

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект лекций

Для студентов всех специальностей

Москва
2009

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Лекция 1

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Скалярные и векторные величины. Понятие геометрического вектора (направленного отрезка). Нуль-вектор, единичный вектор (орт). Коллинеарные и компланарные векторы. Равенство векторов. Связанные, скользящие, свободные векторы. Линейные операции над векторами, свойства этих операций. Ортогональная проекция векторов на направление. Теоремы о проекциях

1.1. Векторные и скалярные величины

В прикладных науках оперируют величинами различного характера. В качестве примера обратимся к величинам, встречающимся в физике и механике. Такие величины, как массу и объем, характеризуют количественным значением, которое по отношению к некоторому эталону (единице измерения) задают действительным числом. Поэтому их называют **скалярными**. Напротив, скорость, ускорение, сила характеризуются не только количественным значением, но и направлением. Их называют **векторными величинами**.

Определение 1.1. *Геометрическим вектором* (также *направленным отрезком*) называют любой отрезок, на котором выбрано одно из двух возможных направлений (рис. 1.1).

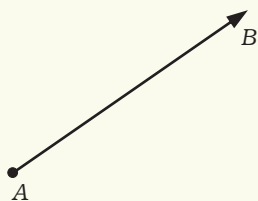


Рис. 1.1

Любой отрезок однозначно определяется своими концами, поэтому одно из двух возможных направлений для данного отрезка можно задать, указав порядок концов, т.е. от какого конца отрезка следует начать движение в заданном направлении, для того чтобы, двигаясь по отрезку, попасть в его другой конец. Это позволяет определить геометрический вектор просто как упорядоченную пару точек: первую точку в паре называют **началом геометрического вектора**, а вторую — его **концом**. Начало геометрического вектора называют также **точкой его приложения**.

Обозначение: если точка A является началом геометрического вектора, а точка B — его концом, то геометрический вектор обозначают $\overline{AB}$ или $\vec{AB}$.

Важной характеристикой геометрического вектора $\vec{AB}$ является его **модуль**, или **длина**. Модуль вектора $|\vec{AB}|$ равен длине $|AB|$ отрезка, соединяющего его начало A и конец B . Геометрический вектор называют **ненулевым**, если его длина положительна. Длина, равная нулю, соответствует ситуации, когда начало и конец геометрического вектора совпадают. В этом случае геометрический вектор называют **нулевым** или **нуль-вектором** и обозначают 0 . Если длина геометрического вектора равна единице, его называют **ортом** или **единичным вектором**.

Для нуль-вектора понятие направления теряет смысл, так как начало и конец у него совпадают. Однако такому геометрическому вектору удобно приписать произвольное направление, которое устанавливают в зависимости от конкретной ситуации.

1.2. Типы векторов и их взаимное расположение

Определение 1.2. Два геометрических вектора называют **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой¹ или на параллельных прямых.

Про пару коллинеарных геометрических векторов иногда говорят, что один из них коллинеарен другому.

Все пары коллинеарных геометрических векторов можно разделить на две группы:

- **однонаправленные** (или **сонаправленные**) **коллинеарные геометрические векторы**, имеющие совпадающие направления;
- **противоположно направленные коллинеарные геометрические векторы**, имеющие противоположные направления.

По определению считаем, что **нуль-вектор** коллинеарен любому другому. Определение 1.2 распространяется очевидным образом на любое число геометрических векторов.

Определение 1.3. Три геометрических вектора называют **компланарными**, если эти векторы лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости.

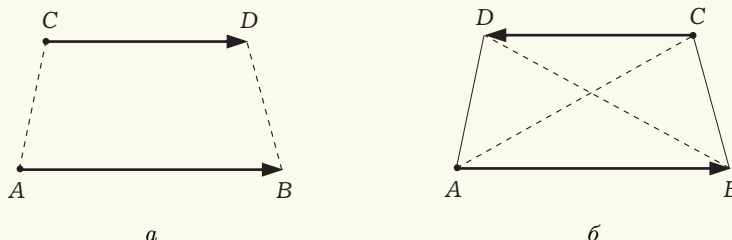


Рис. 1.2

Это определение теряет смысл, если его сформулировать для двух геометрических векторов, потому что любые два геометрических вектора лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости. Однако можно говорить о четырех компланарных геометрических векторах или об их большем числе.

Определение 1.4. Два геометрических вектора называют **равными**, если:

- они коллинеарны и однонаправлены;
- их длины совпадают.

В соответствии с определением 1.4 равные геометрические векторы могут иметь различные *точки приложения*, но задают одно и то же направление и имеют одинаковые *длины*. В этом случае, т.е. когда заданы направление и длина, но не фиксируется точка приложения, говорят, что задан **свободный вектор**. Термин подчеркивает, что точка приложения геометрического вектора может меняться произвольно. В дальнейшем для удобства свободные векторы мы будем называть просто **векторами**. Векторы обозначают одной строчной буквой с дополнительной чертой или стрелкой вверх: $\vec{a}$ или $\vec{a}$. Распространенным является также обозначение вектора полужирным шрифтом ***a***, которое в дальнейшем мы и будем использовать.

Разный характер действия векторов в прикладных задачах приводит к необходимости рассматривать другие типы векторов. Например, вектор угловой скорости и вектор силы, действующей на абсолютно твердое тело, можно перемещать только вдоль прямых, на которых они находятся. Такие векторы называют **скользящими векторами**. Наконец, геометрические векторы, точка приложения которых не может изменяться, называют еще **связанными векторами**. К ним относятся, например, скорости в потоке жидкости или газа.

¹Говоря, что геометрический вектор лежит на прямой, мы подразумеваем очевидную ситуацию, когда начало и конец вектора лежат на этой прямой.

Пример 1.1. В зависимости от учета тех или иных конкретных условий одну и ту же *векторную величину* иногда удобно рассматривать как свободный, скользящий или связанный вектор. Например, вектор ускорения земного притяжения является связанным вектором, поскольку его модуль и направление зависят от расположения точки приложения относительно центра Земли. Поэтому при расчете траектории полета, например с Земли на Луну, его считают связанным вектором. Однако в задаче о движении снаряда при стрельбе на небольшую по сравнению с радиусом Земли дальность изменения вектора ускорения земного притяжения вдоль траектории снаряда незначительны и его принимают постоянным по модулю и направленным вертикально вниз, т.е. считают свободным вектором. Учет кривизны поверхности Земли приведет к необходимости считать этот вектор уже скользящим, т.е. постоянным при перемещениях лишь вдоль радиуса к центру Земли.

Замечание 1.1. Многие понятия, связанные с геометрическими векторами, переносятся и на свободные векторы. Так, говорят о *начале (точке приложения) вектора, конце вектора, модуле (длине) вектора*. Рассматривают *векторы ненулевые* (включая *единичные*, или *орты*) и *нулевые (нуль-векторы)*, *векторы коллинеарные* и *векторы компланарные*. Коллинеарные векторы могут быть *однонаправленными (сонаправленными)* и *противоположно направленными*.

1.3. Линейные операции и их свойства

Обсуждение векторных операций начнем с двух из них — сложения векторов и умножения вектора на число. Эти операции часто объединяют общим термином *линейные операции*.

Определение 1.5. Суммой $a + b$ двух векторов a и b называют вектор c , построенный по следующему *правилу треугольника*. Совместим начало вектора b с концом вектора a . Тогда суммой этих векторов будет вектор c , начало которого совпадает с началом a , а конец — с концом b (рис. 1.3).

Замечание 1.2. Наряду с правилом треугольника существует *правило параллелограмма*. Выбрав для векторов a и b общее начало, строим на этих векторах параллелограмм. Тогда диагональ параллелограмма, выходящая из общего начала векторов, определяет их сумму (рис. 1.4). Отметим, что если векторы a и b коллинеарны, то их сумму по правилу параллелограмма определить нельзя, а правило треугольника применимо и в этом случае.

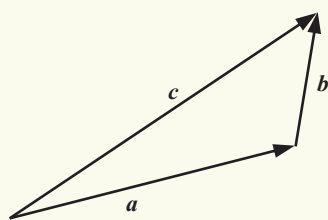


Рис. 1.3

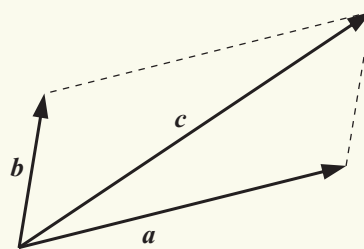


Рис. 1.4

Замечание 1.3. В определении 1.5 существует произвол в выборе *точки приложения векторов*, но результаты, получаемые с различными точками приложения, равны между собой. #

1°. Сложение векторов коммутативно: $a + b = b + a$.

◀ Если складываемые векторы неколлинеарны, то свойство непосредственно вытекает из правила параллелограмма, так как в этом правиле порядок векторов не играет роли. Если же векторы коллинеарны, то их сложение сводится к сложению или вычитанию их длин в зависимости от того, являются ли складываемые векторы *однонаправленными* или *противоположно направленными*. ►

2°. Сложение векторов ассоциативно: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

◀ Доказать это свойство проще всего при помощи правила треугольника. Выберем в качестве начала вектора $\mathbf{a}$ точку A (рис. 1.5), и пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. Совместим начало вектора $\mathbf{b}$ с точкой B , и пусть $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$. Наконец, начало вектора $\mathbf{c}$ совместим с концом C вектора $\mathbf{b}$, и пусть тогда $\mathbf{c} = \overrightarrow{CD}$.

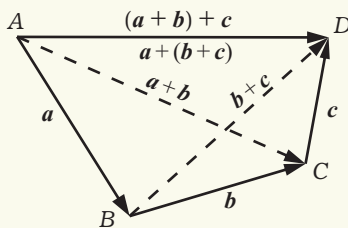


Рис. 1.5

Непосредственно из построения получаем

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c},$$

т.е. геометрический вектор $\overrightarrow{AD}$ изображает и левую часть доказываемого равенства, и правую. ▶

3°. Существует такой вектор $\mathbf{0}$, что для любого вектора $\mathbf{a}$ выполняется равенство $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$.

◀ Действительно, непосредственной проверкой можно убедиться, что указанному условию удовлетворяет нулевой вектор. Проверку удобно проводить при помощи правила треугольника. ▶

4°. Для любого вектора $\mathbf{a}$ существует такой вектор $\mathbf{b}$, что $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

◀ Действительно, таким является вектор $(-\mathbf{a})$, **противоположный** к вектору $\mathbf{a}$, т.е. вектор, коллинеарный $\mathbf{a}$, той же длины, что и $\mathbf{a}$, но *противоположно направленный*. Если в качестве точки приложения этого вектора выбрать конец вектора $\mathbf{a}$, то конец противоположного вектора совпадет с началом вектора $\mathbf{a}$. Согласно правилу треугольника, суммой векторов $\mathbf{a}$ и $(-\mathbf{a})$ будет вектор с совпадающими началом и концом, т.е. нулевой вектор. ▶

5°. Для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ существует такой вектор $\mathbf{x}$, что $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$. При этом вектор $\mathbf{x}$ определен однозначно.

◀ Указанному условию удовлетворяет вектор $(-\mathbf{a}) + \mathbf{b}$, так как с учетом свойств 2°–4°

$$\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{a} + ((-\mathbf{a}) + \mathbf{b}) = (\mathbf{a} + (-\mathbf{a})) + \mathbf{b} = \mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Если вектор $\mathbf{x}$ удовлетворяет равенству $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$, то, прибавив слева к обеим частям последнего равенства вектор $(-\mathbf{a})$, получим с учетом свойств 1°, 2°, что $\mathbf{x} = (-\mathbf{a}) + \mathbf{b}$. Действительно,

$$(-\mathbf{a}) + (\mathbf{a} + \mathbf{x}) = ((-\mathbf{a}) + \mathbf{a}) + \mathbf{x} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x} = (-\mathbf{a}) + \mathbf{b}.$$

Значит, вектор $\mathbf{x}$ определен однозначно. ▶

Свойство 5° позволяет ввести операцию вычитания векторов.

Определение 1.6. Разностью $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называют такой вектор $\mathbf{x}$, что $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

С алгебраической точки зрения переход от $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$ к $\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ (в соответствии с определением 1.6) означает, что при переносе вектора в другую часть равенства перед ним надо менять знак.

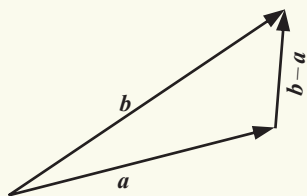


Рис. 1.6

Практически для вычисления разности векторов можно воспользоваться правилом треугольника. Совместим начала векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, тогда вектор с началом в конце вектора $\mathbf{a}$ и концом, совпадающим с концом $\mathbf{b}$, равен разности $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ этих векторов (рис. 1.6).

Операцию вычитания векторов также относят к линейным, так как она определяется операцией сложения и является обратной сложению.

Определение 1.7. Произведением вектора $\mathbf{a}$ на число λ называют вектор $\lambda\mathbf{a}$, коллинеарный вектору $\mathbf{a}$, с длиной $|\lambda| |\mathbf{a}|$, *однаправленный* с $\mathbf{a}$ при $\lambda > 0$ и *противоположно направленный* при $\lambda < 0$.

Замечание 1.4. Если $\lambda = 0$, то, согласно этому определению, вектор $0\mathbf{a}$ должен иметь длину $0 |\mathbf{a}| = 0$, т.е. должен быть нулевым вектором. Поэтому, хотя остальные характеристики и не определены (коллинеарность, направленность), произведение вектора на число 0 задано однозначно: $0\mathbf{a}$ есть нулевой вектор.

Пример 1.2. Произведение вектора $\mathbf{a}$ на число -1 есть вектор, противоположный к $\mathbf{a}$, т.е. $(-1)\mathbf{a} = (-\mathbf{a})$. #

Операция умножения вектора на число обладает свойством ассоциативности, а совместно с операцией сложения она удовлетворяет двум свойствам дистрибутивности.

6°. Умножение вектора на число ассоциативно: $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$.

◀ Действительно, обе части равенства представляют собой векторы, коллинеарные исходному вектору $\mathbf{a}$. Поэтому равенство будет верным, если совпадут длины векторов и их направления. Равенство длин векторов очевидно. Если числа λ и μ имеют один и тот же знак, то векторы в обеих частях будут *однаправлены* с вектором $\mathbf{a}$. Если же λ и μ имеют противоположные знаки, то оба вектора в равенстве являются *противоположно направленными* по отношению к $\mathbf{a}$. Итак, в любом случае в равенстве стоят векторы одного направления и одинаковой длины, т.е. *равные векторы*. ►

7°. Умножение вектора на число дистрибутивно относительно векторов: $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

◀ При $\lambda = 0$ свойство очевидно, так как в этом случае слева будет нулевой вектор (произведение вектора на число 0), а справа — сумма двух нулевых векторов. Если $\lambda \neq 0$, свойство вытекает из правила параллелограмма и свойств подобных параллелограммов. На рис. 1.7 представлены случаи: а) $\lambda > 0$; б) $\lambda < 0$. ►

8°. Умножение вектора на число дистрибутивно относительно чисел: $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$.

◀ В указанном равенстве — три коллинеарных вектора. Поэтому доказательство сводится к подсчету длин векторов, которым присвоены знаки, учитывающие направление. Если λ и μ имеют положительные знаки, то все три вектора в равенстве имеют одно направление, совпадающее с направлением вектора $\mathbf{a}$. При сложении этих векторов справа складываются их длины, а доказываемое равенство равносильно следующему: $(\lambda + \mu) |\mathbf{a}| = \lambda |\mathbf{a}| + \mu |\mathbf{a}|$. Случай, когда λ и μ отрицательны, аналогичен.

Пусть λ и μ имеют противоположные знаки. Для определенности будем считать, что $\lambda > 0$, $\mu < 0$. Противоположный случай сводится к этому заменой обозначений и учетом коммутативности сложения чисел и векторов. Если $\lambda > 0$, $\mu < 0$, то при сложении векторов $\lambda\mathbf{a}$ и $\mu\mathbf{a}$ вычитаются их длины, так как складываются векторы противоположного направления.

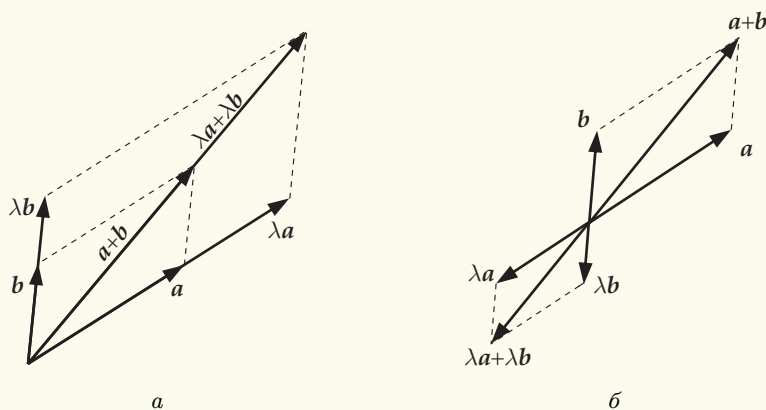


Рис. 1.7

Получаемый при этом вектор будет однонаправленным с $\mathbf{a}$ при $|\lambda| > |\mu|$ и противоположно направленным при $|\lambda| < |\mu|$. Его длина, согласно определению произведения вектора на число, равна $|\lambda + \mu||\mathbf{a}|$. Учитывая направление этого вектора, заключаем, что он равен $(\lambda + \mu)\mathbf{a}$, т.е. доказываемое равенство верно и при противоположных знаках коэффициентов λ и μ .

Наконец, отметим тривиальный случай, когда один из коэффициентов λ и μ равен нулю. Например, если $\mu = 0$, то равенство $(\lambda + \mu)|\mathbf{a}| = \lambda|\mathbf{a}| + \mu|\mathbf{a}|$ сводится к равенству $(\lambda + 0)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + 0\mathbf{a}$, вытекающему из свойства 3° и определения 1.7. ►

1.4. Ортогональная проекция

Пусть на плоскости заданы прямая L и точка A . Опустим из точки A на прямую L перпендикуляр (рис. 1.8, а). Тогда его основание (точку O) называют **ортогональной проекцией точки A на прямую L** . Если прямая L и точка A заданы в пространстве, то в этом случае ортогональной проекцией точки A на прямую L называют точку O пересечения прямой L с перпендикулярной ей плоскостью, проходящей через точку A (рис. 1.8, б). Если точка A лежит на прямой L , то она совпадает со своей ортогональной проекцией на L .

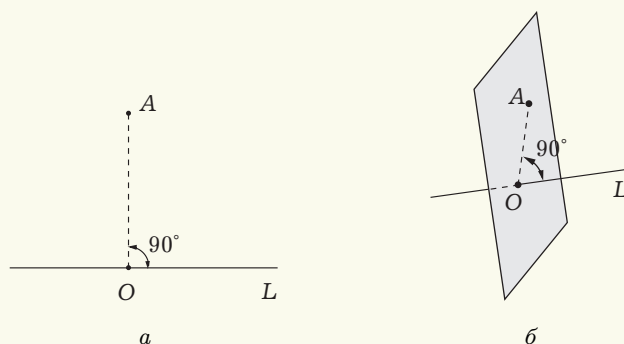


Рис. 1.8

Для вектора $\overrightarrow{AB}$ (на плоскости или в пространстве) можно построить ортогональные проекции на прямую L его начала и конца (рис. 1.9). Вектор $\overrightarrow{O_A O_B}$, соединяющий эти проекции O_A и O_B и лежащий на прямой L , называют **ортогональной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую L** .

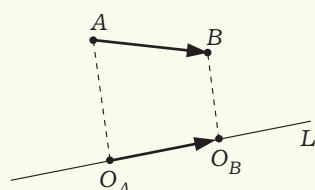


Рис. 1.9

Прямую, на которой задано одно из двух возможных направлений, называют **осью**. Выбранное направление на оси изображают с помощью стрелки на соответствующем конце оси. Ортогональную проекцию $\overrightarrow{O_A O_B}$ вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l можно полностью описать длиной вектора $\overrightarrow{O_A O_B}$, приписав ей знак,

указывающий направление вектора. Если направление $\overrightarrow{O_A O_B}$ совпадает с заданным направлением оси, то берут знак плюс, а если направление вектора противоположно направлению оси, то берут знак минус. Длину вектора $\overrightarrow{O_A O_B}$ со знаком, определяющим направление этого вектора, называют **ортогональной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l** и обозначают $\text{пр}_l a$.

Обратим внимание на то, что ортогональной проекцией вектора на ось является число, в то время как ортогональная проекция вектора на прямую — это вектор. Чтобы вектору соответствовало число как его проекция, на прямой нужно выбрать одно из двух возможных направлений.

Каждый *ненулевой вектор l* однозначно определяет ось: его можно рассматривать расположенным на некоторой прямой и задающим на ней направление. Ортогональную проекцию вектора на такую ось называют **ортогональной проекцией этого вектора на направление** вектора l .

Угол между направлениями двух ненулевых векторов называют **углом между этими векторами**. Угол может изменяться в пределах от 0 до π . Крайние значения 0 и π отвечают *коллинеарным векторам*, соответственно *однонаправленным* и *противоположно направленным*. Если хотя бы один из двух векторов является *нулевым*, то угол между такими векторами не определен. Удобно, однако, считать, что в этом случае угол имеет произвольное значение. Так, нулевой вектор коллинеарен любому другому, что формально соответствует углу 0 (или π). Конкретное значение, приписываемое углу между нулевым вектором и каким-либо другим, выбирают исходя из ситуации.

Теорема 1.1. Ортогональная проекция вектора a на направление ненулевого вектора l равна длине $|a|$, умноженной на косинус угла φ между векторами a и l , т.е.

$$\text{пр}_l a = |a| \cos(\widehat{a, l}),$$

где $(\widehat{a, l})$ — угол между векторами a и l .

◀ Пусть вектор l лежит на прямой L , а его началом является точка A . Совместим начало вектора a с точкой A , и пусть его концом будет точка B (рис. 1.10). Построим ортогональную проекцию C точки B на прямую L . Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ является ортогональной проекцией вектора $a = \overrightarrow{AB}$ на прямую L .

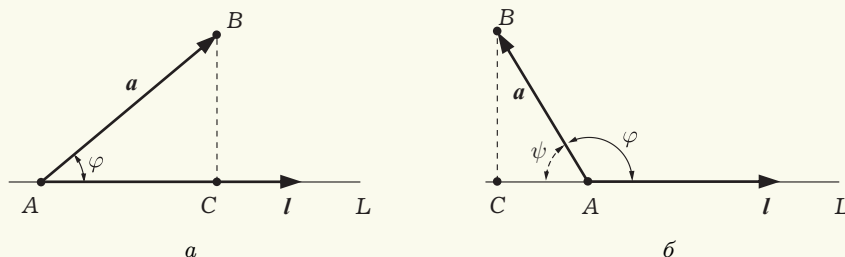


Рис. 1.10

Если угол φ между векторами a и l острый (как это показано на рис. 1.10, а), то конец вектора l и точка C лежат по одну сторону от точки A . В этом случае проекция a на направление вектора l равна длине $|AC| = |AB| \cos \varphi$ катета AC треугольника ABC .

Если угол φ тупой (см. рис. 1.10, б), то конец вектора l и точка C лежат по разные стороны от точки A . Это значит, что векторы $\overrightarrow{AC}$ и l имеют противоположные направления, а проекция вектора a равна $-|AC|$. В треугольнике ABC угол ψ , прилежащий к катету AC , равен $\pi - \varphi$, поэтому $|AC| = |AB| \cos(\pi - \varphi) = -|AB| \cos \varphi$.

Если же $\varphi = \frac{\pi}{2}$ или $a = 0$, то точка C совпадает с точкой A и вектор $\overrightarrow{AC}$ является нулевым вектором. Однако $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, следовательно, и в этом случае утверждение теоремы справедливо. ►

Теорема 1.2. Ортогональная проекция *суммы векторов* на направление ненулевого вектора равна сумме их ортогональных проекций на направление этого вектора, а при умножении вектора на число его ортогональная проекция на направление ненулевого вектора умножается на то же число:

$$\text{пр}_l(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{пр}_l \mathbf{a} + \text{пр}_l \mathbf{b}, \quad \text{пр}_l(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \text{пр}_l \mathbf{a}.$$

◀ Доказательство следует из рис. 1.11. В случае, изображенном на рис. 1.11, а, имеем $\text{пр}_l \mathbf{a} = |AB|$, $\text{пр}_l \mathbf{b} = -|BC|$, $\text{пр}_l(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = |AC| = |AB| - |BC|$. В случае, изображенном на рис. 1.11, б, $\text{пр}_l \mathbf{a} = |AB|$ и, если $\lambda > 0$, $\text{пр}_l(\lambda \mathbf{a}) = |AE| = \lambda |AB|$. Остальные варианты (точка C не принадлежит отрезку AB в случае а, $\lambda \leq 0$ в случае б) рассматриваются аналогично. ▶

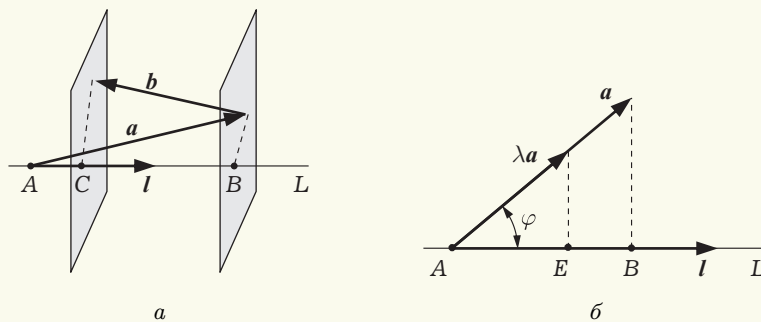


Рис. 1.11

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 1. Линейные операции над векторами	1
1.1. Векторные и скалярные величины	1
1.2. Типы векторов и их взаимное расположение	2
1.3. Линейные операции и их свойства	3
1.4. Ортогональная проекция	6