ВОПРОСЫ И ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА» /*2009г*

ИУ-5,7 2 курс, 4 семестр

1. Случайные события. Операции над событиями.

Вопросы

Определения случайного испытания, пространства элементарных событий.

Классическое, геометрическое и частотное определения вероятности. Аксиоматическое определение вероятности, ее основные свойства. Теорема сложения вероятностей.

Определение условной вероятности. Определение полной группы случайных событий. Вывод формул полной вероятности и Байеса.

Определение независимых испытаний. Вывод формулы Бернулли и следствий из нее.

Типовые задачи

1. Играя в спортлото, владелец одной карточки зачеркивает 6 номеров из 49 (6 номеров из 49 являются выигрышными). Найти вероятность того, что он угадает: а) 3 номера; б) 4 номера ; в) 6 номеров; г) не менее 3 номеров.

2. Среди 25 экзаменационных билетов имеется 5 «счастливых». Два студента по очереди берут билет. Кто из них, первый или второй, вытащит «счастливый» билет с большей вероятностью?

3. Какова вероятность того, что из трех наудачу взятых отрезков можно составить треугольник, если длина каждого из них не превышает L и все его значения равновозможные

4. Из полной колоды карт (52 карты) наудачу извлекается одна карта. Рассматриваются события: A -- появление туза ; B – появление карты красной масти; C – появление бубнового туза; D -- появление десятки. Зависимы или независимы следующие пары событий:

а) A и B; б) A и C; в) B и C; г) B и D; д) C и D?

5. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Зачет считается сданным, если студент отвечает на один вопрос, или после отказа отвечать на первый предложенный вопрос он отвечает на второй. Какова вероятность студенту сдать зачет?

6**.** Из полной колоды карт (52 карты) наудачу одновременно вынимают 4 карты. Рассматриваются события:

A – среди вынутых карт будет хотя бы одна бубновая;

B – среди вынутых карт будет хотя бы одна червовая.

Найдите вероятность события $A \cup B$.

7. Имеется две урны: в первой 3 белых шара и 5 черных; во второй – 4 белых и 4 черных. Из первой урны во вторую наудачу перекладывают 2 шара.

После этого из второй урны наудачу извлекают 1 шар. Найдите вероятность того, что этот шар будет белым.

8. Изделия некоторого производства содержат 5% брака. Найти вероятность того, что среди 5 взятых наугад изделий:

а) будут два бракованных;

б) нет ни одного бракованного.

9. Экзамен состоит из 6-ти вопросов. На каждый вопрос дано 3 ответа, среди которых один правильный. Какова вероятность того, что методом простого угадывания удаётся ответить по крайней мере на пять вопросов?

10. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность попадания в цель не менее двух пуль, если производится 5000 выстрелов.

2. Случайные величины. Законы распределения случайных величин.

Вопросы

Определение случайной величины, основные свойства ее функции распределения.

Определение дискретной случайной величины. Теорема о виде функции распределения дискретной случайной величины.

Определение непрерывной случайной величины. Основные свойства ее плотности распределения вероятностей.

Определение случайного вектора, основные свойства его функции распределения.

Определение непрерывного случайного вектора, основные свойства его плотности распределения вероятностей.

Нахождение условного закона распределения для двумерного дискретного и непрерывного случайного вектора. Независимые случайные величины.

Типовые задачи

1. Случайная величина X имеет функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

а) Постройте график плотности распределения вероятностей;

б) Найдите $P\{0,5\le X<1\}$.

2. Двумерная случайная величина (X; Y) имеет плотность распределения $p(x,y)=\dfrac{C}{\pi^2(3+x^2)(1+y^2)}$. Найдите:

а) величину С;

б) функцию распределения F(x; y).

В) вероятность попадания случайной величины в квадрат, ограниченный прямыми: x=0; y=0; x=1; y=1.

3. Найдите плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины, функция распределения которой имеет вид:

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-ax})(1-e^{-by}), \quad x>0 \text{ и } y>0\\ 0, \quad x\le 0 \quad \text{или} \quad y\le 0\\ (\alpha>0; \quad \beta>0)\end{cases}$$

4. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Построить ряды распределения случайных величин:

а) $Y=X^2+1$.

б) $Y=|X|$.

5. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет следующий закон распределения:

Y\X	-3	-1	2	3
-1	0,010	0,025	0,035	0,030
0	0,040	0,100	0,140	0,120
1	0,050	0,125	0,175	0,150

Найдите:

а) Условную вероятность P{X=-1\ Y=0}.

б) Условный закон распределения случайной величины Y при условии X=-1.

6. Двумерная случайная величина (X, Y) равномерно распределена в треугольнике с вершинами: O(0;0), A(3;0), B(0;2).

Найдите:

а) Плотности распределения случайных величин X и Y.

б) Условные плотности распределения $p_1(x\setminus y)$ и $p_2(y\setminus x)$.

Зависимы ли случайные величины X и Y.

3. Законы распределения функций случайных величин. Числовые характеристики случайных величин.

Вопросы

Определение закона распределения монотонной и кусочно-монотонной скалярной функции случайной величины.

Определение закона распределения скалярной функции случайного вектора.

Определение закона распределения суммы двух случайных величин.

Определение и основные свойства математического ожидания и дисперсии случайной величины.

Определение и основные свойства ковариации и коэффициента корреляции двух случайных величин.

Определение условного математического ожидания и его связь с безусловным математическим ожиданием.

Определение биномиального, пуассоновского, равномерного, нормального и экспоненциального распределений, двумерного нормального распределения.

Типовые задачи

1. Число d – частиц, достигающих счётчика в некотором опыте, является случайной величиной X, распределённой по следующему закону:

X	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
P	**0,021**	**0,081**	**0,156**	**0,201**	**0,195**	**0,097**	**0,097**	**0,054**	**0,026**	**0,011**	**0,007**

Найти: а) Математическое ожидание и дисперсию числа частиц, достигающих счётчика.

б) Вероятность того, что число частиц, достигающих счётчика, не меньше четырёх.

2. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & |x|\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти: $MX; DX$.

3. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, соответственно, равны 2 и 10. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y=2X+5.

4. Случайная точка на плоскости распределена по следующему закону:

Y\X	0	1
-1	0,10	0,15
0	0,15	0,25
1	0,20	0,15

Найти математическое ожидание, матрицу ковариации и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X, Y).

5. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases}4xye^{-x^2-y^2},\ x,y>0,\\ 0,\ x<0\vee y<0.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и ковариационную матрицу случайной величины (X, Y).

6. Двумерная случайная величина (X, Y) равномерно распределена в квадрате, ограниченном прямыми:

x+y+1=0; x-y+1=0; x-y-1=0; x+y-1=0.

Показать, что случайные величины X и Y зависимы, но не коррелированны.

7. Случайная величина (X,Y) равномерно распределена внутри круга радиуса 1 с центром в начале координат. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z=XY.

8. Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X распределена по нормальному закону: $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$. Случайная величина Y распределена равномерно в интервале (0;2). Найти: M(X+Y); D(X+Y); M(X-Y); D(X-Y); M(XY).

9. Случайный вектор (X,Y) имеет нормальный закон распределения с вектором средних (-3;4) и матрицей ковариаций $\begin{pmatrix}16 & 12\\ 12 & 25\end{pmatrix}$. Найти:

а) $M(Y\mid X=1)$

б) $P\{|Y|\le 7\setminus X=1\}$

в) $P\{|X|\le 3\}$

4. Закон больших чисел. Предельные теоремы теории вероятностей.

Вопросы

Вывод неравенств Чебышёва.

Доказательство закона больших чисел в форме Чебышёва и его следствия для схемы Бернулли.

Формулировка центральной предельной теоремы и доказательство интегральной теоремы Муавра — Лапласа.

Типовые задачи

1. Оценить вероятность того, что среднее квадратичное отклонение любой случайной величины от её математического ожидания будет по абсолютной величине не более трёх средних квадратичных отклонений этой величины (правило 3σ).

2. Математическое ожидание количества выпавших осадков в данной местности составляет 55см. Оценить вероятность того, что в данной местности выпадает осадков > 165см.

3. Случайная величина X является средней арифметической 3200 независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием, равным 3, и дисперсией, равной 2. Найти вероятность того, что X примет значение в промежутке (2,925; 3,075).

4. Производится обследование для вычисления удельного веса заболеваний гриппом среди всех заболеваний. Сколько амбулаторных карт должно войти в обследование, чтобы отклонение относительной частоты от вероятности не превышало 0,06 с вероятностью 0,9972.

5. Элементы математической статистики.

Вопросы

Определение законов распределения «хи-квадрат», Стьюдента, Фишера.

Определение и свойства выборочных функций распределения и плотности.

Определение несмещенности, состоятельности и эффективности точечных оценок. Нахождение параметров равномерного распределения методом моментов. Нахождение параметров биномиального, пуассоновского, равномерного, нормального и экспоненциального распределений методом максимального правдоподобия.

Определение интервальной оценки, доверительного интервала (ДИ), уровня доверия. Построение ДИ для математического ожидания нормально распределенной случайной величины при известной и неизвестной дисперсии. Построение ДИ для дисперсии нормально распределенной случайной величины.

Понятие критерия проверки гипотез. Определение критической области и уровня значимости, ошибок первого и второго рода. Построение оптимального критерия для математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности при известной дисперсии для случая двух простых гипотез.

Проверка гипотезы о математическом ожидании нормальной случайной величины и гипотезы о равенстве математических ожиданий двух нормальных случайных величин.

Проверка гипотезы о величине дисперсии нормальной случайной величины и гипотезы о равенстве дисперсий двух нормальных случайных величин.

Критерий согласия К. Пирсона и его применение.

Метод наименьших квадратов оценивания параметров линейной модели.