

# Задачи для подготовки к экзамену по курсу "Устойчивость движения"

1. Используя квадратичную функцию Ляпунова, исследуйте на устойчивость положение равновесия ( $x = y = 0$ ) системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + 5x^2, \\ \dot{y} = -2x + y. \end{cases}$$

Является ли оно глобально асимптотически устойчивым?

2. Используя квадратичную функцию Ляпунова, покажите устойчивость и оцените область притяжения нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = (-5x + 4y)(1 + x), \\ \dot{y} = (-14x + 3y)(1 + x). \end{cases}$$

3. Используя квадратичную функцию Ляпунова, исследуйте устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 + 2y, \\ \dot{y} = -2y(x^2 - 2y^2) + x. \end{cases}$$

4. Используя квадратичную функцию Ляпунова, исследуйте устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y - x^3, \\ \dot{y} = -x - y - y^3. \end{cases}$$

Является ли оно глобально асимптотически устойчивым?

5. Используя квадратичную функцию Ляпунова, исследуйте устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + 2y^2, \\ \dot{y} = -5y - xy. \end{cases}$$

6. Используя в качестве функции Ляпунова  $V(x, y) = 2x^4 + y^2$ , покажите асимптотическую устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y + y^3, \\ \dot{y} = -4x^3 - x^2y - 4x^3y^2. \end{cases}$$

Является ли оно глобально асимптотически устойчивым?

7. Покажите, что если начальная точка  $(x(0), y(0))$  расположена достаточно близко к точке  $(0, 0)$ , то соответствующее решение  $(x(t), y(t))$  системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x(t-2) + y + xy + t, \\ \dot{y} = x - y + x^2 - t - 1 \end{cases}$$

приближается к кривой  $\{x = 0, y = -t\}$  при  $t \rightarrow \infty$ .

8. Используя квадратичную функцию Ляпунова, покажите, что положение равновесия системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\alpha(t) & 1 \\ -2 & -\alpha(t) \end{pmatrix} x, \quad 1 \leq \alpha(t) \leq 2$$

экспоненциально устойчиво. Здесь  $\alpha(t)$  — непрерывная функция.

9. Используя квадратичную функцию Ляпунова, покажите, что положение равновесия системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2\alpha(t) & -2 \end{pmatrix} x, \quad |\alpha(t)| \leq 2$$

экспоненциально устойчиво. Здесь  $\alpha(t)$  — непрерывная функция.

10. Используя квадратичную функцию Ляпунова, покажите, что положение равновесия системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -6\alpha(t) & -7\alpha(t) \\ 5\alpha(t) & 3\alpha(t) \end{pmatrix} x, \quad \alpha(t) \geq 2$$

экспоненциально устойчиво. Здесь  $\alpha(t)$  — непрерывная функция.

11. Найдите все положения равновесия системы и исследуйте их устойчивость

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 4y^2. \end{cases}$$

12. Исследуйте устойчивость нулевого решения следующей системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 4e^y + 4, \\ \dot{y} = y^2 + e^z - 1, \\ \dot{z} = 2e^x + y^2 - 3\sin(z) - 2. \end{cases}$$