

**Примеры задач к экзамену по ОИ И УРМФ.
2 курс, 4 сем., для РЛ1,6, ИУ-10. Лектор - Бутко Я.А.**

Решить задачу Коши:

$$x''(t) + 3x'(t) - 4x(t) = te^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

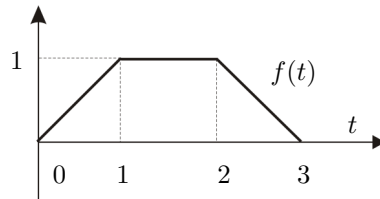
2. Решить задачу Коши:

$$x''(t) - x'(t) = \frac{e^{2t}}{2 + e^t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

3. Решить задачу Коши:

$$x''(t) + 3x'(t) - 4x(t) = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1,$$

где функция $f(t)$ задана графически:



4. Найти фундаментальное решение оператора L , где

$$L[u] = u'' + 4u' + 4u.$$

5. Проверить, является ли данная функция гармонической:

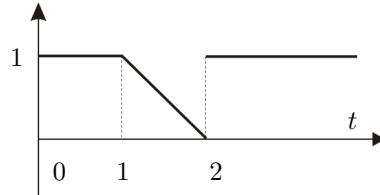
$$u(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + 2x - 3y.$$

6. Найти вторую обобщенную производную функции:

$$f(t) = e^t + 20\eta(t-1) - 3\delta(t+1),$$

где $\eta(t)$ — единичная функция Хевисайда, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

7. Найти обобщенную производную функции $f(t)$, заданной графически:



8. Показать, что обобщенная функция $f(x)$ совпадает с обобщенной функцией $g(x)$, где

$$f(x) = e^x \delta'(x), \quad g(x) = -\delta(x) - \delta'(x),$$

$\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Решение: для любой основной функции φ имеем:

$$\begin{aligned} (f, \varphi) &= (e^x \delta'(x), \varphi(x)) = (\delta'(x), e^x \varphi(x)) = -(\delta(x), (e^x \varphi(x))') = -(\delta(x), (e^x \varphi(x) + e^x \varphi'(x))) = \\ &= -(\delta(x), e^x \varphi(x)) - (\delta(x), e^x \varphi'(x)) = -e^0 \varphi(0) - e^0 \varphi'(0) = -\varphi(0) - \varphi'(0) = \\ &= (-\delta(x) - \delta'(x), \varphi(x)) = (g, \varphi) \end{aligned}$$