложения — **координатами вектора x** в базисе e_1, e_2, e_3 .

Векторы в базисах пространств V_2 и V_3 , согласно определению базисов, являются упорядоченными. Порядок векторов в базисе устанавливает порядок среди координат любого вектора, и поэтому координаты всегда считают тоже упорядоченными. Если базис, например, в пространстве V_3 фиксирован, то каждому вектору из V_3 соответствует единственная упорядоченная тройка чисел, составленная из его координат. Кроме того, каждой упорядоченной тройке чисел соответствует единственная линейная комбинация векторов базиса, т.е. вектор из V_3 , координаты которого совпадают с этой тройкой чисел. Поэтому, если базис фиксирован, то векторы можно рассматривать как упорядоченные наборы их координат в этом базисе.

Эту возможность часто используют, отождествляя векторы с упорядоченными наборами их координат. Например, если вектор $\mathbf{x}$ из V_3 в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ имеет разложение $\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3$, то этому вектору соответствует упорядоченная тройка его координат, которую часто записывают так: $\{2; 3; -4\}$. Более того, отождествляют вектор с упорядоченной тройкой координат и пишут $\mathbf{x} = \{2; 3; -4\}$, вкладывая в это равенство указанный выше смысл.

Итак, если базис в пространстве V_1, V_2 или V_3 фиксирован, то любой вектор из этого пространства однозначно определен своими координатами, записанными в порядке следования векторов базиса. Поэтому можно сказать, что координаты вектора являются представлением, или „изображением“, этого вектора в данном базисе.

2.3. Вычисления в координатах

Выясним, что происходит с координатами векторов при выполнении линейных операций.

Теорема 2.5. При сложении двух векторов их координаты в одном и том же базисе складываются. При умножении вектора на число координаты этого вектора умножаются на это число.

◀ Для простоты остановимся, например, на пространстве V_3 . Фиксируем в V_3 базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Возьмем два произвольных вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и запишем их разложения в выбранном базисе: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$. Используя свойства линейных операций, вычисляем сумму этих векторов:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) + (y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3) = (x_1 + y_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 + y_2)\mathbf{e}_2 + (x_3 + y_3)\mathbf{e}_3.$$

Мы получили разложение суммы векторов в фиксированном базисе. Отсюда заключаем, что координаты x_i и y_i исходных слагаемых, соответствующие одному вектору $\mathbf{e}_i$ в базисе ($i = 1, 2, 3$), складываются.

Аналогично с учетом свойств линейных операций имеем $\lambda\mathbf{x} = \lambda(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = (\lambda x_1)\mathbf{e}_1 + (\lambda x_2)\mathbf{e}_2 + (\lambda x_3)\mathbf{e}_3$. В итоге получаем разложение вектора $\lambda\mathbf{x}$ в фиксированном базисе. Из этого разложения видим, что каждая из координат исходного вектора $\mathbf{x}$ умножена на число λ . ▶

Разложение вектора в базисе имеет простой геометрический смысл. Рассмотрим, например, пространство V_3 . Разложение вектора $\mathbf{d}$ в базисе, скажем $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, показано на рис. 2.2. Координатами вектора $\mathbf{d}$ будут отношения

$$d_a = \pm \frac{|OA'|}{|OA|}, \quad d_b = \pm \frac{|OB'|}{|OB|}, \quad d_c = \pm \frac{|OC'|}{|OC|},$$

где знаки выбирают в зависимости от того, является соответствующая пара коллинеарных векторов (например, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA'}$ для d_a) однонаправленной или нет.

Теорема 2.6. Для того чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их одноименные координаты в одном и том же базисе были пропорциональны.

◀ Докажем теорему в случае пространства V_3 . Фиксируем в V_3 базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Рассмотрим разложения в выбранном базисе векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3. \quad (2.6)$$

Если одноименные координаты этих векторов пропорциональны, т.е. существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что выполнены равенства

$$x_1 = \lambda y_1, \quad x_2 = \lambda y_2, \quad x_3 = \lambda y_3, \quad (2.7)$$

то $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = \lambda y_1\mathbf{e}_1 + \lambda y_2\mathbf{e}_2 + \lambda y_3\mathbf{e}_3 = \lambda(y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3) = \lambda\mathbf{y}$ и из теорем 2.1, 2.2 следует, что векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ коллинеарны. Достаточность условия доказана. Для доказательства его необходимости предположим, что векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ коллинеарны. Но тогда по теореме 2.2 они *линейно зависимы* и в силу теоремы 2.1 один из них, например $\mathbf{x}$, является *линейной комбинацией* „остальных“, т.е. $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$. Подставляя в это равенство разложения (2.6), получаем $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = \lambda(y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3)$, или $(x_1 - \lambda y_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 - \lambda y_2)\mathbf{e}_2 + (x_3 - \lambda y_3)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$. А поскольку вектор $\mathbf{0}$ в любом базисе имеет нулевые координаты, то из последнего равенства следуют соотношения (2.7). ▶

Следствие 2.1. Для того чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы отношения их одноименных координат в одном и том же базисе были равны.

◀ Выражая λ из соотношений (2.7) и приравнивая полученные дроби, находим, что

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}. \quad (2.8)$$

Отметим, что в условии (2.8) в знаменателях дробей могут стоять нули, но при этом подразумевается, что и в числителе соответствующей дроби стоит нуль. Для пространства V_2 условие (2.8) сводится к равенству только первых двух дробей. ▶

Пример 2.1. Пусть векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ образуют базис в V_2 . Векторы $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = -\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ *линейно независимы*, так как $2/(-1) \neq -3/3$. Поэтому они тоже образуют базис в пространстве V_2 . Найдём разложение в этом базисе векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{c} = 3\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_2$.

Чтобы найти разложение вектора $\mathbf{e}_1$, вычислим сумму векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{e}_1$. Следовательно, искомым разложением является $\mathbf{e}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Чтобы найти разложение вектора $\mathbf{c}$, поступим следующим образом. Пусть $\mathbf{c} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}$. Подставив в это равенство разложения векторов $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, приведем подобные слагаемые в правой части равенства. Получим, что

$$3\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_2 = \lambda_1(2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2) + \lambda_2(-\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) = (2\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{e}_1 + (-3\lambda_1 + 3\lambda_2)\mathbf{e}_2.$$

Поскольку каждый вектор в любом базисе имеет единственное разложение, то λ_1, λ_2 должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = 3, \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 = 6. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Это значит, что $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Определение 2.2. Базис называют *ортгогональным*, если он состоит из векторов, лежащих на взаимно перпендикулярных прямых. Базис называют *ортонормированным*, если он ортгогональный и состоит из *единичных векторов*.

Параллелепипед, изображенный на рис. 2.2 в ортонормированном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ в V_3 , является прямоугольным, а точки A', B', C' — *ортгогональными проекциями точки D* на соответствующие прямые. Координаты вектора $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD}$ в ортонормированном базисе равны *ортгогональным проекциям* этого вектора на направления векторов, образующих этот базис.

Ортонормированный базис в пространстве V_3 принято обозначать, с учетом порядка, буквами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, в V_2 — соответственно $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ и в V_1 — $\mathbf{i}$.

В случае ортонормированного базиса в пространстве V_3 легко найти расстояние от точки O до произвольной точки X . По теореме Пифагора $|OX|^2 = |OX_i|^2 + |OX_j|^2 + |OX_k|^2$ (рис. 2.3), где точки X_i, X_j, X_k — ортогональные проекции точки X на соответствующие оси. Но длины отрезков OX_i, OX_j, OX_k — это абсолютные значения координат вектора $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$ в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. В результате получаем формулу для вычисления *длины вектора $\mathbf{x}$* с координатами $\{x_1; x_2; x_3\}$ в ортонормированном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ пространства V_3 :

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \mathbf{x} \in V_3. \quad (2.9)$$

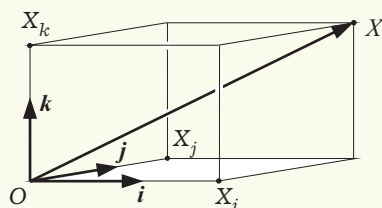


Рис. 2.3

Аналогично вычисляют длину вектора из пространства V_2 по его координатам x_1, x_2 в ортонормированном базисе:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \mathbf{x} \in V_2, \quad (2.10)$$

и длину вектора из V_1 с координатой x_1 в ортонормированном базисе:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2} = |x_1|, \quad \mathbf{x} \in V_1. \quad (2.11)$$

Пусть *ненулевой вектор $\mathbf{x} \in V_3$* образует с направлениями векторов ортонормированного базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ углы α, β и γ соответственно. Величины $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ называют **направляющими косинусами вектора $\mathbf{x}$** (рис. 2.4). Направляющие косинусы не зависят от длины вектора, они характеризуют направление вектора и при умножении вектора на положительное число не изменяются.

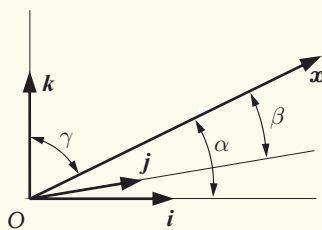


Рис. 2.4

Направляющие косинусы вектора можно использовать при вычислении его координат. Если ненулевой вектор $\mathbf{x} \in V_3$ имеет в ортонормированном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ координаты $\{x_1; x_2; x_3\}$ и направляющие косинусы $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, то

$$x_1 = |\mathbf{x}| \cos \alpha, \quad x_2 = |\mathbf{x}| \cos \beta, \quad x_3 = |\mathbf{x}| \cos \gamma. \quad (2.12)$$

Используя формулу (2.9) для вычисления длины вектора, получаем $|\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}|^2 \cos^2 \alpha + |\mathbf{x}|^2 \cos^2 \beta + |\mathbf{x}|^2 \cos^2 \gamma$, откуда после сокращения на $|\mathbf{x}| \neq 0$ вытекает следующая формула связи для направляющих косинусов:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (2.13)$$

Для любых углов α, β, γ из отрезка $[0, \pi]$, удовлетворяющих соотношению (2.13), существует вектор, направляющими косинусами которого являются величины $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$. В качестве примера можно взять вектор $\{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$. Согласно формулам (2.9) и (2.13) этот вектор имеет единичную длину, а значения $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ представляют собой направляющие косинусы этого вектора.

В случае ортонормированного базиса в пространстве V_2 направление вектора удобно указывать одним углом φ , который отсчитывается от первого вектора базиса против хода часовой стрелки в случае положительного значения (рис. 2.5). Угол φ , длина вектора $\mathbf{x}$ и его координаты $\{x_1; x_2\}$ связаны соотношениями: $x_1 = |\mathbf{x}| \cos \varphi$, $x_2 = |\mathbf{x}| \sin \varphi$.

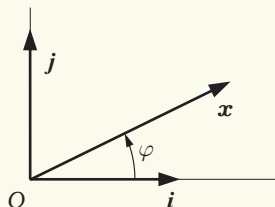


Рис. 2.5

2.4. Скалярное произведение

Есть несколько операций умножения *векторов*. Рассмотрим одну из них, результатом которой является действительное число, т.е. скалярная величина.

Определение 2.3. *Скалярным произведением* двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называют число, равное $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi$ — произведению длин $|\mathbf{a}|$ и $|\mathbf{b}|$ этих векторов на косинус угла φ между ними.

Если хотя бы один из двух векторов является *нулевым*, то их скалярное произведение будет равно нулю независимо от того, какое значение выбрано в качестве угла между векторами.

Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ далее будем обозначать $\mathbf{ab}$, хотя в литературе встречается и обозначение $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Используя теорему 1.1, можно выразить скалярное произведение двух векторов через *ортogonalную проекцию на направление*. Если вектор $\mathbf{a}$ ненулевой, то скалярное произведение $\mathbf{ab}$ векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ получается перемножением длины вектора $\mathbf{a}$ и ортогональной проекции вектора $\mathbf{b}$ на направление вектора $\mathbf{a}$: $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \text{пр}_a \mathbf{b}$. Аналогично при $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ имеем равенство $\mathbf{ab} = |\mathbf{b}| \text{пр}_b \mathbf{a}$.

Если угол между двумя *ненулевыми векторами* прямой (т.е. равен 90°), то такие векторы называют *ортogonalными*.

Нулевой вектор считают ортогональным любому другому вектору.

Теорема 2.7. Для того чтобы два вектора были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю.

◀ Как следует из определения 2.3, скалярное произведение ненулевых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равно $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi$. Поэтому его знак определяется углом φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

- угол φ острый: $\mathbf{ab} > 0$;
- угол φ тупой: $\mathbf{ab} < 0$;
- угол φ прямой: $\mathbf{ab} = 0$.

Мы видим, что два ненулевых вектора ортогональны тогда и только тогда, когда угол между ними прямой. Если один из векторов является нулевым, то скалярное произведение также равно нулю. При этом угол между векторами не определен, но, как уже было отмечено, считают, что нулевой вектор ортогонален любому другому. ►

Скалярное произведение имеет следующие свойства.

1°. Скалярное произведение коммутативно: $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$.

◀ Свойство непосредственно вытекает из определения 2.3, так как, согласно этому определению, скалярное произведение не зависит от порядка сомножителей. ▶

2°. Совместно с умножением на число операция скалярного умножения ассоциативна:

$$(\lambda a)b = \lambda(ab).$$

◀ Если $b = 0$ — нулевой вектор, то обе части доказываемого равенства равны нулю. Если же $b \neq 0$, то, используя выражение скалярного произведения через ортогональную проекцию вектора на направление вектора b и утверждение теоремы 1.2, получаем

$$(\lambda a)b = b(\lambda a) = |b| \operatorname{пр}_b(\lambda a) = \lambda |b| \operatorname{пр}_b a = \lambda(ab). \quad \blacktriangleright$$

3°. Скалярное умножение и сложение векторов связаны свойством дистрибутивности:

$$(a + b)c = ac + bc.$$

◀ Доказательство аналогично предыдущему. При $c = 0$ обе части доказываемого равенства равны нулю. Если же $c \neq 0$, то удобно выразить скалярное произведение через ортогональные проекции векторов на направление вектора c . Используя теорему 1.2, находим

$$(a + b)c = |c| \operatorname{пр}_c(a + b) = |c| (\operatorname{пр}_c a + \operatorname{пр}_c b) = |c| \operatorname{пр}_c a + |c| \operatorname{пр}_c b = ac + bc. \quad \blacktriangleright$$

Величину aa называют **скалярным квадратом вектора a** и обозначают a^2 .

4°. Свойство скалярного квадрата: $a^2 \geq 0$, причем $a^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$.

◀ Действительно, $a^2 = aa = |a| |a| \cos 0 = |a|^2$. Поскольку квадрат длины вектора — неотрицательное число, то неравенство $a^2 \geq 0$ выполнено всегда. Равенство $a^2 = 0$ эквивалентно соотношению $|a| = 0$, т.е. тому, что a — нулевой вектор. ▶

Замечание 2.2. Свойства 2° и 3° часто объединяют в свойство **линейности скалярного произведения** относительно первого сомножителя. Благодаря коммутативности скалярного произведения (свойству 1°) скалярное произведение линейно и по второму сомножителю. Действительно, $a(\lambda b) = (\lambda b)a = \lambda(ba) = \lambda(ab)$, $a(b + c) = (b + c)a = ba + ca = ab + ac$. #

Свойства скалярного произведения часто используют при решении задач.

Пример 2.2. Найдем длину вектора $a = 3c - 2d$ при условии, что $|c| = 5$, $|d| = 4$, а угол φ между векторами c и d равен 60° .

Поскольку $|a| = \sqrt{a^2}$, то, вычисляя скалярный квадрат вектора a , находим, что

$$\begin{aligned} a^2 &= (3c - 2d)(3c - 2d) = 9c^2 - 12cd + 4d^2 = 9|c|^2 - 12|c||d|\cos\varphi + 4|d|^2 = \\ &= 9 \cdot 25 - 12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 0,5 + 4 \cdot 16 = 225 - 120 + 64 = 169. \end{aligned}$$

Следовательно, $|a| = \sqrt{a^2} = 13$.

Пример 2.3. В треугольнике ABC угол при вершине A равен 120° , а длина стороны AC в три раза больше расстояния между вершинами A и B . Найдем острый угол φ между стороной BC и медианой AM треугольника.

Угол φ между стороной BC и медианой AM (рис. 2.6) равен углу между векторами $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AM}$. Согласно определению 2.3 скалярного произведения, косинус угла выражается через скалярное произведение этих векторов и их длины с помощью формулы

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AM}| |\overrightarrow{BC}|}.$$

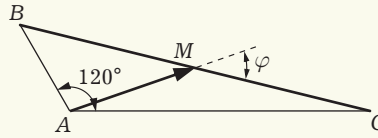


Рис. 2.6

Пусть $|AB| = s$. Тогда $|AC| = 3s$, и поскольку $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, то

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 0,5\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 0,5(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0,5(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$$

и поэтому

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0,5(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0,5(|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2) = 0,5(9s^2 - s^2) = 4s^2.$$

Вычислив длины векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AM}| &= \sqrt{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM}} = 0,5\sqrt{(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})} = \\ &= 0,5\sqrt{(\overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}^2)} = 0,5\sqrt{9s^2 + 6s^2 \cos 120^\circ + s^2} = 0,5s\sqrt{7}, \\ |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}} = \sqrt{(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})} = \\ &= \sqrt{(\overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}^2)} = \sqrt{9s^2 - 6s^2 \cos 120^\circ + s^2} = s\sqrt{13}, \end{aligned}$$

найдем, что

$$\cos \varphi = \frac{4s^2}{0,5s\sqrt{7} \cdot s\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{91}}.$$

Следовательно, острый угол между стороной BC и медианой AM равен $\varphi = \arccos(8/\sqrt{91})$. #

Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из V_3 заданы своими *координатами* в *ортонормированном базисе* $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$: $\mathbf{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$, $\mathbf{b} = \{x_b; y_b; z_b\}$. Это означает, что имеются *разложения* $\mathbf{a} = x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = x_b\mathbf{i} + y_b\mathbf{j} + z_b\mathbf{k}$. Используя их и свойства 1°–4° скалярного произведения, вычислим

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= (x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k})(x_b\mathbf{i} + y_b\mathbf{j} + z_b\mathbf{k}) = \\ &= x_ax_b\mathbf{ii} + x_ay_b\mathbf{ij} + x_az_b\mathbf{ik} + y_ax_b\mathbf{ji} + y_ay_b\mathbf{jj} + y_az_b\mathbf{jk} + z_ax_b\mathbf{ki} + z_ay_b\mathbf{kj} + z_az_b\mathbf{kk} = \\ &= x_ax_b\mathbf{i}^2 + y_ay_b\mathbf{j}^2 + z_az_b\mathbf{k}^2 = x_ax_b + y_ay_b + z_az_b. \end{aligned}$$

Окончательный ответ получен с учетом того, что ортонормированность базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ означает выполнение равенств $\mathbf{ij} = \mathbf{ik} = \mathbf{jk} = 0$, $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1$. Таким образом,

$$\mathbf{ab} = x_ax_b + y_ay_b + z_az_b, \quad (2.14)$$

т.е. скалярное произведение векторов в ортонормированном базисе равно сумме попарных произведений одноименных координат.

Из теоремы 2.7 и формулы (2.14) получаем следующий **критерий ортогональности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$** :

$$x_ax_b + y_ay_b + z_az_b = 0. \quad (2.15)$$

Вспомним, что, согласно определению 2.3 скалярного произведения, $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi$, где $\varphi = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Зная, как выражается скалярное произведение и длины векторов через их координаты в ортонормированном базисе, можно вычислить и косинус угла между ненулевыми векторами. Действительно, исходя из формулы

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|},$$

получаем

$$\cos \varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}. \quad (2.16)$$

В случае, когда $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_2$ и известны координаты этих векторов в ортонормированном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}$: $\mathbf{a} = x_a \mathbf{i} + y_a \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = x_b \mathbf{i} + y_b \mathbf{j}$, справедливы формулы, аналогичные (2.14)–(2.16):

для вычисления скалярного произведения

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = x_a x_b + y_a y_b; \quad (2.17)$$

для критерия ортогональности

$$x_a x_b + y_a y_b = 0;$$

для косинуса угла между ненулевыми векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}.$$

Пример 2.4. Найдем значения параметра t , при которых векторы $\mathbf{a} = \{t; 1 - t; 7\}$ и $\mathbf{b} = \{t + 1; 2; -2\}$, заданные своими координатами в ортонормированном базисе, ортогональны.

Используя критерий (2.15) ортогональности векторов, получаем уравнение

$$t(t + 1) + 2(1 - t) - 14 = 0$$

относительно параметра t . Решая это квадратное уравнение, находим, что лишь при $t = -3$ и $t = 4$ данные векторы ортогональны.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 2. Базис. Скалярное произведение	9
2.1. Линейная зависимость и независимость векторов	9
2.2. Базис	11
2.3. Вычисления в координатах	13
2.4. Скалярное произведение	16