

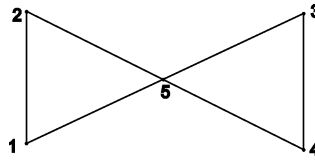
**ВОПРОСЫ по курсу "Дискретная математика"/2009г**  
**ИУ-8, 2 курс, 4 сем. (Иванов А.О.)**

1. Множества, равенство множеств, операции над множествами.
2. Графы, ориентированные графы, изоморфизмы графов, подграфы.
3. Основные свойства операций над множествами: ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность, идемпотентность, законы поглощения и законы де Моргана.
4. Графы, пути, циклы, остовные подграфы. Связность графа, разложение графа на связные компоненты.
5. Отображения множеств, характеристическая функция множества. Свойства характеристических функций — связь с операциями над множествами.
6. Графы и матрицы: матрица смежности, матрица Кирхгофа, матрица инцидентности, матрица ориентированной инцидентности, их свойства.
7. Понятие отображения множеств. Сюръективные, инъективные и биективные отображения. Операция суперпозиции отображений. Обратное отображение. Теорема существования обратного отображения.
8. Графы и матрицы: связь матрицы Кирхгофа и матрицы ориентированной инцидентности.
9. Бинарные отношения: отношения эквивалентности, теорема о разбиении на классы, фактор-множество, примеры.
10. Функция расстояния на множестве вершин связного графа. Диаметр графа. Теорема о связи ранга графа и его диаметра.
11. Бинарные отношения: отношение порядка. Линейный порядок. Наибольший и наименьший, максимальный и минимальный элементы. Точная верхняя (нижняя) грань множества. Примеры.
12. Диаметр связного графа. Теорема о связи ранга графа и его диаметра.
13. Эквивалентность множества, равномощность. Счетные множества, их свойства.
14. Методы перечисления вершин и ребер графа. Поиск в ширину и поиск в глубину.
15. Теорема о мощности множества отображений из данного множества в двухэлементное.
16. Матричная теорема Кирхгофа.
17. Сравнение мощностей множества: счетные множества, мощность отрезка.
18. Количество остовных деревьев в полном графе.
19. Алгебраические системы: полугруппы, группы, единственность нейтрального и обратного элементов. Примеры: группа перестановок, группа вычетов.
20. Графы с весами. Задача о поиске остовного дерева наименьшего веса. Алгоритм Прима (описание).
21. Алгебраические системы: группы, группа перестановок, теорема Кэли.
22. Алгоритм Краскала поиска остова наименьшего веса. Теорема о корректности этого алгоритма.
23. Алгебраические системы: группы, подгруппы, теорема Лагранжа.
24. Ориентированный граф. Задача о достижимости. Матрица достижимости и ее связь с матрицей смежности.
25. Алгебраические системы: полукольца, кольца, поля, делители нуля, поля вычетов.
26. Ориентированный граф. Задача о кратчайшем пути. Матрица весов кратчайших путей и ее связь с матрицей смежности.
27. Алгебраические системы: идемпотентные замкнутые полукольца. Решение уравнения  $x = ax + b$ .
28. Ориентированный граф. Задача о кратчайшем пути. Алгоритм Дейкстры.

29. Алгебраические системы: булевы кольца и булевы алгебры, теорема о соответствии между ними, примеры.
30. Конечные детерминированные автоматы с выходом, способы задания. Покрытия. Задача о минимальном автомате.
31. Булевы функции, способы задания, существенные и фиктивные переменные, отношение равенства.
32. Конечные детерминированные автоматы с выходом. Покрытия и морфизмы.
33. Булевы функции, их суперпозиция, формулы над базисом функций.
34. Конечные детерминированные автоматы: эквивалентные и  $r$ -эквивалентные состояния, процедура минимизации.
35. Теорема о разложении булевой функции, СДНФ.
36. Алфавит, слово, язык, мощность множества языков над конечным алфавитом.
37. Двойственная булева функция, принцип двойственности, СКНФ.
38. Операции над языками, регулярные операции, регулярные языки и регулярные выражения.
39. Полиномы Жегалкина. Теорема о представлении булевой функции в виде полинома Жегалкина.
40. Языки, порожденные грамматиками. Эквивалентные грамматики. Иерархия Хомского.
41. Полиномы Жегалкина. Метод неопределенных коэффициентов. Единственность полинома Жегалкина булевой функции.
42. НК-грамматики. Языки, порожденные НК-грамматиками в иерархии Хомского.
43. Полином Жегалкина и существенные переменные булевой функции.
44. Задача распознавания в НК-грамматиках. Оценка высоты дерева вывода.
45. Меры сложности ДНФ, задача о минимизации ДНФ, сокращенные ДНФ, алгоритм Блейка.
46. Правolineйные грамматики и автоматы-распознаватели.
47. Задача о минимизации ДНФ, тупиковые ДНФ, карта Карно, функция Патрика.
48. Регулярные языки и автоматы. Теорема Клини.
49. Контактные схемы, метод каскадов.
50. Геделевы нумерации. Мощность множества языков, порожденных грамматиками.
51. Замкнутые классы: классы функций сохраняющих константу, класс самодвойственных функций.
52. Иерархия Хомского. Существование нерегулярных контекстно-свободных языков.
53. Замкнутые классы: класс монотонных функций, класс линейных функций.
54. Понятие ранга графа. Независимость ранга от нумерации вершин.
55. Теорема о ДНФ монотонной функции. Критерий монотонности.
56. Пять эквивалентных определений дерева.
57. Теорема Поста о полноте.
58. Лемма о разрастании для регулярных языков. Пример нерегулярного языка.
59. Построение заданной функции из функций полной системы.
60. Детерминизация автоматов-распознавателей. Регулярность языка, являющегося дополнением до регулярного.

**ЗАДАЧИ по курсу "Дискретная математика"**  
**ИУ-8, 2 курс, 4 сем. (Иванов А.О.)**

1. Найти группу автоморфизмов неориентированного графа:



2. Минимизировать автомат с выходом, заданный таблицей ( $q_1$  — входная вершина):

|   | $q_1$    | $q_2$    | $q_3$    | $q_4$    | $q_5$    |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | $q_4, 0$ | $q_5, 1$ | $q_5, 0$ | $q_5, 1$ | $q_2, 1$ |
| 1 | $q_3, 0$ | $q_4, 1$ | $q_4, 0$ | $q_4, 1$ | $q_4, 1$ |

3. Пусть  $M$  — некоторое множество. На множестве  $M^2$  определена операция  $\circ$  по правилу  $\langle x, y \rangle \circ \langle z, t \rangle = \langle x, t \rangle$ . Является ли  $\langle M^2, \circ \rangle$  полугруппой? Существует ли нейтральный элемент?

4. Найти язык, допускаемый автоматом  $\{A = \{a, b\}, S = \{q_1, q_2, q_3\}, \text{вход} = \{q_1, q_2\}, \text{выход} = \{q_3\}, f\}$ , где  $f(q_1, a) = q_2, f(q_1, b) = q_2, f(q_2, b) = q_1, f(q_2, a) = q_3, f(q_3, b) = q_1$ .

5. Какие из указанных множеств квадратных вещественных матриц образуют группу:

- (а) множество невырожденных матриц относительно умножения;
- (б) множество невырожденных матриц относительно сложения;
- (в) множество диагональных матриц относительно сложения?

6. Построить автомат, допускающий итерацию языка  $L$ , где  $L = \{a, b \mid abb^k, bab^l, k \geq 0; l \geq 0\}$ .

7. Пусть  $M$  — некоторое множество. Является ли группой  $\langle 2^M, \Delta \rangle$ ?

8. Найти минимальную ДНФ булевой функции четырех переменных:  $f = (1100\ 1101\ 0010\ 0011)$ .

9. Найти язык, допускаемый автоматом  $\{A = \{a, b\}, S = \{q_1, q_2, q_3\}, \text{вход} = \{q_1, q_2\}, \text{выход} = \{q_3\}, f\}$ , где  $f(q_1, a) = q_2, f(q_2, b) = q_2, f(q_2, b) = q_3, f(q_2, a) = q_3, f(q_3, b) = q_1$ .

10. Найти минимальную ДНФ булевой функции четырех переменных:  $f = (0010\ 1110\ 1111\ 0110)$ .

11. В поле  $\mathbb{Z}_5$  решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y + 2z = 2 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

12. Найти минимальную ДНФ булевой функции четырех переменных:  $f = (1010\ 0110\ 1010\ 1110)$ .

13. Используя метод двух включений, проверить тождество:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

14. Для булевой функции  $f(x, y, z) = (\bar{x} \vee (y \cdot z)) \rightarrow ((x|y) \cdot \bar{z})$  найти полином Жегалкина и минимальные ДНФ.

15. Используя метод характеристических функций, доказать тождество:

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

16. Является ли система булевых функций  $\{f, g, h\}$  полной? Если существуют среди функций  $f, g, h$  две, образующие полную систему, то найти все такие пары.

$$f = 01100110; \quad g = 01010100; \quad h = 10001110.$$

17. На множестве натуральных чисел задано бинарное отношение  $\rho$ : числа  $m$  и  $n$  связаны бинарным отношением  $\rho$ , если  $m$  делится нацело на  $n$ .

18. Исследовать свойства бинарного отношения  $\rho$  и установить, является ли оно отношением порядка или отношением эквивалентности? Как изменятся свойства бинарного отношения, если оно будет задано на множестве целых чисел?

19. Минимизировать автомат с выходом, заданный таблицей ( $q_1$  — входная вершина):

|   | $q_1$    | $q_2$    | $q_3$    | $q_4$    | $q_5$    |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | $q_2, 0$ | $q_5, 0$ | $q_2, 0$ | $q_4, 1$ | $q_1, 1$ |
| 1 | $q_4, 1$ | $q_3, 1$ | $q_5, 1$ | $q_1, 1$ | $q_4, 1$ |

20. Проверить тождество, используя метод характеристических функций:

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

С использованием карты Карно минимизировать булеву функцию от четырех переменных:

$$f = (1111\ 1100\ 1011\ 0101).$$

21. Минимизировать автомат с выходом, заданный таблицей ( $q_1$  — входная вершина):

|   | $q_1$    | $q_2$    | $q_3$    | $q_4$    | $q_5$    |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | $q_3, 1$ | $q_1, 0$ | $q_4, 0$ | $q_3, 1$ | $q_1, 0$ |
| 1 | $q_2, 1$ | $q_5, 0$ | $q_2, 0$ | $q_5, 1$ | $q_3, 0$ |

22. Используя метод двух включений, доказать тождество:

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D).$$

23. Какое максимальное возможное число элементов имеет полная система булевых функций, из которой ни одну функцию нельзя удалить без потери свойства полноты?

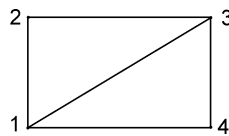
24. На множестве рациональных дробей вида  $a/b$ ,  $a \in \mathbf{Z}$ ,  $b \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  задано бинарное отношение

$$\tau = \{ \langle a/b, c/d \rangle \mid ad = cb \}.$$

Исследовать свойства бинарного отношения  $\tau$  и установить, является ли оно отношением порядка или отношением эквивалентности?

25. Для булевой функции  $f(x, y, z) = ((x \oplus y) \vee (y \oplus z)) \cdot (x \rightarrow (y \cdot z))$  найти полином Жегалкина и минимальные ДНФ.

26. Найти группу автоморфизмов неориентированного графа:



27. Найти язык, допускаемый автоматом  $\{A = \{a, b\}, S = \{q_1, q_2, q_3\}, \text{вход} = \{q_1, q_2\}, \text{выход} = \{q_3\}, f\}$ , где  $f(q_1, a) = q_1$ ,  $f(q_2, b) = q_3$ ,  $f(q_2, a) = q_1$ ,  $f(q_1, b) = q_3$ ,  $f(q_3, a) = q_2$ ,

28. На множестве целых чисел задано бинарное отношение  $\rho$ : числа  $m$  и  $n$  связаны бинарным отношением  $\rho$ , если  $m$  делится нацело на  $n$ . Исследовать свойства бинарного отношения  $\rho$  и установить, является ли оно отношением порядка или отношением эквивалентности. Как изменятся свойства бинарного отношения, если оно будет задано на множестве натуральных чисел?

29. В группе подстановок  $\mathbf{S}_6$  решить уравнение:  $(123) \circ (245) \circ X \circ (13)^3 \circ (164) = (135)^3$

30. Найти язык, допускаемый автоматом  $\{A = \{a, b\}, S = \{q_1, q_2, q_3\}, \text{вход} = \{q_1, q_2\}, \text{выход} = \{q_3\}, f\}$ , где  $f(q_1, a) = q_2$ ,  $f(q_1, b) = q_3$ ,  $f(q_2, b) = q_3$ ,  $f(q_3, a) = q_3$ ,  $f(q_3, b) = q_1$ ,

31. Является ли система булевых функций  $\{f, g, h, t\}$  полной? Если существуют среди функций  $f, g, h$  и  $t$  три, образующие полную систему, то найти все такие тройки.

$$f(x, y) = x \cdot y, \quad g(x, y) = x \rightarrow (x \vee y); \quad h(x, y) = \overline{(x \cdot y) \rightarrow y}, \quad t(x, y, z) = x \oplus y \oplus z.$$

32. Минимизировать автомат с выходом, заданный таблицей ( $q_1$  — входная вершина):

|   | $q_1$    | $q_2$    | $q_3$    | $q_4$    | $q_5$    |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | $q_3, 0$ | $q_4, 1$ | $q_5, 0$ | $q_2, 1$ | $q_1, 1$ |
| 1 | $q_5, 0$ | $q_3, 0$ | $q_1, 0$ | $q_1, 0$ | $q_5, 0$ |

33. С помощью карты Карно минимизировать булеву функцию от четырех переменных:

$$f = (1011\ 0111\ 1010\ 1100).$$

34. Пусть  $M$  — некоторое множество. Является ли группой  $\langle 2^M, \cap \rangle$ ?

35. Доказать, что  $A \cup B = (A \triangle B) \cup (A \cap B)$ .

36. Найти язык, допускаемый автоматом

$\{A = \{a, b\}, S = \{q_1, q_2, q_3\}, \text{вход} = \{q_1\}, \text{выход} = \{q_2, q_3, f\}\}$ , где  $f(q_1, a) = q_1$ ,  $f(q_1, b) = q_2$ ,  $f(q_2, a) = q_3$ ,  $f(q_2, b) = q_2$ ,  $f(q_3, b) = q_1$ . Построить грамматику, порождающую этот язык.

37. Найти язык, допускаемый автоматом

$\{A = \{a, b\}, S = \{q_1, q_2, q_3\}, \text{вход} = \{q_1\}, \text{выход} = \{q_2, q_3, f\}\}$ , где  $f(q_1, a) = q_1$ ,  $f(q_1, b) = q_2$ ,  $f(q_2, a) = q_3$ ,  $f(q_3, a) = q_1$ ,  $f(q_3, b) = q_3$ . Построить грамматику, порождающую этот язык.

38. Решить уравнение в группе подстановок  $S_4$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

39. Доказать, что для любых бинарных отношений  $\rho, \sigma$  и  $\tau$  верны соотношения:

$$\begin{aligned} \rho \circ (\sigma \cup \tau) &= (\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \tau), \\ \rho \circ (\sigma \cap \tau) &\subseteq (\rho \circ \sigma) \cap (\rho \circ \tau). \end{aligned}$$

40. В поле  $\mathbf{Z}_7$  решить систему уравнений:  $\begin{cases} 3x + y = 4, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$

41. С использованием карты Карно минимизировать булеву функцию от четырех переменных:

$$f = (0011\ 0101\ 1100\ 1100).$$

42. Найти язык, допускаемый автоматом. Найти грамматику и привести пример вывода в данной грамматике. Множество входов автомата —  $\{q_1, q_2\}$ , множество выходов —  $\{q_3\}$ , а функция переходов задана указанием наборов  $\langle \text{состояние}, \text{состояние}, \text{символ} \rangle$ :  $\langle q_1, q_1, a \rangle$ ,  $\langle q_2, q_2, a \rangle$ ,  $\langle q_3, q_3, b \rangle$ ,  $\langle q_1, q_3, b \rangle$ ,  $\langle q_3, q_2, b \rangle$ ,  $\langle q_2, q_1, b \rangle$ .

43. С использованием карты Карно минимизировать булеву функцию от четырех переменных:

$$f = (1111\ 1100\ 1100\ 0111).$$

44. Минимизировать автомат с выходом, заданный таблицей ( $q_1$  — входная вершина):

|   | $q_1$    | $q_2$    | $q_3$    | $q_4$    | $q_5$    |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | $q_4, 0$ | $q_1, 1$ | $q_2, 1$ | $q_5, 1$ | $q_2, 0$ |
| 1 | $q_3, 0$ | $q_3, 1$ | $q_5, 1$ | $q_3, 1$ | $q_3, 0$ |

45. Образуется ли кольцо относительно матричных операций сложения и умножения множество матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ , где  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ?

46. Минимизировать автомат с выходом, заданный таблицей ( $q_1$  — входная вершина):

|   | $q_1$    | $q_2$    | $q_3$    | $q_4$    | $q_5$    |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | $q_3, 1$ | $q_3, 0$ | $q_3, 1$ | $q_1, 0$ | $q_3, 0$ |
| 1 | $q_4, 0$ | $q_5, 0$ | $q_5, 0$ | $q_2, 0$ | $q_4, 0$ |

47. Образуется ли кольцо относительно матричных операций сложения и умножения множество матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$ , где  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ?

48. Минимизировать автомат с выходом, заданный таблицей ( $q_1$  — входная вершина):

|   | $q_1$    | $q_2$    | $q_3$    | $q_4$    | $q_5$    |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | $q_4, 1$ | $q_2, 0$ | $q_1, 1$ | $q_3, 1$ | $q_5, 0$ |
| 1 | $q_5, 1$ | $q_5, 0$ | $q_5, 1$ | $q_2, 1$ | $q_2, 0$ |

49. Доказать, что  $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$ . При каких  $A, B, C$  и  $D$  получается равенство?

50. Минимизировать автомат с выходом, заданный таблицей ( $q_1$  — входная вершина):

|   | $q_1$    | $q_2$    | $q_3$    | $q_4$    | $q_5$    |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | $q_4, 0$ | $q_1, 1$ | $q_1, 0$ | $q_3, 0$ | $q_4, 1$ |
| 1 | $q_5, 1$ | $q_5, 1$ | $q_2, 1$ | $q_5, 1$ | $q_5, 1$ |

51. На множестве  $M$  определена операция  $\circ$  по правилу  $x \circ y = x$ . Доказать, что  $\langle M, \circ \rangle$  — полугруппа. При каких условиях  $M$  является группой?

52. С использованием карты Карно минимизировать булеву функцию от четырех переменных:

$$f = (1111\ 0010\ 1110\ 0111).$$

53. В группе подстановок  $S_4$  решить уравнение:

$$(12) \circ (34) \circ X \circ (13) = \begin{pmatrix} 1234 \\ 4213 \end{pmatrix}.$$

54. Найти язык, допускаемый автоматом  $\{A = \{a, b\}, S = \{q_1, q_2, q_3\}, \text{вход} = \{q_1\}, \text{выход} = \{q_2, q_3, f\}\}$ , где  $f(q_1, a) = q_2, f(q_2, a) = q_3, f(q_2, b) = q_2, f(q_3, a) = q_1, f(q_3, b) = q_1$ .

55. В поле  $Z_7$  решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}.$$

56. Найти язык, допускаемый автоматом  $\{A = \{a, b\}, S = \{q_1, q_2, q_3\}, \text{вход} = \{q_1, q_2\}, \text{выход} = \{q_3, f\}\}$ , где  $f(q_1, a) = q_3, f(q_1, b) = q_3, f(q_2, a) = q_1, f(q_2, b) = q_2, f(q_3, b) = q_2$ .

57. Выяснить полноту системы булевых функций  $\{f\}$ . Если система  $\{f\}$  полна, то с помощью нее реализовать функцию  $x \cdot y$ .

$$f = 11100110.$$

58. Найти язык, допускаемый автоматом  $\{A = \{a, b\}, S = \{q_1, q_2, q_3\}, \text{вход} = \{q_1, q_2\}, \text{выход} = \{q_3, f\}\}$ , где  $f(q_1, a) = q_2, f(q_1, b) = q_1, f(q_2, a) = q_2, f(q_2, b) = q_3, f(q_3, b) = q_2$ .

59. Найти язык, допускаемый автоматом  $\{A = \{a, b\}, S = \{q_1, q_2, q_3\}, \text{вход} = \{q_1\}, \text{выход} = \{q_2, q_3, f\}\}$ , где  $f(q_1, a) = q_2, f(q_1, b) = q_3, f(q_2, b) = q_3, f(q_3, a) = q_1$ .

60. Известно, что СДНФ булевой функции от трех переменных совпадают с ее минимальной ДНФ. Какое максимальное число различных элементарных конъюнкций может содержать СДНФ этой функции?