

Кафедра математического моделирования

ИУ9, 4-й сем., МЛТА, 2008–2009 уч.г.

Экзаменационная программа

1. Алгебра высказываний. Истинностные функции. Типы формул исчисления высказываний (общезначимые, выполнимые, опровержимые, противоречия). Теорема о *modus ponens*.

2. Подстановки и замены в алгебре высказываний. Теорема о сохранении эквивалентности при подстановке. Теорема о замене эквивалентным. Следствия.

3. Принцип двойственности в алгебре высказываний. Способы получения эквивалентных формул.

4. Функции алгебры логики (булевы функции). Композиция функции. Множество функций и его замыкание. Свойства замыкания. Замкнутые и полные множества функций. Теорема о полном множестве.

5. Понятие базиса в алгебре высказываний. Стандартный базис. ДНФ и КНФ. Совершенные нормальные формы. Теорема существования. Полнота стандартного базиса.

6. Базис Жегалкина, его полнота. Порядок разложения булевой функции в полином Жегалкина.

7. Классы Поста и критерий Поста. Штрих Шеффера и стрелка Пирса. Классы Поста как максимальные замкнутые множества. Доказательство того, что максимальных замкнутых классов помимо классов Поста не существует.

8. Основные положения теории N (язык, аксиомы, правила вывода). Понятие вывода и частного вывода (вывода из гипотез). Дерево вывода. Пример вывода.

9. Теорема о дедукции в исчислении высказываний.

10. Структурные и логические правила естественного вывода в исчислении высказываний.

11. Техника естественного вывода. Примеры обоснования выводимости формул на основе правил естественного вывода (дополнительные правила естественного вывода).

12. Основные свойства формальной теории: непротиворечивость, полнота, разрешимость. Доказательство непротиворечивости и разрешимости теории N .

13. Основные свойства формальной теории: непротиворечивость, полнота, разрешимость. Полнота в широком смысле и полнота в узком смысле. Доказательство полноты теории N в широком смысле.

14. Независимые аксиомы и независимые схемы аксиом. Доказательство независимости схем аксиом теории N .

15. Предикаты в математической логике. Понятие логико-математического языка. Свободные и связанные переменные. Переименование и коллизия переменных при переименовании. Отношение конгруэнтности.

16. Подстановки. Коллизия переменных при подстановке. Подстановка, свободная для данного выражения. Сохранение конгруэнтности при подстановке. Свойство чистоты переменных и лемма о чистоте переменных.

17. Понятие интерпретации логико-математического языка. Оценка выражения. Типы формул алгебры предикатов. Пропозициональные тавтологии и общезначимые формулы. Формулы, истинные (ложные) в данной интерпретации.

18. Основные логические законы алгебры предикатов.

19. Замены в формулах алгебры предикатов. Правило замены эквивалентным и его обоснование.

20. Принцип двойственности в алгебре предикатов. Теорема об эквивалентности двойственных формул.

21. Предваренная нормальная форма и теорема о приведении.

22. Описание теории P : логико-математический язык, аксиомы, правила вывода. Вывод и частный вывод. Доказательство теоремы о дедукции в исчислении предикатов.

23. Правила естественного вывода в исчислении предикатов.

24. Теорема о сохранении истинности в частном выводе. Непротиворечивость теории P .

25. Понятие формальной теории и ее полноты. О полноте исчисления предикатов в широком и узком смысле. Теорема об интерпретируемости непротиворечивой формальной теории.

26. Генценовское исчисление высказываний. Дополнительные правила вывода в этом исчислении.

27. Связь генценовского исчисления высказываний с гильбертовским. Теорема Генцена об устранении сечения в исчислении высказываний.

28. Генценовское исчисление предикатов. Его связь с гильбертовским исчислением предикатов.

29. Построение формальной теории групп. Свойства предиката формального равенства. Простейшие теоремы этой теории.

30. Аксиоматика формальной арифметики. Простейшие теоремы теории, связанные со сложением.

31. Аксиоматика формальной арифметики. Простейшие теоремы теории, связанные с умножением.

32. Понятие скюлемовской стандартной формы. Скюлемовские функции. Об эквивалентности скюлемовской стандартной формы исходной формуле. Теорема о противоречивости скюлемовской стандартной формы.

33. Метод резолюций для исчисления высказываний. Теорема о полноте этого метода в исчислении высказываний.

34. Метод резолюций для исчисления предикатов. Унификация элементарных формул. Примеры резолютивного вывода.

Типы задач в экзаменационных билетах

1. Задачи на линейную независимость и полноту систем функций.
2. Задачи на построение вывода в системах гильбертовского типа.
3. Задачи на построение вывода в системах генценовского типа.
4. Задачи на доказательство теорем в формальных теориях.
5. Задачи на построение скелемовской стандартной формы и метод резолюций.

Примеры задач

1. Выяснить, является ли полной система функций

$$f(x, y, z) = x + y + z, \quad g(x, y) = x \oplus y, \quad h(x) = x + \bar{x}.$$

2. Выяснить является ли независимой система функций

$$f(x) = 0, \quad g(x) = 1, \quad h(x, y, z) = xy + \bar{y}z.$$

3. С помощью техники естественного вывода установить, что в теории **N** выводима следующая формула:

$$(X \rightarrow Y \rightarrow (\neg X \rightarrow \neg Y) \rightarrow (\neg X \rightarrow Y \wedge Z)) \sim (X \vee Y).$$

4. С помощью техники естественного вывода установить, что в теории **P** выводима формула $\forall x \forall y P \rightarrow \forall z P \begin{pmatrix} x & y \\ z & z \end{pmatrix}$.

5. В теории **GV** построить вывод секвенции

$$\vdash (X \rightarrow Y \rightarrow (\neg X \rightarrow \neg Y) \rightarrow (\neg X \rightarrow Y \wedge Z)) \sim (X \vee Y).$$

6. В теории **GP** построить вывод секвенции $\vdash \forall x \forall y P \rightarrow \forall z P \begin{pmatrix} x & y \\ z & z \end{pmatrix}$.

7. В формальной арифметике доказать теорему $(X \leq Y) \sim (X + Z \leq Y + Z)$.

8. Построить скелемовскую стандартную форму для формулы

$$\forall x (\forall x p(x) \rightarrow \forall z q(x, z)) \rightarrow \forall x p(x).$$

9. Методом резолюций доказать общезначимость в алгебре предикатов формулы

$$\forall x \forall y p(x, y) \rightarrow \forall y \forall x p(x, y).$$